RESOLVIENDO PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 143 (310517)

Mediante el Algoritmo de Euclides, obténgase el Máximo Común Divisor de los números **25905** y **12405**. Obténgase también el Mínimo Común Múltiplo.

RESOLUCIÓN:

a) Cálculo del MCD(25905, 12405):

	2	11	3	24	cocientes
25905	12405	1095	360	15	
1095	1455	15	60		restos
	360		0		

Por tanto, el 15 es el número divisor al que corresponde el resto cero.

MCD(25905,12405)=15

b) Cálculo del MCM(25905,12405):

Por ser, para dos números cualesquiera, MCD(a,b).MCM(a,b)=a.b, se tiene que

MCM(25905,12405) =25905.12405 / MCD(25905,12405) =25905.12405/15 =
=21423435

MCM(25905,12405)=21423435

PROBLEMA 142 (030517)

Sea *(G,+)* un grupo aditivo abeliano. Se pide:

a) Probar que para dos elementos, *x* e *y*, cualesquiera de *G*, se verifica que el opuesto de *x+y* es – *x* - *y*.
b) Demostrar que si *H* es subgrupo de *G*, entonces *G/H* es grupo abeliano.
c) Sea *n* un número entero. Probar que para dos elementos, *x* e *y*, cualesquiera de G se verifica que *n.(x+y)=n.x+n.y*.

RESOLUCIÓN:

a) $(x+y)+(-x-y)=(x+y+(-x))+(-y)=(x+(-x)+y)+(-y)=(0+y)+(-y)=$

$=y+(-y)=0$

$$\forall x,y\in G,\ -(x+y)=-x-y$$

b) $\forall x,y\in G\to x+H,y+H\in G/H\to$

$\to(x+H)+(y+H)=(x+y)+H=(y+x)+H=(y+H)+(x+H)$

O sea: $\forall(x+H),(y+H)\in G/H,\ (x+H)+(y+H)=(y+H)+(x+H)$

c) 1. Si es $n=0$:

$$\left.\begin{array}{l} n.(x+y)=0.(x+y)=0 \\ n.x=0.x=0,\ n.y=0.y=0 \end{array}\right\}\to n.(x+y)=n.x+n.y=0,\ \forall x,y\in G$$

2. Si es $n>0$:

Procedemos por inducción:

- para $n=1\to 1.(x+y)=x+y=1.x+1.y$. Se verifica.
- para $n>1\to\exists m\in N/n=m+1,\ \ (m>0)$. Supongamos la expresión cierta para *m* y veamos que entonces ha de ser cierta para *m+1*. Se tendrá:

$$n(x+y)=(m+1).(x+y)=m.(x+y)+1.(x+y)=m.x+m.y+1.x+1.y=$$
$$=(m.x+1.x)+(m.y+1.y)=(m+1).x+(m+1).y=n.x+n.y$$

Por tanto: $\forall x,y\in G,\forall n\in Z^{+},\ n.(x+y)=n.x+n.y$

3. Si es $n<0$:

Hacemos $n=-m\ (m>0)$:

$$n.(x+y)=(-m).(x+y)=m.(-1).(x+y)=m.(-(x+y))=m.(-x-y)=$$
$$=m.\left[(-x)+(-y)\right]=m.(-x)+m.(-y)=(-m.x)+(-m.y)=(-m).x+(-m).y=$$
$$=m.\left[(-x)+(-y)\right]=m.(-x)+m.(-y)=(-m.x)+(-m.y)=(-m).x+(-m).y=$$

Por tanto: $\forall x,y\in G,\forall n\in Z^{-},\ n.(x+y)=n.x+n.y$

En definitiva, de 1., 2. Y 3.: $\forall x,y\in G,\forall n\in Z,\ n.(x+y)=n.x+n.y$

PROBLEMA 141 (050417)

Se desea obtener el punto de la gráfica de la función

$$f(x)=\frac{x^2}{4}-2x$$

en el que la recta tangente es paralela a la recta de ecuación

$$3x-2y+1=0$$

RESOLUCIÓN:

Pendiente de la recta tangente en $x=x_0$:

$$m=f'(x_0)=\frac{1}{2}x_0-2$$

Pendiente de la recta dada:

$$3x-2y+1=0\rightarrow y=\frac{3}{2}x+1\rightarrow pend=\frac{3}{2}$$

Si la recta tangente es paralela a la recta dada han de tener ambas la misma pendiente, luego:

$$\frac{1}{2}x_0-2=\frac{3}{2}\rightarrow x_0=7$$

El punto de la gráfica pedido es $\left(7,f(7)\right)$. Y como es $f(7)=\frac{7^2}{4}-2.7=-\frac{7}{4}$, se tiene, finalmente que el punto es

$$\left(7,-\frac{7}{4}\right)$$

PROBLEMA 140 (080317)

Estudiar la continuidad de

a) $f_1(x)=+\sqrt{x^2-3x+2},\ \forall x\in R$

b) $f_2(x)=L(\cos x),\ en\left[0,2\right]$

c) $f_3(x)=\sqrt{\pi^2-x^2}.tgx,\ \forall x\in R$

RESOLUCIÓN:

a) $f_1(x)=+\sqrt{x^2-3x+2}$

$$x^2-3x+2=0\to x_1=1,x_2=2$$

y se tiene que

$$x\le 1\to x^2-3x+2\ge 0$$

$$1<x<2\to x^2-3x+2<0$$

$$x\ge 2\to x^2-3x+2\ge 0$$

La función existe en $R-(1,2)$

$$\forall x\in R-(1,2),\ f_1(x+0)=+\lim_{h\to 0}\sqrt{(x+h)^2-3(x+h)+2}=+\sqrt{x^2-3x+2}=f_1(x)$$

$$\forall x\in R-(1,2),\ f_1(x-0)=+\lim_{h\to 0}\sqrt{(x-h)^2-3(x-h)+2}=+\sqrt{x^2-3x+2}=f_1(x)$$

O sea, $f_1(x+0)=f_1(x-0)=f_1(x)$, por lo que $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f_1(x+\Delta x)=f_1(x)$

La función existe y es continua en $R-(1,2)$.

b) $f_2(x)=L(\cos x)$

La función no existe si $\cos x\le 0\to\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{3\pi}{2}$, es decir, solo existe en $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$$\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right),\ f_2(x+0)=+\lim_{h\to 0}L(\cos(x+h))=L(\cos x)=f_2(x)$$

$$\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right),\ f_2(x-0)=+\lim_{h\to 0}L(\cos(x-h))=L(\cos x)=f_2(x)$$

O sea, $f_2(x+0)=f_2(x-0)=f_2(x)$, por lo que $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f_2(x+\Delta x)=f_2(x)$

La función existe y es continua en $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

c) $f_3(x)=\sqrt{\pi^2-x^2}.tgx$

$\pi^2-x^2=0\to x=\pm\pi$

y se tiene que

$f_3(x)$ no existe para $x<-\pi,x>\pi$.

Si $x=\pm\pi$ es $tg(\pm\pi)=\pm\infty$ y $f_3(x)$ no está definida.

Campo de existencia: $(-\pi,\pi)$

Y se cumple que $f_3(x+0)=f_3(x-0)=f_3(x)$, por lo que $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f_3(x+\Delta x)=f_3(x)$

La función existe y es continua en $(-\pi,\pi)$.

PROBLEMA 139 (080217)

Calcúlese por medio de una integral definida

$$A = \lim a_n$$

siendo (a_n) la sucesión cuyo término general es

$$a_n = \sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n}\right)\left(1+\frac{6}{n}\right)...\left(1+\frac{2n}{n}\right)}$$

RESOLUCIÓN:

$$A = \lim a_n \to LA = L(\lim a_n) = \lim(La_n) = \lim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} L\left(1+2\frac{k}{n}\right)$$

haciendo $\frac{k}{n} = x_k$ será $\Delta x_k = \frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} = \frac{1}{n}$, por lo cual:

$$A = \lim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} L\left(1+2\frac{k}{n}\right) = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} L\left(1+2x_k\right)\Delta x_k = \int_0^1 L(1+2x).dx$$

hacemos un cambio de variables y a continuación integramos por partes:

$$h = 1+2x,\ dx = \frac{1}{2}dh \to A = \int_0^1 L(1+2x).dx = \frac{1}{2}\int_1^3 Lh.dh$$

integrando por partes:

$$\frac{1}{2}\int_1^3 Lh.dh = \frac{1}{2}\left[h.Lh\right]_1^3 - \frac{1}{2}h\Big|_1^3 = \frac{1}{2}(L3^3 - 2) = \frac{1}{2}(L3^3 - Le^2) = \frac{1}{2}L\frac{3^3}{e^2} = L\sqrt{\frac{3^3}{e^2}} = \frac{3\sqrt{3}}{e}$$

Resultado:

$$A = \frac{3\sqrt{3}}{e}$$

PROBLEMA 138 (110117)

La gráfica de $y^2+2xy+40|x|=400$ divide al plano en varias regiones una de las cuales está acotada. Calcula el área de esa región.

RESOLUCIÓN:

Si $x\geq 0$, la función es $y^2+2xy+40x=400$, es decir , $y^2-400=-2x(y+20)$ que es equivalente a $(y+20)(y-20)+2x(y+20)=0 \to (y+20)(y-20+2x)=0$, que corresponde a las dos rectas

$$\begin{cases} y=-20 \\ y=-2x+20 \end{cases}$$

Si $x<0$, tendríamos la función $y^2+2xy-40x=400$, y por tanto es $y^2-400=-2x(y-20)$. O sea,

$(y+20)(y-20)+2x(y-20)=0 \to (y-20)(y+20+2x)=0$, que corresponde a las rectas

$$\begin{cases} y=20 \\ y=-2x-20 \end{cases}$$

La grafica de la función dada es la siguiente, donde se observa que la región acotada es el paralelogramo de base 20 y altura 40. El área es, por tanto, 800.