RESOLVIENDO PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 164 (090119)

Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} 0 & -5<x<0 \\ 3 & 0<x<5 \end{cases} \quad (period=10)$$

1) Hallar los coeficientes de Fourier.
2) Escribir la correspondiente serie de Fourier.
3) ¿Cómo habría que definir f(x) en los puntos x=-5, x=0 y x=5 para que la serie de Fourier converja hacia f(x) en $-5\le x\le 5$?

RESOLUCIÓN:

La serie de Fourier

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n\ge 1}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n sen\frac{n\pi x}{L}\right)$$

donde es $2L$ el periodo de la función, tiene por coeficientes

$$a_n=\frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,\quad b_n=\frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)sen\frac{n\pi x}{L}dx$$

1) $2L=10\to L=5: a_n=\frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\cos\frac{n\pi x}{5}dx=\frac{1}{5}\int_{-5}^{0}0.\cos\frac{n\pi x}{5}dx+\frac{1}{5}\int_0^5 3.\cos\frac{n\pi x}{5}dx$

$$si\ n\ne 0: a_n=\frac{1}{5}3\frac{5}{n\pi}sen\frac{n\pi x}{5}\Big|_0^5=\frac{3}{n\pi}senn\pi=0,$$

$$si\ n=0: a_0=\frac{1}{5}\int_0^5 3\cos\frac{0.\pi x}{5}dx=\frac{1}{5}3x\Big|_0^5=3$$

$$b_n=\frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\cos\frac{n\pi x}{5}dx=\frac{1}{5}\int_{-5}^{0}0sen\frac{n\pi x}{5}dx+\frac{1}{5}\int_0^5 3.sen\frac{n\pi x}{5}dx=\frac{3}{n\pi}\left(1-\cos n\pi\right)$$

2) Al sustituir coeficientes:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n\ge 1}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n sen\frac{n\pi x}{L}\right)=\frac{3}{2}+\sum_{n\ge 1}\left(0.\cos\frac{n\pi x}{L}+\frac{3}{n\pi}\left(1-\cos n\pi\right).sen\frac{n\pi x}{L}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}+\sum_{n\ge 1}\left(\frac{3}{n\pi}\left(1-\cos n\pi\right).sen\frac{n\pi x}{L}\right)=\frac{3}{2}+\frac{6}{\pi}sen\frac{\pi x}{5}+\frac{6}{3\pi}sen\frac{3\pi x}{5}+\frac{6}{5\pi}sen\frac{5\pi x}{5}+\dots$$

3) La serie cumplirá las condiciones de Dirichlet si converge en los puntos de discontinuidad hacia $(f(x+0)-f(x-0))/2=(3+0)/2=3/2$. Por tanto, bastará redefinir la función en la forma:

$$f(x)=\begin{cases} 3/2 & x=-5 \\ 0 & -5<x<0 \\ 3/2 & x=0 \\ 0 & 0<x<5 \\ 3/2 & x=5 \end{cases}$$