

RESOLVIENDO PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 145 (260717)

Para la variable aleatoria ξ de contradominio $[\xi \geq x_0]$ y función de densidad de probabilidad dada por

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_0} e^{-\frac{x}{x_0}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Determinar:

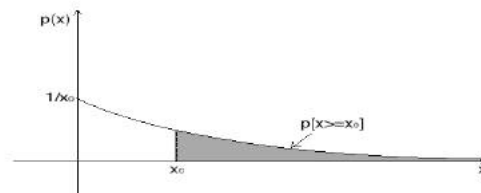
- La función de distribución.
- Determinar $p[x \geq x_0]$, $\forall x$.
- Representación gráfica.

RESOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} \text{a) } F(x) = p[x \geq x_0] &= \int_{-\infty}^x p(x) \cdot dx = \int_{x_0}^x p(x) \cdot dx = \int_{x_0}^x \frac{1}{x_0} e^{-\frac{x}{x_0}} \cdot dx = \\ &= -e^{-\frac{x}{x_0}} \Big|_{x_0}^x = -e^{-\frac{x}{x_0}} + e^{-\frac{x_0}{x_0}} = e^{-1} - e^{-\frac{x}{x_0}} = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^{\frac{x}{x_0}}} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} p[x \geq x_0] = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \frac{1}{e}$$

c) Representación gráfica:



PROBLEMA 144 (280617)

Hallar la ecuación de una hipérbola, referida a un sistema ortonormal contenido en los ejes coordenados, en cada uno de los siguientes casos:

- Su excentricidad es $5/4$ y su distancia focal es 5.
- Su excentricidad es $\sqrt{13}/3$ y el punto $P(5, 8/3)$ pertenece a la hipérbola.
- Los puntos $P(25/4, 3)$ y $Q(5, 0)$ pertenecen a la hipérbola.

RESOLUCIÓN:

a)

$$\left. \begin{array}{l} e = c/a = 4/5 \\ c = 5 \end{array} \right\} \rightarrow a = 4 \rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9 \rightarrow b = 3$$

ecuación:

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$$

b)

$$\left. \begin{array}{l} e = c/a = \sqrt{13}/3 \\ \left(\frac{5}{a}\right)^2 - \left(\frac{8}{3b}\right)^2 = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{c^2}{a^2} = \frac{13}{9} \rightarrow \frac{b^2 + a^2}{a^2} = \frac{13}{9} \rightarrow 9b^2 = 4a^2 \\ \frac{25}{a^2} - \frac{64}{9b^2} = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{25}{a^2} - \frac{64}{4a^2} = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{25}{a^2} - \frac{16}{a^2} = 1 \rightarrow \frac{9}{a^2} = 1 \rightarrow a = 3, b^2 = \frac{4}{9}a^2 = 4 \rightarrow b = 2$$

ecuación:

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

c)

$$\left. \begin{array}{l} \left(\frac{25}{4a}\right)^2 - \left(\frac{3}{b}\right)^2 = 1 \\ \left(\frac{5}{a}\right)^2 - \left(\frac{0}{b}\right)^2 = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \left(\frac{25}{4a}\right)^2 - \left(\frac{3}{b}\right)^2 = 1 \\ a^2 = 25 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{25}{16} - \frac{9}{b^2} = 1 \rightarrow b = 4$$

ecuación:

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 - \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$$

PROBLEMA 143 (310517)

Mediante el Algoritmo de Euclides, obténgase el Máximo Común Divisor de los números **25905** y **12405**. Obténgase también el Mínimo Común Múltiplo.

RESOLUCIÓN:

a) Cálculo del MCD(25905, 12405):

	2	11	3	24	cocientes
25905	12405	1095	360	15	
1095	1455	15	60		restos
	360		0		

Por tanto, el 15 es el número divisor al que corresponde el resto cero.

$$\mathbf{MCD(25905,12405)=15}$$

b) Cálculo del MCM(25905,12405):

Por ser, para dos números cualesquiera, $MCD(a,b) \cdot MCM(a,b) = a \cdot b$, se tiene que

$$MCM(25905,12405) = 25905 \cdot 12405 / MCD(25905,12405) = 25905 \cdot 12405 / 15 = 21423435$$

$$\mathbf{MCM(25905,12405)=21423435}$$

PROBLEMA 142 (030517)

Sea $(G, +)$ un grupo aditivo abeliano. Se pide:

- Probar que para dos elementos, x e y , cualesquiera de G , se verifica que el opuesto de $x+y$ es $-x-y$.
- Demostrar que si H es subgrupo de G , entonces G/H es grupo abeliano.
- Sea n un número entero. Probar que para dos elementos, x e y , cualesquiera de G se verifica que $n.(x+y)=n.x+n.y$.

RESOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} \text{a) } (x+y)+(-x-y) &= (x+y+(-x))+(-y) = (x+(-x)+y)+(-y) = (0+y)+(-y) = \\ &= y+(-y) = 0 \end{aligned}$$

$$\forall x, y \in G, -(x+y) = -x-y$$

$$\text{b) } \forall x, y \in G \rightarrow x+H, y+H \in G/H \rightarrow$$

$$\rightarrow (x+H)+(y+H) = (x+y)+H = (y+x)+H = (y+H)+(x+H)$$

$$\text{O sea: } \forall (x+H), (y+H) \in G/H, (x+H)+(y+H) = (y+H)+(x+H)$$

c) 1. Si es $n=0$:

$$\left. \begin{array}{l} n.(x+y) = 0.(x+y) = 0 \\ n.x = 0.x = 0, n.y = 0.y = 0 \end{array} \right\} \rightarrow n.(x+y) = n.x + n.y = 0, \forall x, y \in G$$

2. Si es $n > 0$:

Procedemos por inducción:

- para $n=1 \rightarrow 1.(x+y) = x+y = 1.x+1.y$. Se verifica.

- para $n > 1 \rightarrow \exists m \in \mathbb{N} / n = m+1, (m > 0)$. Supongamos la expresión cierta para m y veamos que entonces ha de ser cierta para $m+1$. Se tendrá:

$$\begin{aligned} n(x+y) &= (m+1).(x+y) = m.(x+y) + 1.(x+y) = m.x + m.y + 1.x + 1.y = \\ &= (m.x + 1.x) + (m.y + 1.y) = (m+1).x + (m+1).y = n.x + n.y \end{aligned}$$

$$\text{Por tanto: } \forall x, y \in G, \forall n \in \mathbb{Z}^+, n.(x+y) = n.x + n.y$$

3. Si es $n < 0$:

Hacemos $n = -m (m > 0)$:

$$\begin{aligned} n.(x+y) &= (-m).(x+y) = m.(-1).(x+y) = m.(-(x+y)) = m.(-x-y) = \\ &= m.[(-x)+(-y)] = m.(-x) + m.(-y) = (-m.x) + (-m.y) = (-m).x + (-m).y = \\ &= m.[(-x)+(-y)] = m.(-x) + m.(-y) = (-m.x) + (-m.y) = (-m).x + (-m).y = \end{aligned}$$

$$\text{Por tanto: } \forall x, y \in G, \forall n \in \mathbb{Z}^-, n.(x+y) = n.x + n.y$$

En definitiva, de 1., 2. Y 3.: $\forall x, y \in G, \forall n \in \mathbb{Z}, n.(x+y) = n.x + n.y$

PROBLEMA 141 (050417)

Se desea obtener el punto de la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - 2x$$

en el que la recta tangente es paralela a la recta de ecuación

$$3x - 2y + 1 = 0$$

RESOLUCIÓN:

Pendiente de la recta tangente en $x=x_0$:

$$m = f'(x_0) = \frac{1}{2}x_0 - 2$$

Pendiente de la recta dada:

$$3x - 2y + 1 = 0 \rightarrow y = \frac{3}{2}x + 1 \rightarrow \text{pend} = \frac{3}{2}$$

Si la recta tangente es paralela a la recta dada han de tener ambas la misma pendiente, luego:

$$\frac{1}{2}x_0 - 2 = \frac{3}{2} \rightarrow x_0 = 7$$

El punto de la gráfica pedido es $(7, f(7))$. Y como es $f(7) = \frac{7^2}{4} - 2 \cdot 7 = -\frac{7}{4}$, se tiene, finalmente que el punto es

$$\left(7, -\frac{7}{4}\right)$$

PROBLEMA 140 (080317)

Estudiar la continuidad de

a) $f_1(x) = +\sqrt{x^2 - 3x + 2}, \forall x \in R$

b) $f_2(x) = L(\cos x)$, en $[0, 2]$

c) $f_3(x) = \sqrt{\pi^2 - x^2} \cdot \operatorname{tg} x, \forall x \in R$

RESOLUCIÓN:

a) $f_1(x) = +\sqrt{x^2 - 3x + 2}$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2$$

y se tiene que

$$x \leq 1 \rightarrow x^2 - 3x + 2 \geq 0$$

$$1 < x < 2 \rightarrow x^2 - 3x + 2 < 0$$

$$x \geq 2 \rightarrow x^2 - 3x + 2 \geq 0$$

La función existe en $R - (1, 2)$

$$\forall x \in R - (1, 2), f_1(x+0) = +\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{(x+h)^2 - 3(x+h) + 2} = +\sqrt{x^2 - 3x + 2} = f_1(x)$$

$$\forall x \in R - (1, 2), f_1(x-0) = +\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{(x-h)^2 - 3(x-h) + 2} = +\sqrt{x^2 - 3x + 2} = f_1(x)$$

O sea, $f_1(x+0) = f_1(x-0) = f_1(x)$, por lo que $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f_1(x + \Delta x) = f_1(x)$ La función existe y es continua en $R - (1, 2)$.

b) $f_2(x) = L(\cos x)$

La función no existe si $\cos x \leq 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$, es decir, solo existe en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), f_2(x+0) = +\lim_{h \rightarrow 0} L(\cos(x+h)) = L(\cos x) = f_2(x)$$

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), f_2(x-0) = +\lim_{h \rightarrow 0} L(\cos(x-h)) = L(\cos x) = f_2(x)$$

O sea, $f_2(x+0) = f_2(x-0) = f_2(x)$, por lo que $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f_2(x + \Delta x) = f_2(x)$ La función existe y es continua en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

c) $f_3(x) = \sqrt{\pi^2 - x^2} \cdot \operatorname{tg} x$

$$\pi^2 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm\pi$$

y se tiene que

$$f_3(x) \text{ no existe para } x < -\pi, x > \pi.$$

Si $x = \pm\pi$ es $\operatorname{tg}(\pm\pi) = \pm\infty$ y $f_3(x)$ no está definida.Campo de existencia: $(-\pi, \pi)$ Y se cumple que $f_3(x+0) = f_3(x-0) = f_3(x)$, por lo que $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f_3(x + \Delta x) = f_3(x)$ La función existe y es continua en $(-\pi, \pi)$.

PROBLEMA 139 (080217)

Calcúlese por medio de una integral definida

$$A = \lim a_n$$

siendo (a_n) la sucesión cuyo término general es

$$a_n = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{n}\right)\left(1 + \frac{4}{n}\right)\left(1 + \frac{6}{n}\right)\dots\left(1 + \frac{2n}{n}\right)}$$

RESOLUCIÓN:

$$A = \lim a_n \rightarrow LA = L(\lim a_n) = \lim(La_n) = \lim \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} L \left(1 + 2 \frac{k}{n}\right)$$

haciendo $\frac{k}{n} = x_k$ será $\Delta x_k = \frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} = \frac{1}{n}$, por lo cual:

$$A = \lim \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} L \left(1 + 2 \frac{k}{n}\right) = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n L(1 + 2x_k) \Delta x_k = \int_0^1 L(1 + 2x) \cdot dx$$

hacemos un cambio de variables y a continuación integramos por partes:

$$h = 1 + 2x, \quad dx = \frac{1}{2} dh \rightarrow A = \int_0^1 L(1 + 2x) \cdot dx = \frac{1}{2} \int_1^3 Lh \cdot dh$$

integrando por partes:

$$\frac{1}{2} \int_1^3 Lh \cdot dh = \frac{1}{2} [h \cdot Lh]_1^3 - \frac{1}{2} h^3 \Big|_1^3 = \frac{1}{2} (L3^3 - 2) = \frac{1}{2} (L3^3 - Le^2) = \frac{1}{2} L \frac{3^3}{e^2} = L \sqrt{\frac{3^3}{e^2}} = \frac{3\sqrt{3}}{e}$$

Resultado:

$$A = \frac{3\sqrt{3}}{e}$$

PROBLEMA 138 (110117)

La gráfica de $y^2 + 2xy + 40|x| = 400$ divide al plano en varias regiones una de las cuales está acotada. Calcula el área de esa región.

RESOLUCIÓN:

Si $x \geq 0$, la función es $y^2 + 2xy + 40x = 400$, es decir, $y^2 - 400 = -2x(y + 20)$ que es equivalente a $(y + 20)(y - 20) + 2x(y + 20) = 0 \rightarrow (y + 20)(y - 20 + 2x) = 0$, que corresponde a las dos rectas

$$\begin{cases} y = -20 \\ y = -2x + 20 \end{cases}$$

Si $x < 0$, tendríamos la función $y^2 + 2xy - 40x = 400$, y por tanto es $y^2 - 400 = -2x(y - 20)$. O sea,

$(y + 20)(y - 20) + 2x(y - 20) = 0 \rightarrow (y - 20)(y + 20 + 2x) = 0$, que corresponde a las rectas

$$\begin{cases} y = 20 \\ y = -2x - 20 \end{cases}$$

La gráfica de la función dada es la siguiente, donde se observa que la región acotada es el paralelogramo de base 20 y altura 40. El área es, por tanto, 800.

