RESOLVIENDO PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 156 (300518)

Determinar la tangente, normal principal y binormal a la curva

$$\begin{cases} x = 2t^2 - 1 \\ y = 1 - t \\ z = t^2 \end{cases}$$

en el punto (1,0,1)

RESOLUCIÓN:

Vectores:

tangente: $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} \Big/ \left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|$, normal: $\vec{n} = \dfrac{d\vec{\tau}}{dt} \Big/ \left|\dfrac{d\vec{\tau}}{dt}\right|$, binormal: $\vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{n}$

$\dfrac{d\vec{r}}{dt} = (4t,-1,2t)$, $\dfrac{d\vec{\tau}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = (4,0,2)$, $\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{16t^2+1+4t^2}$, $\left|\dfrac{d\vec{\tau}}{dt}\right| = \sqrt{4^2+0+2^2} = \sqrt{20}$

en el punto (1,0,1) es t=1, con lo cual $\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{16t^2+1+4t^2} = \sqrt{16+1+4} = \sqrt{21}$

por tanto:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Big/ \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{1}{\sqrt{21}}(4,-1,2) = \left(\frac{4\sqrt{21}}{21}, -\frac{\sqrt{21}}{21}, \frac{2\sqrt{21}}{21}\right),$$

$$\vec{n} = \frac{d\vec{\tau}}{dt} \Big/ \left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right| = \frac{1}{\sqrt{20}}(4,0,2) = \left(\frac{\sqrt{20}}{5}, 0, \frac{\sqrt{20}}{10}\right)$$

$$\vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{4\sqrt{21}}{21} & -\dfrac{\sqrt{21}}{21} & \dfrac{2\sqrt{21}}{21} \\ \dfrac{\sqrt{20}}{5} & 0 & \dfrac{\sqrt{20}}{10} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\sqrt{410}}{210}, 0, \frac{\sqrt{410}}{105}\right)$$

Recta tangente: $\dfrac{x-1}{\dfrac{4\sqrt{21}}{21}} = \dfrac{y-0}{-\dfrac{\sqrt{21}}{21}} = \dfrac{z-1}{\dfrac{2\sqrt{21}}{21}}$,

Recta normal: $\dfrac{x-1}{\dfrac{\sqrt{20}}{5}} = \dfrac{z-1}{\dfrac{\sqrt{20}}{10}}$

Recta binormal: $\dfrac{x-1}{-\dfrac{\sqrt{410}}{210}} = \dfrac{z-1}{\dfrac{\sqrt{410}}{105}}$

Simplificando:

Recta tangente $\rightarrow \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$

Recta normal principal $\rightarrow \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{z-1}{1}$

Recta binormal $\rightarrow \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$

PROBLEMA 155 (020518)

Se representa por Z el conjunto de todos los enteros. Hallar todas las funciones

$$f\colon Z \to Z$$

tales que para cualesquiera x, y enteros se verifica:

$$f(x + f(y)) = f(x) - y$$

Olimpiada Matemática Española. Fase Nacional 2004 (Ciudad Real). Primera sesión

RESOLUCIÓN:

Por inducción podemos comprobar que $\forall n \in Z,\ f(x+n.f(y)) = f(x) - n.y$, ya que

1) $f(x+0.f(y)) = f(x)+0.y$

2) $f(x+1.f(y)) = f(x)-1.y$

3) Si suponemos la fórmula cierta para $n = k \geq 0$,

$\forall n \in Z,\ f(x+k.f(y)) = f(x) - k.y$, vemos que entonces ha de ser cierta para $k+1$:

$$f(x+(k+1).f(y)) = f(x+k.f(y)+f(y)) = f(x+k.f(y)) - y =$$
$$= f(x) - k.y - y = f(x) - (k+1).y$$

Para $n = k \leq -1$ se comprueba igual.

Ahora bien, vemos que llamando $A = 1 + f(1).f(1) = 1 + f(1)^2 > 0$

es $f(A) = f(1+f(1).f(1)) = f(1) - f(1).1 = 0$

Pero entonces:

$$f(x) = f(x+f(A)) = f(x) - A \to A = 0$$

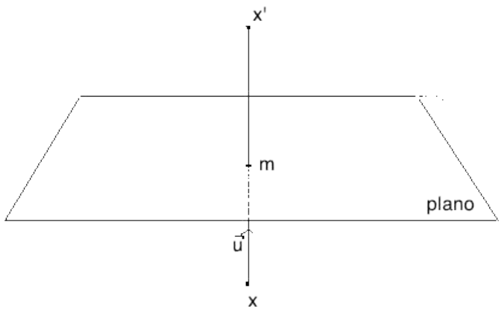
lo que implica contradicción ($A > 0$ y $A = 0$).

Es decir, no existen las funciones que puedan satisfacer la condición pedida.

PROBLEMA 154 (030418)

a) Obténgase la fórmula vectorial de una simetría especular en el espacio E_3.
b) Hállese el punto especularmente simétrico del punto (3,1,0) respecto al plano *4x - 4y + 2z – 1 = 0*.

RESOLUCIÓN:



Plano: 4x-4y+2z-1=0

$\vec{u}$: vector unitario normal al plano.

$\vec{m}$: vector de posición de un punto cualquiera del plano.

Ecuación vectorial del plano:

$$\vec{m}.\vec{u}+\varepsilon=0$$

a) Se tiene:

$$\vec{m}=\frac{\vec{x}+\vec{x}'}{2}\in plano \qquad \vec{x}'=\vec{x}+\lambda\vec{u},\ \lambda\in R$$

sustituyendo en la ecuación vectorial del plano:

$$\frac{\vec{x}+\vec{x}'}{2}.\vec{u}+\varepsilon=0\rightarrow\left(\vec{x}+\vec{x}'\right).\vec{u}+2\varepsilon=0\rightarrow\left(\vec{x}+\vec{x}+\lambda\vec{u}\right).\vec{u}+2\varepsilon=0\rightarrow$$

$$\rightarrow\left(2\vec{x}+\lambda\vec{u}\right).\vec{u}+2\varepsilon=0\rightarrow 2\vec{x}\vec{u}+\lambda+2\varepsilon=0\rightarrow\lambda=-2\left(\vec{x}\vec{u}+\varepsilon\right)$$

$$\boxed{\vec{x}'=\vec{x}-2\left(\vec{x}.\vec{u}+\varepsilon\right).\vec{u}}$$

b) Aplicaremos la fórmula obtenida para la simetría especular. Se tiene:

$$\vec{x}=(3,1,0)\ ,\ 4x-4y+2z-1=0\rightarrow(4,-4,2)(x,y,z)-1=0\rightarrow\vec{m}=(x,y,z)\ ,$$

$$\vec{u}=\frac{(4,-4,2)}{\sqrt{4^2+(-4)^2+2^2}}=\left(\frac{4}{6},-\frac{4}{6},\frac{2}{6}\right)=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\ \varepsilon=-\frac{1}{6}$$

$$\vec{x}.\vec{u}=(3,1,0).\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}$$

$$\vec{x}.\vec{u}+\varepsilon=\frac{4}{3}-\frac{1}{6}=\frac{7}{6}\ ,\ 2\left(\vec{x}.\vec{u}+\varepsilon\right)\vec{u}=2\frac{7}{6}\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{14}{9},-\frac{14}{9},\frac{7}{9}\right)$$

$$\vec{x}'=\vec{x}-2\left(\vec{x}.\vec{u}+\varepsilon\right).\vec{u}=(3,1,0)-\left(\frac{14}{9},-\frac{14}{9},\frac{7}{9}\right)=\left(\frac{13}{9},\frac{23}{9},-\frac{7}{9}\right)$$

PROBLEMA 153 (070318)

Prueba que la gráfica del polinomio P(x) es simétrica respecto del punto $A(a,b)$ sí y sólo sí existe un polinomio Q tal que: $p(x)=b+(x-a)Q((x-a)^2)$ para todo $x\in R$

(Olimpiada Matemática Española, 2001. Murcia. Primera sesión)

RESOLUCIÓN:

Supongamos primero que exista el polinomio P que cumple las condiciones requeridas.

Sea $x=a-h$ ó $x=a+h$ Entonces:

$$\begin{cases} P(a-h)=b-hQ(h^2) \\ P(a+h)=b+hQ(h^2) \end{cases} \text{ y } \frac{P(a-h)+P(a+h)}{2}=b, \text{ para todo } h\in R.$$

Lo que significa que la gráfica de P es simétrica respecto del punto $A(a,b)$.

Sea $P(x)=P(a+h)=R(h)$

La condición $\dfrac{P(a-h)+P(a+h)}{2}=b$ es equivalente a $R(-h)+R(h)=2b$ porque $P(a-h)=R(-h)$.

Para $R(h)=a_0+a_1h+...+a_nh^n$ la condición anterior se escribe de la forma:

$$a_0+a_1h+...+a_nh^n+a_0-a_1h+a_2h^2-...+(-1)^n a_nh^n=2b$$

es decir $a_0+a_2h^2+...+a_mh^m=b$ para cada $h\in R,\ m=n, n\ par,\ m=n-1, n\ impar$

Se deduce que $a_2=a_4=...=a_m=0,\ a_0=b$

Por tanto ahora se tiene que

$R(h)=b+a_1h+a_3h^3+...=b+h(a_1+a_3h^2+a_5h^4+...)=b+h.Q(h^2)$

y así existe un polinomio Q tal que

$$R(h)=b+hQ\left(h^2\right)$$

Por último, como es $x=a+h\rightarrow h=x-a$:

$$p(x)=R(h)=b+(x-a)Q((x-a)^2)$$

PROBLEMA 152 (070218)

a) Demostrar que la propiedad de ser un espacio de Hausdorff es hereditaria, es decir, que todo subespacio de un espacio de Hausdorff es también espacio de Hausdorff.

b) Sea $\boldsymbol{T_R}$ la topología de la recta real $\boldsymbol{R}$ generada por los intervalos abiertos-cerrados ***(a,b]***. Demostrar que $\boldsymbol{(R,T_R)}$ es un espacio de Hausdorff.

RESOLUCIÓN:

a) La definición de Espacio de Hausdorff es:

$$\left(H,T_H\right) \, Esp.\, Hausdorff \leftrightarrow \forall a,b \in H, \exists A,B \in T_H \,/\, (a \in A, b \in B) \wedge A \cap B = \phi$$

Sea $\left(X,T_X\right)$ subespacio topológico de $\left(H,T_H\right)$, y sean $a,b \in X \subseteq H$. La topología relativa en X se obtiene como intersección de X con los abiertos de $\left(H,T_H\right)$:

$$T_X = \left\{X \cap A \,/\, A \in T_H\right\}$$

Por tanto:

$$\left(H,T_H\right) \, Esp.\, Hausdorff \leftrightarrow \forall a,b \in X \subseteq H, \exists A,B \in T_H \,/\, (a \in A, b \in B) \wedge A \cap B = \phi \to$$

$$\to a \in X \cap A, b \in X \cap B \wedge \left(X \cap A\right) \cap \left(X \cap B\right) = X \cap (A \cap B) = X \cap \phi = \phi \to$$

$$\to \left(X,T_X\right) \, Esp.\, Hausdorff$$

b) La topología considerada en R es $T_R = \left\{(a,b] \,/\, a,b \in R\right\}$

Veamos que $\forall a,b \in R, \exists A,B \in T_R \,/\, (a \in A, b \in B) \wedge A \cap B = \phi$:

Sea, por ejemplo, $a < b$. Basta elegir los abiertos $A = \left(a-1,a\right], B = \left(a,b\right]$, pues obviamente, $(a \in A, b \in B) \wedge A \cap B = \phi$. Si fuera $b < a$ sería igual, intercambiando ambos elementos, $A = \left(b,a\right], B = \left(b-1,b\right]$. Luego

$$\forall a,b \in R, \exists A,B \in T_R \,/\, (a \in A, b \in B) \wedge A \cap B = \phi \to \left(R,T_R\right) \, Esp.\, Hausdorff$$

PROBLEMA 151 (100118)

Resuélvase la integral triple

$$\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}}$$

RESOLUCIÓN:

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}} = 2\left(z+(x+y+1)\right)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1 = 2(\sqrt{x+y+2}-\sqrt{x+y+1})$$

$$\int_0^1 2(\sqrt{x+y+2}-\sqrt{x+y+1})dy = 2.\frac{2}{3}(y+(x+2))^{\frac{3}{2}} - 2.\frac{2}{3}(y+(x+1))^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{4}{3}\left[(x+3)^{\frac{3}{2}}-(x+2)^{\frac{3}{2}}-(x+2)^{\frac{3}{2}}+(x+1)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{4}{3}\left[(x+3)^{\frac{3}{2}}-2(x+2)^{\frac{3}{2}}+(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$\int_0^1 \frac{4}{3}\left[(x+3)^{\frac{3}{2}}-2(x+2)^{\frac{3}{2}}+(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]dx = \frac{8}{15}\left[(x+3)^{\frac{5}{2}}-2(x+2)^{\frac{5}{2}}+(x+1)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{8}{15}\left[(4^{\frac{5}{2}}-2.3^{\frac{5}{2}}+2^{\frac{5}{2}})-(3^{\frac{5}{2}}-2.2^{\frac{5}{2}}+1)\right] = \frac{8}{15}\left[2^5-3^3.3^{\frac{1}{2}}+3.2^2.2^{\frac{1}{2}}-1\right] =$$

$$= \frac{8}{15}\left[31-27.\sqrt{3}+12\sqrt{2}\right]$$