RESOLVIENDO PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 152 (070218)

a) Demostrar que la propiedad de ser un espacio de Hausdorff es hereditaria, es decir, que todo subespacio de un espacio de Hausdorff es también espacio de Hausdorff.

b) Sea T_R la topología de la recta real R generada por los intervalos abiertos-cerrados $(a,b]$. Demostrar que (R,T_R) es un espacio de Hausdorff.

RESOLUCIÓN:

a) La definición de Espacio de Hausdorff es:

$$\left(H,T_H\right)\ Esp.\ Hausdorff \leftrightarrow \forall a,b\in H, \exists A,B\in T_H\ /\ (a\in A, b\in B)\wedge A\cap B=\phi$$

Sea $\left(X,T_X\right)$ subespacio topológico de $\left(H,T_H\right)$, y sean $a,b\in X\subseteq H$. La topología relativa en X se obtiene como intersección de X con los abiertos de $\left(H,T_H\right)$:

$$T_X=\left\{X\cap A\ /\ A\in T_H\right\}$$

Por tanto:

$$\left(H,T_H\right)\ Esp.\ Hausdorff \leftrightarrow \forall a,b\in X\subseteq H, \exists A,B\in T_H\ /\ (a\in A, b\in B)\wedge A\cap B=\phi \rightarrow$$
$$\rightarrow a\in X\cap A, b\in X\cap B\wedge\left(X\cap A\right)\cap\left(X\cap B\right)=X\cap(A\cap B)=X\cap\phi=\phi\rightarrow$$
$$\rightarrow\left(X,T_X\right)\ Esp.\ Hausdorff$$

b) La topología considerada en R es $T_R=\left\{(a,b]\ /\ a,b\in R\right\}$

Veamos que $\forall a,b\in R, \exists A,B\in T_R\ /\ (a\in A, b\in B)\wedge A\cap B=\phi$:

Sea, por ejemplo, $a<b$. Basta elegir los abiertos $A=\left(a-1,a\right], B=\left(a,b\right]$, pues obviamente, $(a\in A, b\in B)\wedge A\cap B=\phi$. Si fuera $b<a$ sería igual, intercambiando ambos elementos, $A=\left(b,a\right], B=\left(b-1,b\right]$. Luego

$$\forall a,b\in R, \exists A,B\in T_R\ /\ (a\in A, b\in B)\wedge A\cap B=\phi\rightarrow\left(R,T_R\right)\ Esp.\ Hausdorff$$

PROBLEMA 151 (100118)

Resuélvase la integral triple

$$\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}}$$

RESOLUCIÓN:

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}} = 2\left(z+(x+y+1)\right)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1 = 2(\sqrt{x+y+2}-\sqrt{x+y+1})$$

$$\int_0^1 2(\sqrt{x+y+2}-\sqrt{x+y+1})dy = 2.\frac{2}{3}(y+(x+2))^{\frac{3}{2}} - 2.\frac{2}{3}(y+(x+1))^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{4}{3}\left[(x+3)^{\frac{3}{2}} - (x+2)^{\frac{3}{2}} - (x+2)^{\frac{3}{2}} + (x+1)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{4}{3}\left[(x+3)^{\frac{3}{2}} - 2(x+2)^{\frac{3}{2}} + (x+1)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$\int_0^1 \frac{4}{3}\left[(x+3)^{\frac{3}{2}} - 2(x+2)^{\frac{3}{2}} + (x+1)^{\frac{3}{2}}\right]dx = \frac{8}{15}\left[(x+3)^{\frac{5}{2}} - 2(x+2)^{\frac{5}{2}} + (x+1)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{8}{15}\left[(4^{\frac{5}{2}} - 2.3^{\frac{5}{2}} + 2^{\frac{5}{2}}) - (3^{\frac{5}{2}} - 2.2^{\frac{5}{2}} + 1)\right] = \frac{8}{15}\left[2^5 - 3^3.3^{\frac{1}{2}} + 3.2^2.2^{\frac{1}{2}} - 1\right] =$$

$$= \frac{8}{15}\left[31 - 27.\sqrt{3} + 12\sqrt{2}\right]$$