

RESOLVIENDO PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 155 (020518)

Se representa por Z el conjunto de todos los enteros. Hallar todas las funciones

$$f: Z \rightarrow Z$$

tales que para cualesquiera x, y enteros se verifica:

$$f(x + f(y)) = f(x) - y$$

Olimpiada Matemática Española. Fase Nacional 2004 (Ciudad Real). Primera sesión

RESOLUCIÓN:

Por inducción podemos comprobar que $\forall n \in Z, f(x + n \cdot f(y)) = f(x) - n \cdot y$, ya que

1) $f(x + 0 \cdot f(y)) = f(x) + 0 \cdot y$

2) $f(x + 1 \cdot f(y)) = f(x) - 1 \cdot y$

3) Si suponemos la fórmula cierta para $n = k \geq 0$,

$\forall n \in Z, f(x + k \cdot f(y)) = f(x) - k \cdot y$, vemos que entonces ha de ser cierta para $k + 1$:

$$\begin{aligned} f(x + (k+1) \cdot f(y)) &= f(x + k \cdot f(y) + f(y)) = f(x + k \cdot f(y)) - y = \\ &= f(x) - k \cdot y - y = f(x) - (k+1) \cdot y \end{aligned}$$

Para $n = k \leq -1$ se comprueba igual.

Ahora bien, vemos que llamando $A = 1 + f(1) \cdot f(1) = 1 + f(1)^2 > 0$

es $f(A) = f(1 + f(1) \cdot f(1)) = f(1) - f(1) \cdot 1 = 0$

Pero entonces:

$$f(x) = f(x + f(A)) = f(x) - A \rightarrow A = 0$$

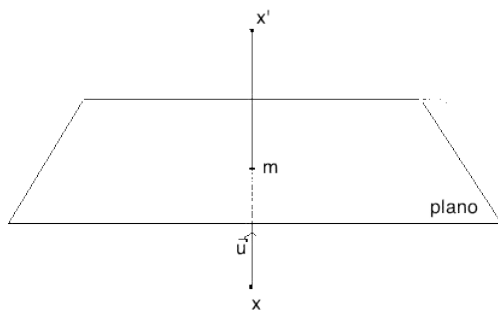
lo que implica contradicción ($A > 0$ y $A = 0$).

Es decir, no existen las funciones que puedan satisfacer la condición pedida.

PROBLEMA 154 (030418)

- a) Obténgase la fórmula vectorial de una simetría especular en el espacio E_3 .
- b) Hállese el punto especularmente simétrico del punto $(3,1,0)$ respecto al plano $4x - 4y + 2z - 1 = 0$.

RESOLUCIÓN:



Plano: $4x - 4y + 2z - 1 = 0$

\vec{u} : vector unitario normal al plano.

\vec{m} : vector de posición de un punto cualquiera del plano.

Ecuación vectorial del plano:

$$\vec{m} \cdot \vec{u} + \varepsilon = 0$$

a) Se tiene:

$$\vec{m} = \frac{\vec{x} + \vec{x}'}{2} \in \text{plano} \qquad \vec{x}' = \vec{x} + \lambda \vec{u}, \lambda \in R$$

sustituyendo en la ecuación vectorial del plano:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{x} + \vec{x}'}{2} \cdot \vec{u} + \varepsilon = 0 &\rightarrow (\vec{x} + \vec{x}') \cdot \vec{u} + 2\varepsilon = 0 \rightarrow (\vec{x} + \vec{x} + \lambda \vec{u}) \cdot \vec{u} + 2\varepsilon = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow (2\vec{x} + \lambda \vec{u}) \cdot \vec{u} + 2\varepsilon = 0 \rightarrow 2\vec{x} \cdot \vec{u} + \lambda + 2\varepsilon = 0 \rightarrow \lambda = -2(\vec{x} \cdot \vec{u} + \varepsilon) \end{aligned}$$

$$\vec{x}' = \vec{x} - 2(\vec{x} \cdot \vec{u} + \varepsilon) \cdot \vec{u}$$

b) Aplicaremos la fórmula obtenida para la simetría especular. Se tiene:

$$\vec{x} = (3,1,0), \quad 4x - 4y + 2z - 1 = 0 \rightarrow (4, -4, 2)(x, y, z) - 1 = 0 \rightarrow \vec{m} = (x, y, z),$$

$$\vec{u} = \frac{(4, -4, 2)}{\sqrt{4^2 + (-4)^2 + 2^2}} = \left(\frac{4}{6}, -\frac{4}{6}, \frac{2}{6}\right) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad \varepsilon = -\frac{1}{6}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{u} = (3,1,0) \cdot \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{u} + \varepsilon = \frac{4}{3} - \frac{1}{6} = \frac{7}{6}, \quad 2(\vec{x} \cdot \vec{u} + \varepsilon) \vec{u} = 2 \cdot \frac{7}{6} \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{14}{9}, -\frac{14}{9}, \frac{7}{9}\right)$$

$$\vec{x}' = \vec{x} - 2(\vec{x} \cdot \vec{u} + \varepsilon) \cdot \vec{u} = (3,1,0) - \left(\frac{14}{9}, -\frac{14}{9}, \frac{7}{9}\right) = \left(\frac{13}{9}, \frac{23}{9}, -\frac{7}{9}\right)$$

PROBLEMA 153 (070318)

Prueba que la gráfica del polinomio $P(x)$ es simétrica respecto del punto $A(a, b)$ sí y sólo sí existe un polinomio Q tal que: $p(x) = b + (x - a)Q((x - a)^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$

(Olimpiada Matemática Española, 2001. Murcia. Primera sesión)

RESOLUCIÓN:

Supongamos primero que exista el polinomio P que cumple las condiciones requeridas.

Sea $x = a - h$ ó $x = a + h$ Entonces:

$$\begin{cases} P(a - h) = b - hQ(h^2) \\ P(a + h) = b + hQ(h^2) \end{cases} \text{ y } \frac{P(a - h) + P(a + h)}{2} = b, \text{ para todo } h \in \mathbb{R}.$$

Lo que significa que la gráfica de P es simétrica respecto del punto $A(a, b)$.

Sea $P(x) = P(a + h) = R(h)$

La condición $\frac{P(a - h) + P(a + h)}{2} = b$ es equivalente a $R(-h) + R(h) = 2b$ porque

$$P(a - h) = R(-h).$$

Para $R(h) = a_0 + a_1h + \dots + a_nh^n$ la condición anterior se escribe de la forma:

$$a_0 + a_1h + \dots + a_nh^n + a_0 - a_1h + a_2h^2 - \dots + (-1)^n a_nh^n = 2b$$

es decir $a_0 + a_2h^2 + \dots + a_mh^m = b$ para cada $h \in \mathbb{R}$, $m = n$, n par, $m = n - 1$, n impar

Se deduce que $a_2 = a_4 = \dots = a_m = 0$, $a_0 = b$

Por tanto ahora se tiene que

$$R(h) = b + a_1h + a_3h^3 + \dots = b + h(a_1 + a_3h^2 + a_5h^4 + \dots) = b + h.Q(h^2)$$

y así existe un polinomio Q tal que

$$R(h) = b + hQ(h^2)$$

Por último, como es $x = a + h \rightarrow h = x - a$:

$$p(x) = R(h) = b + (x - a)Q((x - a)^2)$$

PROBLEMA 152 (070218)

- a) Demostrar que la propiedad de ser un espacio de Hausdorff es hereditaria, es decir, que todo subespacio de un espacio de Hausdorff es también espacio de Hausdorff.
- b) Sea T_R la topología de la recta real R generada por los intervalos abiertos-cerrados $(a,b]$. Demostrar que (R, T_R) es un espacio de Hausdorff.

RESOLUCIÓN:

- a) La definición de Espacio de Hausdorff es:

$$(H, T_H) \text{ Esp. Hausdorff} \Leftrightarrow \forall a, b \in H, \exists A, B \in T_H / (a \in A, b \in B) \wedge A \cap B = \phi$$

Sea (X, T_X) subespacio topológico de (H, T_H) , y sean $a, b \in X \subseteq H$. La topología relativa en X se obtiene como intersección de X con los abiertos de (H, T_H) :

$$T_X = \{X \cap A / A \in T_H\}$$

Por tanto:

$$(H, T_H) \text{ Esp. Hausdorff} \Leftrightarrow \forall a, b \in X \subseteq H, \exists A, B \in T_H / (a \in A, b \in B) \wedge A \cap B = \phi \rightarrow$$

$$\rightarrow a \in X \cap A, b \in X \cap B \wedge (X \cap A) \cap (X \cap B) = X \cap (A \cap B) = X \cap \phi = \phi \rightarrow$$

$$\rightarrow (X, T_X) \text{ Esp. Hausdorff}$$

- b) La topología considerada en R es $T_R = \{(a,b] / a, b \in R\}$

$$\text{Veamos que } \forall a, b \in R, \exists A, B \in T_R / (a \in A, b \in B) \wedge A \cap B = \phi :$$

Sea, por ejemplo, $a < b$. Basta elegir los abiertos $A = (a-1, a]$, $B = (a, b]$, pues obviamente, $(a \in A, b \in B) \wedge A \cap B = \phi$. Si fuera $b < a$ sería igual, intercambiando ambos elementos, $A = (b, a]$, $B = (b-1, b]$. Luego

$$\forall a, b \in R, \exists A, B \in T_R / (a \in A, b \in B) \wedge A \cap B = \phi \rightarrow (R, T_R) \text{ Esp. Hausdorff}$$

PROBLEMA 151 (100118)

Resuélvase la integral triple

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}}$$

RESOLUCIÓN:

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}} = 2(z+(x+y+1))^{\frac{1}{2}} \Big|_0^1 = 2(\sqrt{x+y+2} - \sqrt{x+y+1})$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 2(\sqrt{x+y+2} - \sqrt{x+y+1}) dy &= 2 \cdot \frac{2}{3} (y+(x+2))^{\frac{3}{2}} - 2 \cdot \frac{2}{3} (y+(x+1))^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \\ &= \frac{4}{3} \left[(x+3)^{\frac{3}{2}} - (x+2)^{\frac{3}{2}} - (x+2)^{\frac{3}{2}} + (x+1)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{4}{3} \left[(x+3)^{\frac{3}{2}} - 2(x+2)^{\frac{3}{2}} + (x+1)^{\frac{3}{2}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{4}{3} \left[(x+3)^{\frac{3}{2}} - 2(x+2)^{\frac{3}{2}} + (x+1)^{\frac{3}{2}} \right] dx &= \frac{8}{15} \left[(x+3)^{\frac{5}{2}} - 2(x+2)^{\frac{5}{2}} + (x+1)^{\frac{5}{2}} \right] \Big|_0^1 = \\ &= \frac{8}{15} \left[(4^{\frac{5}{2}} - 2 \cdot 3^{\frac{5}{2}} + 2^{\frac{5}{2}}) - (3^{\frac{5}{2}} - 2 \cdot 2^{\frac{5}{2}} + 1) \right] = \frac{8}{15} \left[2^5 - 3^3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} + 3 \cdot 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} - 1 \right] = \\ &= \frac{8}{15} [31 - 27\sqrt{3} + 12\sqrt{2}] \end{aligned}$$