

# RESOLVIENDO PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

## RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

### PROBLEMA 142 (030517)

Sea  $(G, +)$  un grupo aditivo abeliano. Se pide:

- Probar que para dos elementos,  $x$  e  $y$ , cualesquiera de  $G$ , se verifica que el opuesto de  $x+y$  es  $-x-y$ .
- Demostrar que si  $H$  es subgrupo de  $G$ , entonces  $G/H$  es grupo abeliano.
- Sea  $n$  un número entero. Probar que para dos elementos,  $x$  e  $y$ , cualesquiera de  $G$  se verifica que  $n.(x+y)=n.x+n.y$ .

### RESOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} \text{a) } (x+y)+(-x-y) &= (x+y+(-x))+(-y) = (x+(-x)+y)+(-y) = (0+y)+(-y) = \\ &= y+(-y) = 0 \end{aligned}$$

$$\forall x, y \in G, -(x+y) = -x-y$$

$$\text{b) } \forall x, y \in G \rightarrow x+H, y+H \in G/H \rightarrow$$

$$\rightarrow (x+H)+(y+H) = (x+y)+H = (y+x)+H = (y+H)+(x+H)$$

$$\text{O sea: } \forall (x+H), (y+H) \in G/H, (x+H)+(y+H) = (y+H)+(x+H)$$

$$\text{c) 1. Si es } n=0:$$

$$\left. \begin{aligned} n.(x+y) &= 0.(x+y) = 0 \\ n.x &= 0.x = 0, n.y = 0.y = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow n.(x+y) = n.x+n.y = 0, \forall x, y \in G$$

$$2. \text{ Si es } n > 0:$$

Procedemos por inducción:

- para  $n=1 \rightarrow 1.(x+y) = x+y = 1.x+1.y$ . Se verifica.

- para  $n > 1 \rightarrow \exists m \in \mathbb{N} / n = m+1, (m > 0)$ . Supongamos la expresión cierta para  $m$  y veamos que entonces ha de ser cierta para  $m+1$ . Se tendrá:

$$\begin{aligned} n(x+y) &= (m+1).(x+y) = m.(x+y) + 1.(x+y) = m.x + m.y + 1.x + 1.y = \\ &= (m.x + 1.x) + (m.y + 1.y) = (m+1).x + (m+1).y = n.x + n.y \end{aligned}$$

$$\text{Por tanto: } \forall x, y \in G, \forall n \in \mathbb{Z}^+, n.(x+y) = n.x + n.y$$

$$3. \text{ Si es } n < 0:$$

Hacemos  $n = -m (m > 0)$ :

$$\begin{aligned} n.(x+y) &= (-m).(x+y) = m.(-1).(x+y) = m.(-(x+y)) = m.(-x-y) = \\ &= m.[(-x)+(-y)] = m.(-x) + m.(-y) = (-m.x) + (-m.y) = (-m).x + (-m).y = \\ &= m.[(-x)+(-y)] = m.(-x) + m.(-y) = (-m.x) + (-m.y) = (-m).x + (-m).y = \end{aligned}$$

$$\text{Por tanto: } \forall x, y \in G, \forall n \in \mathbb{Z}^-, n.(x+y) = n.x + n.y$$

En definitiva, de 1., 2. Y 3.:  $\forall x, y \in G, \forall n \in \mathbb{Z}, n.(x+y) = n.x + n.y$

**PROBLEMA 141 (050417)**

Se desea obtener el punto de la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - 2x$$

en el que la recta tangente es paralela a la recta de ecuación

$$3x - 2y + 1 = 0$$

**RESOLUCIÓN:**

Pendiente de la recta tangente en  $x=x_0$ :

$$m = f'(x_0) = \frac{1}{2}x_0 - 2$$

Pendiente de la recta dada:

$$3x - 2y + 1 = 0 \rightarrow y = \frac{3}{2}x + 1 \rightarrow \text{pend} = \frac{3}{2}$$

Si la recta tangente es paralela a la recta dada han de tener ambas la misma pendiente, luego:

$$\frac{1}{2}x_0 - 2 = \frac{3}{2} \rightarrow x_0 = 7$$

El punto de la gráfica pedido es  $(7, f(7))$ . Y como es  $f(7) = \frac{7^2}{4} - 2 \cdot 7 = -\frac{7}{4}$ , se tiene, finalmente que el punto es

$$\left(7, -\frac{7}{4}\right)$$

**PROBLEMA 140 (080317)**

Estudiar la continuidad de

a)  $f_1(x) = +\sqrt{x^2 - 3x + 2}, \forall x \in R$

b)  $f_2(x) = L(\cos x), \text{ en } [0, 2]$

c)  $f_3(x) = \sqrt{\pi^2 - x^2} \cdot \text{tg}x, \forall x \in R$

**RESOLUCIÓN:**

a)  $f_1(x) = +\sqrt{x^2 - 3x + 2}$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2$$

y se tiene que

$$x \leq 1 \rightarrow x^2 - 3x + 2 \geq 0$$

$$1 < x < 2 \rightarrow x^2 - 3x + 2 < 0$$

$$x \geq 2 \rightarrow x^2 - 3x + 2 \geq 0$$

La función existe en  $R - (1, 2)$ 

$$\forall x \in R - (1, 2), f_1(x+0) = +\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{(x+h)^2 - 3(x+h) + 2} = +\sqrt{x^2 - 3x + 2} = f_1(x)$$

$$\forall x \in R - (1, 2), f_1(x-0) = +\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{(x-h)^2 - 3(x-h) + 2} = +\sqrt{x^2 - 3x + 2} = f_1(x)$$

O sea,  $f_1(x+0) = f_1(x-0) = f_1(x)$ , por lo que  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f_1(x + \Delta x) = f_1(x)$ La función existe y es continua en  $R - (1, 2)$ .

b)  $f_2(x) = L(\cos x)$

La función no existe si  $\cos x \leq 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ , es decir, solo existe en  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), f_2(x+0) = +\lim_{h \rightarrow 0} L(\cos(x+h)) = L(\cos x) = f_2(x)$$

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), f_2(x-0) = +\lim_{h \rightarrow 0} L(\cos(x-h)) = L(\cos x) = f_2(x)$$

O sea,  $f_2(x+0) = f_2(x-0) = f_2(x)$ , por lo que  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f_2(x + \Delta x) = f_2(x)$ La función existe y es continua en  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

c)  $f_3(x) = \sqrt{\pi^2 - x^2} \cdot \text{tg}x$

$$\pi^2 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm\pi$$

y se tiene que

$$f_3(x) \text{ no existe para } x < -\pi, x > \pi.$$

Si  $x = \pm\pi$  es  $\text{tg}(\pm\pi) = \pm\infty$  y  $f_3(x)$  no está definida.Campo de existencia:  $(-\pi, \pi)$ Y se cumple que  $f_3(x+0) = f_3(x-0) = f_3(x)$ , por lo que  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f_3(x + \Delta x) = f_3(x)$ La función existe y es continua en  $(-\pi, \pi)$ .

**PROBLEMA 139 (080217)**

Calcúlese por medio de una integral definida

$$A = \lim a_n$$

siendo  $(a_n)$  la sucesión cuyo término general es

$$a_n = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{n}\right)\left(1 + \frac{4}{n}\right)\left(1 + \frac{6}{n}\right)\dots\left(1 + \frac{2n}{n}\right)}$$

**RESOLUCIÓN:**

$$A = \lim a_n \rightarrow LA = L(\lim a_n) = \lim(La_n) = \lim \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} L \left(1 + 2 \frac{k}{n}\right)$$

haciendo  $\frac{k}{n} = x_k$  será  $\Delta x_k = \frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} = \frac{1}{n}$ , por lo cual:

$$A = \lim \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} L \left(1 + 2 \frac{k}{n}\right) = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n L(1 + 2x_k) \Delta x_k = \int_0^1 L(1 + 2x) \cdot dx$$

hacemos un cambio de variables y a continuación integramos por partes:

$$h = 1 + 2x, \quad dx = \frac{1}{2} dh \rightarrow A = \int_0^1 L(1 + 2x) \cdot dx = \frac{1}{2} \int_1^3 Lh \cdot dh$$

integrando por partes:

$$\frac{1}{2} \int_1^3 Lh \cdot dh = \frac{1}{2} [h \cdot Lh]_1^3 - \frac{1}{2} h^3 \Big|_1^3 = \frac{1}{2} (L3^3 - 2) = \frac{1}{2} (L3^3 - Le^2) = \frac{1}{2} L \frac{3^3}{e^2} = L \sqrt{\frac{3^3}{e^2}} = \frac{3\sqrt{3}}{e}$$

Resultado:

$$A = \frac{3\sqrt{3}}{e}$$

**PROBLEMA 138 (110117)**

La gráfica de  $y^2 + 2xy + 40|x| = 400$  divide al plano en varias regiones una de las cuales está acotada. Calcula el área de esa región.

**RESOLUCIÓN:**

Si  $x \geq 0$ , la función es  $y^2 + 2xy + 40x = 400$ , es decir,  $y^2 - 400 = -2x(y + 20)$  que es equivalente a  $(y + 20)(y - 20) + 2x(y + 20) = 0 \rightarrow (y + 20)(y - 20 + 2x) = 0$ , que corresponde a las dos rectas

$$\begin{cases} y = -20 \\ y = -2x + 20 \end{cases}$$

Si  $x < 0$ , tendríamos la función  $y^2 + 2xy - 40x = 400$ , y por tanto es  $y^2 - 400 = -2x(y - 20)$ . O sea,

$(y + 20)(y - 20) + 2x(y - 20) = 0 \rightarrow (y - 20)(y + 20 + 2x) = 0$ , que corresponde a las rectas

$$\begin{cases} y = 20 \\ y = -2x - 20 \end{cases}$$

La grafica de la función dada es la siguiente, donde se observa que la región acotada es el paralelogramo de base 20 y altura 40. El área es, por tanto, 800.

