

## RESOLVIENDO PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

### RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

#### PROBLEMA 157 (270618)

Sea  $x$  un elemento nilpotente de un anillo  $A$  ( $x^n=0$  para algún número natural  $n$ ). Probar que  $1+x$  es una unidad de  $A$  (un elemento inversible en  $A$ ). Deducir que la suma de un elemento nilpotente y una unidad es también una unidad en  $A$ .

#### RESOLUCIÓN:

$$x \in A \text{ nilpotente en } A \rightarrow \exists n \in \mathbb{N} - \{0\} / x^n = 0$$

$$u \in A \text{ unidad en } A \rightarrow \exists u^{-1} \in A / u \cdot u^{-1} = u^{-1} \cdot u = 1$$

a)

$$u = 1 + x \rightarrow x = u - 1 \rightarrow \exists n \in \mathbb{N} - \{0\} / x^n = (u - 1)^n = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow (u - 1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u^{n-k} = 0 \rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^{n-k} + 1 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^{n-k} = -1 \rightarrow -\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^{n-k} = 1 \rightarrow u \left[ -\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^{n-k-1} \right] = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[ -\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^{n-k-1} \right] = u^{-1} \rightarrow u \text{ inversible} \rightarrow u = 1 + x \text{ es unidad en } A.$$

b)

$$w = u + x \rightarrow x = w - u \rightarrow \exists n \in \mathbb{N} - \{0\} / x^n = (w - u)^n = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \sum_{k=0}^n (-1)^k u^k w^{n-k} = 0 \rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^k w^{n-k} + 1 = 0 \rightarrow -\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^k w^{n-k} = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow w \left[ -\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^k w^{n-k-1} \right] = 1 \rightarrow w^{-1} = -\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^k w^{n-k-1} \rightarrow w = u + x \text{ inversible}$$

por tanto,  $w = u + x$  es unidad en  $A$

**PROBLEMA 156 (300518)**

Determinar la tangente, normal principal y binormal a la curva

$$\begin{cases} x = 2t^2 - 1 \\ y = 1 - t \\ z = t^2 \end{cases}$$

en el punto (1,0,1)

**RESOLUCIÓN:**

Vectores:

$$\text{tangente: } \vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Big/ \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|, \quad \text{normal: } \vec{n} = \frac{d\vec{\tau}}{dt} \Big/ \left| \frac{d\vec{\tau}}{dt} \right|, \quad \text{binormal: } \vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{n}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (4t, -1, 2t), \quad \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = (4, 0, 2), \quad \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \sqrt{16t^2 + 1 + 4t^2}, \quad \left| \frac{d\vec{\tau}}{dt} \right| = \sqrt{4^2 + 0 + 2^2} = \sqrt{20}$$

$$\text{en el punto (1,0,1) es } t=1, \text{ con lo cual } \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \sqrt{16t^2 + 1 + 4t^2} = \sqrt{16 + 1 + 4} = \sqrt{21}$$

por tanto:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Big/ \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \frac{1}{\sqrt{21}} (4, -1, 2) = \left( \frac{4\sqrt{21}}{21}, -\frac{\sqrt{21}}{21}, \frac{2\sqrt{21}}{21} \right),$$

$$\vec{n} = \frac{d\vec{\tau}}{dt} \Big/ \left| \frac{d\vec{\tau}}{dt} \right| = \frac{1}{\sqrt{20}} (4, 0, 2) = \left( \frac{\sqrt{20}}{5}, 0, \frac{\sqrt{20}}{10} \right)$$

$$\vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{4\sqrt{21}}{21} & -\frac{\sqrt{21}}{21} & \frac{2\sqrt{21}}{21} \\ \frac{\sqrt{20}}{5} & 0 & \frac{\sqrt{20}}{10} \end{vmatrix} = \left( -\frac{\sqrt{410}}{210}, 0, \frac{\sqrt{410}}{105} \right)$$

$$\text{Recta tangente: } \frac{x-1}{\frac{4\sqrt{21}}{21}} = \frac{y-0}{-\frac{\sqrt{21}}{21}} = \frac{z-1}{\frac{2\sqrt{21}}{21}},$$

$$\text{Recta normal: } \frac{x-1}{\frac{\sqrt{20}}{5}} = \frac{z-1}{\frac{\sqrt{20}}{10}}$$

$$\text{Recta binormal: } \frac{x-1}{-\frac{\sqrt{410}}{210}} = \frac{z-1}{\frac{\sqrt{410}}{105}}$$

Simplificando:

$$\text{Recta tangente} \rightarrow \frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

$$\text{Recta normal principal} \rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{z-1}{1}$$

$$\text{Recta binormal} \rightarrow \frac{x-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

**PROBLEMA 155 (020518)**

Se representa por  $Z$  el conjunto de todos los enteros. Hallar todas las funciones

$$f: Z \rightarrow Z$$

tales que para cualesquiera  $x, y$  enteros se verifica:

$$f(x + f(y)) = f(x) - y$$

Olimpiada Matemática Española. Fase Nacional 2004 (Ciudad Real). Primera sesión

**RESOLUCIÓN:**

Por inducción podemos comprobar que  $\forall n \in Z, f(x + n \cdot f(y)) = f(x) - n \cdot y$ , ya que

$$1) f(x + 0 \cdot f(y)) = f(x) + 0 \cdot y$$

$$2) f(x + 1 \cdot f(y)) = f(x) - 1 \cdot y$$

3) Si suponemos la fórmula cierta para  $n = k \geq 0$ ,

$\forall n \in Z, f(x + k \cdot f(y)) = f(x) - k \cdot y$ , vemos que entonces ha de ser cierta para  $k + 1$ :

$$\begin{aligned} f(x + (k+1) \cdot f(y)) &= f(x + k \cdot f(y) + f(y)) = f(x + k \cdot f(y)) - y = \\ &= f(x) - k \cdot y - y = f(x) - (k+1) \cdot y \end{aligned}$$

Para  $n = k \leq -1$  se comprueba igual.

Ahora bien, vemos que llamando  $A = 1 + f(1) \cdot f(1) = 1 + f(1)^2 > 0$

$$\text{es } f(A) = f(1 + f(1) \cdot f(1)) = f(1) - f(1) \cdot 1 = 0$$

Pero entonces:

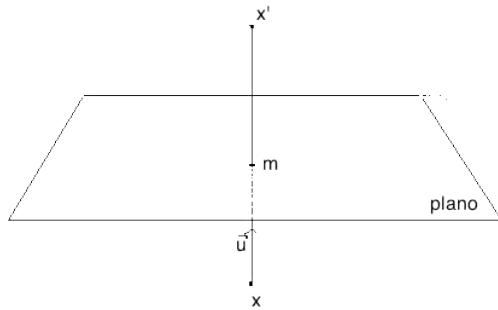
$$f(x) = f(x + f(A)) = f(x) - A \rightarrow A = 0$$

lo que implica contradicción ( $A > 0$  y  $A = 0$ ).

Es decir, no existen las funciones que puedan satisfacer la condición pedida.

**PROBLEMA 154 (030418)**

- a) Obténgase la fórmula vectorial de una simetría especular en el espacio  $E_3$ .  
 b) Hállese el punto especularmente simétrico del punto  $(3,1,0)$  respecto al plano  $4x - 4y + 2z - 1 = 0$ .

**RESOLUCIÓN:**

$$\text{Plano: } 4x - 4y + 2z - 1 = 0$$

$\vec{u}$ : vector unitario normal al plano.

$\vec{m}$ : vector de posición de un punto cualquiera del plano.

Ecuación vectorial del plano:

$$\vec{m} \cdot \vec{u} + \varepsilon = 0$$

a) Se tiene:

$$\vec{m} = \frac{\vec{x} + \vec{x}'}{2} \in \text{plano} \quad \vec{x}' = \vec{x} + \lambda \vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}$$

sustituyendo en la ecuación vectorial del plano:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{x} + \vec{x}'}{2} \cdot \vec{u} + \varepsilon = 0 &\rightarrow (\vec{x} + \vec{x}') \cdot \vec{u} + 2\varepsilon = 0 \rightarrow (\vec{x} + \vec{x} + \lambda \vec{u}) \cdot \vec{u} + 2\varepsilon = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow (2\vec{x} + \lambda \vec{u}) \cdot \vec{u} + 2\varepsilon = 0 \rightarrow 2\vec{x} \cdot \vec{u} + \lambda + 2\varepsilon = 0 \rightarrow \lambda = -2(\vec{x} \cdot \vec{u} + \varepsilon) \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{x}' = \vec{x} - 2(\vec{x} \cdot \vec{u} + \varepsilon) \cdot \vec{u}}$$

b) Aplicaremos la fórmula obtenida para la simetría especular. Se tiene:

$$\vec{x} = (3, 1, 0), \quad 4x - 4y + 2z - 1 = 0 \rightarrow (4, -4, 2)(x, y, z) - 1 = 0 \rightarrow \vec{m} = (x, y, z),$$

$$\vec{u} = \frac{(4, -4, 2)}{\sqrt{4^2 + (-4)^2 + 2^2}} = \left(\frac{4}{6}, -\frac{4}{6}, \frac{2}{6}\right) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad \varepsilon = -\frac{1}{6}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{u} = (3, 1, 0) \cdot \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{u} + \varepsilon = \frac{4}{3} - \frac{1}{6} = \frac{7}{6}, \quad 2(\vec{x} \cdot \vec{u} + \varepsilon) \vec{u} = 2 \cdot \frac{7}{6} \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{14}{9}, -\frac{14}{9}, \frac{7}{9}\right)$$

$$\vec{x}' = \vec{x} - 2(\vec{x} \cdot \vec{u} + \varepsilon) \cdot \vec{u} = (3, 1, 0) - \left(\frac{14}{9}, -\frac{14}{9}, \frac{7}{9}\right) = \left(\frac{13}{9}, \frac{23}{9}, -\frac{7}{9}\right)$$

**PROBLEMA 153 (070318)**

Prueba que la gráfica del polinomio  $P(x)$  es simétrica respecto del punto  $A(a, b)$  sí y sólo sí existe un polinomio  $Q$  tal que:  $p(x) = b + (x - a)Q((x - a)^2)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$

(Olimpiada Matemática Española, 2001. Murcia. Primera sesión)

**RESOLUCIÓN:**

Supongamos primero que exista el polinomio  $P$  que cumple las condiciones requeridas.

Sea  $x = a - h$  ó  $x = a + h$  Entonces:

$$\begin{cases} P(a - h) = b - hQ(h^2) \\ P(a + h) = b + hQ(h^2) \end{cases} \text{ y } \frac{P(a - h) + P(a + h)}{2} = b, \text{ para todo } h \in \mathbb{R}.$$

Lo que significa que la gráfica de  $P$  es simétrica respecto del punto  $A(a, b)$ .

Sea  $P(x) = P(a + h) = R(h)$

La condición  $\frac{P(a - h) + P(a + h)}{2} = b$  es equivalente a  $R(-h) + R(h) = 2b$  porque

$$P(a - h) = R(-h).$$

Para  $R(h) = a_0 + a_1h + \dots + a_nh^n$  la condición anterior se escribe de la forma:

$$a_0 + a_1h + \dots + a_nh^n + a_0 - a_1h + a_2h^2 - \dots + (-1)^n a_nh^n = 2b$$

es decir  $a_0 + a_2h^2 + \dots + a_mh^m = b$  para cada  $h \in \mathbb{R}$ ,  $m = n$ ,  $n$  par,  $m = n - 1$ ,  $n$  impar

Se deduce que  $a_2 = a_4 = \dots = a_m = 0$ ,  $a_0 = b$

Por tanto ahora se tiene que

$$R(h) = b + a_1h + a_3h^3 + \dots = b + h(a_1 + a_3h^2 + a_5h^4 + \dots) = b + h.Q(h^2)$$

y así existe un polinomio  $Q$  tal que

$$R(h) = b + hQ(h^2)$$

Por último, como es  $x = a + h \rightarrow h = x - a$ :

$$p(x) = R(h) = b + (x - a)Q((x - a)^2)$$

**PROBLEMA 152 (070218)**

- a) Demostrar que la propiedad de ser un espacio de Hausdorff es hereditaria, es decir, que todo subespacio de un espacio de Hausdorff es también espacio de Hausdorff.
- b) Sea  $T_R$  la topología de la recta real  $R$  generada por los intervalos abiertos-cerrados  $(a,b]$ . Demostrar que  $(R, T_R)$  es un espacio de Hausdorff.

**RESOLUCIÓN:**

- a) La definición de Espacio de Hausdorff es:

$$(H, T_H) \text{ Esp. Hausdorff} \Leftrightarrow \forall a, b \in H, \exists A, B \in T_H / (a \in A, b \in B) \wedge A \cap B = \phi$$

Sea  $(X, T_X)$  subespacio topológico de  $(H, T_H)$ , y sean  $a, b \in X \subseteq H$ . La topología relativa en  $X$  se obtiene como intersección de  $X$  con los abiertos de  $(H, T_H)$ :

$$T_X = \{X \cap A / A \in T_H\}$$

Por tanto:

$$(H, T_H) \text{ Esp. Hausdorff} \Leftrightarrow \forall a, b \in X \subseteq H, \exists A, B \in T_H / (a \in A, b \in B) \wedge A \cap B = \phi \rightarrow$$

$$\rightarrow a \in X \cap A, b \in X \cap B \wedge (X \cap A) \cap (X \cap B) = X \cap (A \cap B) = X \cap \phi = \phi \rightarrow$$

$$\rightarrow (X, T_X) \text{ Esp. Hausdorff}$$

- b) La topología considerada en  $R$  es  $T_R = \{(a,b] / a, b \in R\}$

$$\text{Veamos que } \forall a, b \in R, \exists A, B \in T_R / (a \in A, b \in B) \wedge A \cap B = \phi :$$

Sea, por ejemplo,  $a < b$ . Basta elegir los abiertos  $A = (a-1, a]$ ,  $B = (a, b]$ , pues obviamente,  $(a \in A, b \in B) \wedge A \cap B = \phi$ . Si fuera  $b < a$  sería igual, intercambiando ambos elementos,  $A = (b, a]$ ,  $B = (b-1, b]$ . Luego

$$\forall a, b \in R, \exists A, B \in T_R / (a \in A, b \in B) \wedge A \cap B = \phi \rightarrow (R, T_R) \text{ Esp. Hausdorff}$$

**PROBLEMA 151 (100118)**

Resuélvase la integral triple

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}}$$

**RESOLUCIÓN:**

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}} = 2(z+(x+y+1))^{\frac{1}{2}} \Big|_0^1 = 2(\sqrt{x+y+2} - \sqrt{x+y+1})$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 2(\sqrt{x+y+2} - \sqrt{x+y+1}) dy &= 2 \cdot \frac{2}{3} (y+(x+2))^{\frac{3}{2}} - 2 \cdot \frac{2}{3} (y+(x+1))^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \\ &= \frac{4}{3} \left[ (x+3)^{\frac{3}{2}} - (x+2)^{\frac{3}{2}} - (x+2)^{\frac{3}{2}} + (x+1)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{4}{3} \left[ (x+3)^{\frac{3}{2}} - 2(x+2)^{\frac{3}{2}} + (x+1)^{\frac{3}{2}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{4}{3} \left[ (x+3)^{\frac{3}{2}} - 2(x+2)^{\frac{3}{2}} + (x+1)^{\frac{3}{2}} \right] dx &= \frac{8}{15} \left[ (x+3)^{\frac{5}{2}} - 2(x+2)^{\frac{5}{2}} + (x+1)^{\frac{5}{2}} \right] \Big|_0^1 = \\ &= \frac{8}{15} \left[ (4^{\frac{5}{2}} - 2 \cdot 3^{\frac{5}{2}} + 2^{\frac{5}{2}}) - (3^{\frac{5}{2}} - 2 \cdot 2^{\frac{5}{2}} + 1) \right] = \frac{8}{15} \left[ 2^5 - 3^3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} + 3 \cdot 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} - 1 \right] = \\ &= \frac{8}{15} [31 - 27\sqrt{3} + 12\sqrt{2}] \end{aligned}$$