RESOLVIENDO PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 153 (070318)

Prueba que la gráfica del polinomio P(x) es simétrica respecto del punto $A(a,b)$ sí y sólo sí existe un polinomio Q tal que: $p(x)=b+(x-a)Q((x-a)^2)$ para todo $x\in R$

(Olimpiada Matemática Española, 2001. Murcia. Primera sesión)

RESOLUCIÓN:

Supongamos primero que exista el polinomio P que cumple las condiciones requeridas.

Sea $x=a-h$ ó $x=a+h$ Entonces:

$$\begin{cases} P(a-h)=b-hQ(h^2) \\ P(a+h)=b+hQ(h^2) \end{cases} \text{ y } \frac{P(a-h)+P(a+h)}{2}=b, \text{ para todo } h\in R.$$

Lo que significa que la gráfica de P es simétrica respecto del punto $A(a,b)$.

Sea $P(x)=P(a+h)=R(h)$

La condición $\dfrac{P(a-h)+P(a+h)}{2}=b$ es equivalente a $R(-h)+R(h)=2b$ porque $P(a-h)=R(-h)$.

Para $R(h)=a_0+a_1h+\dots+a_nh^n$ la condición anterior se escribe de la forma:

$$a_0+a_1h+\dots+a_nh^n+a_0-a_1h+a_2h^2-\dots+(-1)^n a_nh^n=2b$$

es decir $a_0+a_2h^2+\dots+a_mh^m=b$ para cada $h\in R,\ m=n, n\ par,\ m=n-1, n\ impar$

Se deduce que $a_2=a_4=\dots=a_m=0,\ a_0=b$

Por tanto ahora se tiene que

$R(h)=b+a_1h+a_3h^3+\dots=b+h(a_1+a_3h^2+a_5h^4+\dots)=b+h.Q(h^2)$

y así existe un polinomio Q tal que

$$R(h)=b+hQ\left(h^2\right)$$

Por último, como es $x=a+h\to h=x-a$:

$$p(x)=R(h)=b+(x-a)Q((x-a)^2)$$

PROBLEMA 152 (070218)

a) Demostrar que la propiedad de ser un espacio de Hausdorff es hereditaria, es decir, que todo subespacio de un espacio de Hausdorff es también espacio de Hausdorff.

b) Sea T_R la topología de la recta real R generada por los intervalos abiertos-cerrados $(a,b]$. Demostrar que (R,T_R) es un espacio de Hausdorff.

RESOLUCIÓN:

a) La definición de Espacio de Hausdorff es:

$$\left(H,T_H\right)\ Esp.\ Hausdorff \leftrightarrow \forall a,b\in H,\exists A,B\in T_H\,/\,(a\in A,b\in B)\wedge A\cap B=\phi$$

Sea $\left(X,T_X\right)$ subespacio topológico de $\left(H,T_H\right)$, y sean $a,b\in X\subseteq H$. La topología relativa en X se obtiene como intersección de X con los abiertos de $\left(H,T_H\right)$:

$$T_X=\left\{X\cap A\,/\,A\in T_H\right\}$$

Por tanto:

$$\left(H,T_H\right)\ Esp.\ Hausdorff \leftrightarrow \forall a,b\in X\subseteq H,\exists A,B\in T_H\,/\,(a\in A,b\in B)\wedge A\cap B=\phi\rightarrow$$

$$\rightarrow a\in X\cap A,b\in X\cap B\wedge\left(X\cap A\right)\cap\left(X\cap B\right)=X\cap(A\cap B)=X\cap\phi=\phi\rightarrow$$

$$\rightarrow\left(X,T_X\right)\ Esp.\ Hausdorff$$

b) La topología considerada en R es $T_R=\left\{(a,b]\,/\,a,b\in R\right\}$

Veamos que $\forall a,b\in R,\exists A,B\in T_R\,/\,(a\in A,b\in B)\wedge A\cap B=\phi$:

Sea, por ejemplo, $a<b$. Basta elegir los abiertos $A=\left(a-1,a\right],B=\left(a,b\right]$, pues obviamente, $(a\in A,b\in B)\wedge A\cap B=\phi$. Si fuera $b<a$ sería igual, intercambiando ambos elementos, $A=\left(b,a\right],B=\left(b-1,b\right]$. Luego

$$\forall a,b\in R,\exists A,B\in T_R\,/\,(a\in A,b\in B)\wedge A\cap B=\phi\rightarrow\left(R,T_R\right)\ Esp.\ Hausdorff$$

PROBLEMA 151 (100118)

Resuélvase la integral triple

$$\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}}$$

RESOLUCIÓN:

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}} = 2\,(z+(x+y+1))^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1 = 2(\sqrt{x+y+2}-\sqrt{x+y+1})$$

$$\int_0^1 2(\sqrt{x+y+2}-\sqrt{x+y+1})\,dy = 2.\frac{2}{3}(y+(x+2))^{\frac{3}{2}} - 2.\frac{2}{3}(y+(x+1))^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{4}{3}\left[(x+3)^{\frac{3}{2}}-(x+2)^{\frac{3}{2}}-(x+2)^{\frac{3}{2}}+(x+1)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{4}{3}\left[(x+3)^{\frac{3}{2}}-2(x+2)^{\frac{3}{2}}+(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$\int_0^1 \frac{4}{3}\left[(x+3)^{\frac{3}{2}}-2(x+2)^{\frac{3}{2}}+(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]dx = \frac{8}{15}\left[(x+3)^{\frac{5}{2}}-2(x+2)^{\frac{5}{2}}+(x+1)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{8}{15}\left[(4^{\frac{5}{2}}-2.3^{\frac{5}{2}}+2^{\frac{5}{2}})-(3^{\frac{5}{2}}-2.2^{\frac{5}{2}}+1)\right] = \frac{8}{15}\left[2^5-3^3.3^{\frac{1}{2}}+3.2^2.2^{\frac{1}{2}}-1\right] =$$

$$= \frac{8}{15}\left[31-27.\sqrt{3}+12\sqrt{2}\right]$$