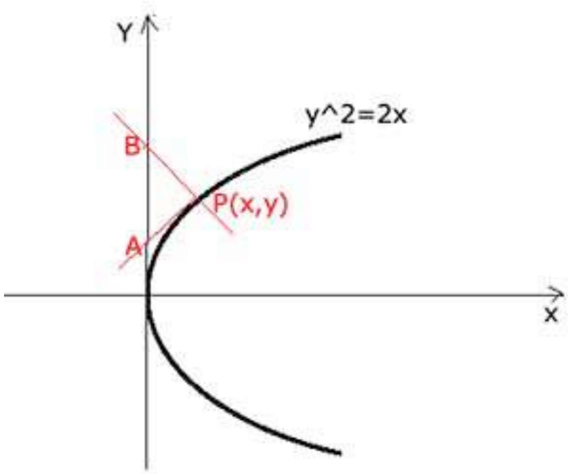
RESOLVIENDO PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 170 (240719)

Dada una parábola de ecuación $y^2 = 2x$, la tangente en un punto *P* corta al eje de ordenadas en *A*, y la normal, también en *P*, corta a dicho eje en un punto *B*. Determinar la ecuación del lugar geométrico que describe el baricentro del triángulo *PAB* cuando el punto *B* describe la parábola.

RESOLUCIÓN:



$$y^2 = 2x \rightarrow 2yy' = 2 \rightarrow y' = 1/y$$

a) Rectas tangente y normal en P(x_0,y_0):

tangente:

$$y - y_0 = \frac{1}{y_0}(x - x_0) \rightarrow y = \frac{1}{y_0}x + y_0 - \frac{x_0}{y_0}$$

Normal:

$$y - y_0 = -y_0(x - x_0) \rightarrow y = -y_0 x + y_0 + x_0 y_0$$

b) Puntos A y B:

Punto A: Hacemos x=0 en la recta tangente

$$y = \frac{1}{y_0}0 + y_0 - \frac{x_0}{y_0} = \frac{y_0^2 - x_0}{y_0} \rightarrow A\left(0, \frac{y_0^2 - x_0}{y_0}\right)$$

Punto B: Hacemos x=0 en la recta normal

$$y = -y_0.0 + y_0 + x_0 y_0 = y_0(1 + x_0) \rightarrow B\left(0, y_0(1 + x_0)\right)$$

c) Determinamos el baricentro:

$$(x_g, y_g) = \left(\frac{0+0+x_0}{3}, \frac{(y_0^2 - x_0)/y_0 + y_0(1+x_0) + y_0}{3}\right) = \left(\frac{x_0}{3}, \frac{y_0^2 - x_0 + y_0^2(1+x_0) + y_0^2}{3y_0}\right) =$$

$$= \left(\frac{x_0}{3}, \frac{y_0^2(3+x_0) - x_0}{3y_0}\right) = \left(\frac{x_0}{3}, \frac{y_0^2(3+x_0) - x_0}{3y_0}\right) = \left(\frac{x_0}{3}, \frac{2x_0(3+x_0) - x_0}{3y_0}\right) = \left(\frac{x_0}{3}, \frac{5x_0 + 2x_0^2}{3y_0}\right)$$

Veamos la relación entre la abcisa y la ordenada del baricientro:

$$y_g = \frac{5x_0 + 2x_0^2}{3y_0} = \frac{5(3x_g) + 2(3x_g)^2}{3y_0} = \frac{5x_g + 6x_g^2}{y_0} \rightarrow y_g^2 = \frac{25x_g^2 + 60x_g^3 + 36x_g^4}{y_0^2} =$$

$$= \frac{25x_g^2 + 60x_g + 36x_g^4}{2x_0} = \frac{25x_g^2 + 60x_g + 36x_g^4}{6x_g} = \frac{25x_g^2 + 60x_g^3 + 36x_g^4}{6x_g} = \frac{25x_g + 60x_g^2 + 36x_g^3}{6}$$

finalmente:

$$6y_g^2 = 36x_g^3 + 60x_g^2 + 25x_g$$

PROBLEMA 169 (260619)

a) Hallar las soluciones de la ecuación $e^z = 1$.

b) Probar que $\arg e^z = \mathrm{Im}(z) + 2k\pi, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$

c) Si ϕ es un número real cualquiera, encontrar todos los números reales θ tales que $e^{i\theta} = e^{i\phi}$.

RESOLUCIÓN:

a) $\left\{ \begin{array}{l} e^z = 1 \\ z = x + iy \end{array} \right. \rightarrow e^{x+iy} = 1 \rightarrow e^x . e^{iy} = 1 \rightarrow e^x(\cos y + i seny) = 1 \rightarrow$

$$\rightarrow e^x \cos y + ie^x seny = 1 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^x \cos y = 1 \\ ie^x seny = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} seny = 0 \\ \cos y = 1 \end{array} \right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...) \\ (-1)^n . e^x = 1 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = n\pi \\ (-1)^n . e^x = 1 \\ n \ par \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 2k\pi \\ e^x = 1 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 2k\pi \\ x = 0 \end{array} \right.$$

por tanto:

$$z = x + iy = 0 + i2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

Soluciones:

$$\boxed{\{i2k\pi\} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)}$$

b) $\left\{ \begin{array}{l} z = x + iy \\ e^z = \left|e^z\right| . e^{i \arg e^z} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^z = \left|e^z\right| . e^{i \arg e^z} = e^x . e^{i \arg e^z} \\ e^{iy} = \cos y + i seny \neq 0 \\ e^x \neq 0 \end{array} \right. \rightarrow e^{iy} = e^{i \arg e^z} \rightarrow$

$$\rightarrow 1 = e^{i(\arg e^z - y)} \rightarrow i(\arg e^z - y) = i2k\pi \rightarrow \arg e^z - y = 2k\pi \rightarrow \arg e^z = y + 2k\pi$$

Por tanto:

$$\boxed{\arg e^z = \mathrm{Im}(z) + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)}$$

c) $e^{i\theta} = e^{i\phi} \rightarrow e^{i\theta - i\phi} = 1 \rightarrow e^{i(\theta - \phi)} = 1 \rightarrow i(\theta - \phi) = i2k\pi \rightarrow \theta - \phi = 2k\pi \rightarrow \theta = \phi + 2k\pi$

$$\boxed{\theta = \phi + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)}$$

PROBLEMA 168 (290519)

a) Explíquese el concepto de ecuación diferencial de primer orden con variables separables, así como la manera de integrarla.

b) Si la ecuación

$$y' = -\frac{(x-1)^2 . y^{-1}}{e^{-y^2}}$$

es de tal tipo, intégrese.

RESOLUCIÓN:

a) Se trata de ecuaciones de la forma

$$f(x,y).dx + g(x,y).dy$$

donde ambas funciones de dos variables se pueden factorizar en la forma:

$$f(x,y) = f_1(x).f_2(y), \quad g(x,y) = g_1(x).g_2(y)$$

(se pueden separar las variables x e y)

entonces:

$$f(x,y).dx + g(x,y).dy = 0 \rightarrow f_1(x).f_2(y).dx + g_1(x).g_2(y).dy = 0$$

o bien:

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}.dx + \frac{g_2(y)}{f_2(y)}.dy = 0 \rightarrow \int \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.dx + C = \int \frac{g_2(y)}{f_2(y)}.dy$$

b) $y' = -\frac{(x-1)^2 . y^{-1}}{e^{-y^2}} \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{(x-1)^2 . y^{-1}}{e^{-y^2}} \rightarrow \frac{e^{-y^2}}{y^{-1}} dy = -(x-1)^2 .dx \rightarrow$

$$\rightarrow -\frac{e^{-y^2}}{y^{-1}} dy = (x^2 - 2x + 1).dx \rightarrow \frac{1}{2}\int -2ye^{-y^2} .dy = \int (x^2 - 2x + 1).dx \rightarrow$$

$$\rightarrow e^{-y^2} = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 2x + K$$

PROBLEMA 167 (010519)

Resolver las siguientes ecuaciones diofánticas:

c) $z^2 - y^2 = 17$

d) $z^2 - y^2 = 72$

e) $z^2 - y^2 = 6$

RESOLUCIÓN:

a) $z^2 - y^2 = 17 \rightarrow (z+y)(z-y) = 17$

Descomponemos el 17 en factores de igual paridad:

17=17.1

con lo cual:

$$\left.\begin{array}{r} z+y=17 \\ z-y=1 \end{array}\right\} \rightarrow z=9,\ y=8$$ Solución: (9,8)

b) $z^2 - y^2 = 72 \rightarrow (z+y)(z-y) = 72$

Descomponemos 72 en factores de igual paridad:

$72 = 36.2$

$72 = 18.4$

$72 = 12.6$

con lo cual:

$$\left.\begin{array}{r} z+y=36 \\ z-y=2 \end{array}\right\} \rightarrow z=19,\ y=17$$

$$\left.\begin{array}{r} z+y=18 \\ z-y=4 \end{array}\right\} \rightarrow z=11,\ y=7$$ Soluciones: (19,17), (11,7) y (9,3)

$$\left.\begin{array}{r} z+y=12 \\ z-y=6 \end{array}\right\} \rightarrow z=9,\ y=3$$

c) $z^2 - y^2 = 6 \rightarrow (z+y)(z-y) = 6$

Descomponemos 6 en factores de la misma paridad:

Imposible, pues las únicas descomposiciones que admite son 6=3.2 y 6=6.1, ambas de diferente paridad. Esta ecuación notiene solución.

PROBLEMA 166 (030419)

f) Expóngase la manera de resolver una ecuación diferencial lineal de 2º orden con coeficientes constantes y homogénea $py''+qy'+ry=0$.

g) Resolver $y''+2y'-3y=0$.

h) Resolver $y''+y=0$.

RESOLUCIÓN:

a) Sean λ_1,λ_2 las raíces, reales o complejas de la ecuación de 2º $p\lambda^2+q\lambda+r=0$.

Se tiene que las funciones $y=e^{\lambda_1 x}$, $y=e^{\lambda_2 x}$ son soluciones de la ecuación diferencial. Veamos:

$$y'=\lambda_1 e^{\lambda_1 x},\ y'=\lambda_2 e^{\lambda_2 x} \qquad\qquad y''=\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x},\ y''=\lambda_2^2 e^{\lambda_2 x}$$

entonces:

$$p\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x}+q\lambda_1 e^{\lambda_1 x},+re^{\lambda_1 x}=(p\lambda_1^2+q\lambda_1+r)e^{\lambda_1 x}=0.e^{\lambda_1 x}=0$$
$$p\lambda_2^2 e^{\lambda_2 x}+q\lambda_2 e^{\lambda_2 x},+re^{\lambda_2 x}=(p\lambda_2^2+q\lambda_2+r)e^{\lambda_2 x}=0.e^{\lambda_2 x}=0$$

La solución general es una combinación lineal de ambas: $y(x)=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$

b) $y''+2y'-3y=0$

$$\lambda^2+2\lambda-3=0\rightarrow\begin{cases}\lambda_1=1\\ \lambda_2=-3\end{cases}$$ Solución: $y(x)=C_1e^{x}+C_2e^{-3x}$

c) $y''+y=0$

$$\lambda^2+1=0\rightarrow\begin{cases}\lambda_1=i\\ \lambda_2=-i\end{cases}$$ Solución:

$$y(x)=C_1e^{ix}+C_2e^{-ix}=C_1(\cos x+isenx)+C_2(\cos x-isenx)=$$
$$=(C_1+C_2)\cos x+(C_1-C_2)isenx=K_1\cos x+K_2isenx$$

PROBLEMA 165 (060319)

Se considera el subconjunto P de R^n formado por todas las n-plas de números reales tales que los elementos de cada n-pla formen una progresión aritmética. Probar que P es un subespacio vectorial de R^n y determinar una base del mismo. Calcular, respecto a la base hallada, las coordenadas del vector (6,9,12,...,3n+3,...).

RESOLUCIÓN:

1) Para comprobar que es un subespacio de R^n, veamos que

$$\forall \vec{x},\vec{y} \in P, \forall \alpha,\beta \in R, \alpha\vec{x}+\beta\vec{y} \in P$$

como es, $\forall \vec{x},\vec{y} \in P$:

$$\vec{x} = \left(a, a+r, a+2r, ..., a+(n-1)r\right)$$

$$\vec{y} = \left(b, b+r', b+2r', ..., b+(n-1)r'\right)$$

será:

$$\alpha\vec{x}+\beta\vec{y} = \alpha\left(a, a+r, a+2r, ..., a+(n-1)r\right) + \beta\left(b, b+r', b+2r', ..., b+(n-1)r'\right) =$$

$$= \left(\alpha a+\beta b, \alpha a+\beta b+(\alpha r+\beta r'), \alpha a+\beta b+2(\alpha r+\beta r')+...+\alpha a+\beta b+(n-1)(\alpha r+\beta r')\right) \in P$$

2) Una base:

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = \left(0,1,2,...,n-1\right) \\ \vec{e}_2 = \left(1,2,3,...,n\right) \\ \vec{e}_3 = \left(2,3,4,...,n+1\right) \\ \text{... ... ...} \\ \vec{e}_n = \left(n-1,n,n+1,...,2n+2\right) \end{cases}$$

3) Coordenadas del vector (6,9,12,..., 3n+3) en la base $\left\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,...,\vec{e}_n\right\}$:

$$(6,9,12,...,3n+3) = \alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+\alpha_3\vec{e}_3+...+\alpha_n\vec{e}_n = \alpha_1(0,1,2,...,n-1)+$$

$$+\alpha_2(1,2,3,...,n)+\alpha_3(2,3,4,...,n+1)+...+\alpha_n(n-1,n,n+1,...,2n+2)$$

identificando:

$$6 = \alpha_1.0+\alpha_2.1+\alpha_3.2+...+\alpha_n(n-1)$$

$$9 = \alpha_1.1+\alpha_2.2+\alpha_3.3+...+\alpha_n.n$$

$$12 = \alpha_1.2+\alpha_2.3+\alpha_3.4+...+\alpha_n.(n+1)$$

... ...

$$3n+3 = \alpha_1.(n-1)+\alpha_2.n+\alpha_3.(n+1)+...+\alpha_n.(2n+2)$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 12 \\ ... \\ 3n+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & ... & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & ... & n \\ 2 & 3 & 4 & ... & n+1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ n-1 & n & n+1 & ... & 2n+2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ ... \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

De donde despejamos las coordenadas buscadas:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ ... \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & ... & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & ... & n \\ 2 & 3 & 4 & ... & n+1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ n-1 & n & n+1 & ... & 2n+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 12 \\ ... \\ 3n+3 \end{bmatrix}$$

PROBLEMA 165 (060219)

1) Deducir la expresión cartesiana del plano tangente a la superficie F(x,y,z)=0 en el punto (x_0,y_0,z_0) de la misma.
2) Deducir la expresión cartesiana de la recta normal a la superficie en dicho punto (x_0,y_0,z_0).
3) Encontrar las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a la superficie $x^2yz+3y^2=2xz^2-8z$ en el punto (1,2,-1).

RESOLUCIÓN:

1) Si es $\vec{r}=(x,y,z)$ un punto del plano tangente en $\vec{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$ serán ortogonales los vectores $\vec{r}-\vec{r}_0$ y $\vec{\nabla}F\Big|_0=\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_0+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_0+\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_0$:

$$(\vec{r}-\vec{r}_0).\vec{\nabla}F\Big|_0=\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_0(x-x_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_0(y-y_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_0(z-z_0)=0$$

$$\boxed{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_0(x-x_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_0(y-y_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_0(z-z_0)=0}$$

2) Se tiene que si es ahora $\vec{r}=(x,y,z)$ un punto de la recta normal al plano tangente en $\vec{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$ serán serán paralelos los vectores $\vec{r}-\vec{r}_0$ y $\vec{\nabla}F\Big|_0=\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_0+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_0+\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_0$:

$$(\vec{r}-\vec{r}_0)x\vec{\nabla}F\Big|_0=0\rightarrow\begin{vmatrix} i & j & k\\ x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z}\end{vmatrix}=0$$

$$\boxed{\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_0}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_0}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_0}}$$

3) Se tiene $F=x^2yz+3y^2-2xz^2+8z=0$, $(x_0,y_0,z_0)=(1,2,-1)$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_0=2xyz-2z^2=-4-2=-6$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_0=x^2z+6y=11$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_0 = x^2 y - 4xz + 8 = 14$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_0 (x - x_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_0 (y - y_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_0 (z - z_0) = 0 \rightarrow (-6)(x-1) + 11(y-2) + 14(z+1) = 0$$

Plano tangente:

$$\boxed{6x - 11y - 14z + 2 = 0}$$

$$\frac{x - x_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_0} = \frac{y - y_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_0} = \frac{z - z_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_0} \rightarrow \frac{x-1}{-6} = \frac{y-2}{11} = \frac{z+1}{14}$$

Recta normal (ecs paramétricas):

$$\boxed{\begin{array}{c} x = 1 - 6t \\ y = 2 + 11t \\ z = -1 + 14t \end{array}}$$

PROBLEMA 164 (090119)

Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} 0 & -5<x<0 \\ 3 & 0<x<5 \end{cases} \quad (period=10)$$

1) Hallar los coeficientes de Fourier.
2) Escribir la correspondiente serie de Fourier.
3) ¿Cómo habría que definir f(x) en los puntos x=-5, x=0 y x=5 para que la serie de Fourier converja hacia f(x) en $-5\le x\le 5$?

RESOLUCIÓN:

La serie de Fourier

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n\ge 1}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n sen\frac{n\pi x}{L}\right)$$

donde es $2L$ el periodo de la función, tiene por coeficientes

$$a_n=\frac{1}{L}\int_c^{c+2L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,\quad b_n=\frac{1}{L}\int_c^{c+2L}f(x)sen\frac{n\pi x}{L}dx$$

1) $2L=10\rightarrow L=5: a_n=\frac{1}{5}\int_{-5}^{5}f(x)\cos\frac{n\pi x}{5}dx=\frac{1}{5}\int_{-5}^{0}0.\cos\frac{n\pi x}{5}dx+\frac{1}{5}\int_0^5 3.\cos\frac{n\pi x}{5}dx$

$$si\ n\ne 0: a_n=\frac{1}{5}3\frac{5}{n\pi}sen\frac{n\pi x}{5}\Big|_0^5=\frac{3}{n\pi}senn\pi=0,$$

$$si\ n=0: a_0=\frac{1}{5}\int_0^5 3\cos\frac{0.\pi x}{5}dx=\frac{1}{5}3x\Big|_0^5=3$$

$$b_n=\frac{1}{5}\int_{-5}^{5}f(x)\cos\frac{n\pi x}{5}dx=\frac{1}{5}\int_{-5}^{0}0sen\frac{n\pi x}{5}dx+\frac{1}{5}\int_0^5 3.sen\frac{n\pi x}{5}dx=\frac{3}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

2) Al sustituir coeficientes:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n\ge 1}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n sen\frac{n\pi x}{L}\right)=\frac{3}{2}+\sum_{n\ge 1}\left(0.\cos\frac{n\pi x}{L}+\frac{3}{n\pi}(1-\cos n\pi).sen\frac{n\pi x}{L}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}+\sum_{n\ge 1}\left(\frac{3}{n\pi}(1-\cos n\pi).sen\frac{n\pi x}{L}\right)=\frac{3}{2}+\frac{6}{\pi}sen\frac{\pi x}{5}+\frac{6}{3\pi}sen\frac{3\pi x}{5}+\frac{6}{5\pi}sen\frac{5\pi x}{5}+\ldots$$

3) La serie cumplirá las condiciones de Dirichlet si converge en los puntos de discontinuidad hacia $(f(x+0)-f(x-0))/2=(3+0)/2=3/2$. Por tanto, bastará redefinir la función en la forma:

$$f(x)=\begin{cases} 3/2 & x=-5 \\ 0 & -5<x<0 \\ 3/2 & x=0 \\ 0 & 0<x<5 \\ 3/2 & x=5 \end{cases}$$