RESOLVIENDO PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 148 (181017)

a) Determinar la ecuación de la envolvente a la familia de circunferencias que pasan por el orígen y tienen su centro en la parábola $y = x^2$

b) Determinar la ecuación de la envolvente de un segmento móvil de longitud c constante dada, cuyos extremos se apoyan en los ejes cartesianos.

RESOLUCIÓN:

a) Ecuación de las circunferencias que pasan por el orígen: $x^2 + y^2 - 2mx - 2ny = 0$

Ecuación de los puntos que son sus centros: $y = x^2$, en forma paramétrica: $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$

Centro de las circunferencias: (t, t^2). Por tanto, $x^2 + y^2 - 2tx - 2t^2 y = 0$

Derivamos respecto al parámetro t: $-2x - 4ty = 0 \to t = -\frac{1}{2}\frac{x}{y}$. Por tanto es

$$x^2 + y^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\frac{x}{y}\right)x - 2\left(-\frac{1}{2}\frac{x}{y}\right)^2 y = 0$$

Al simplificar:

$$x^2 + y^2 + \frac{x^2}{y} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{y} = 0 \to x^2(2y+1) + 2y^3 = 0$$

Envolvente:

$$\boxed{x^2(2y+1) + 2y^3 = 0}$$

b) Ecuación canónica de la recta que contiene al segmento:

$$x/a + y/b = 1 \qquad [1]$$

Relación entre los parámetros:

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad [2]$$

Derivando [1]:

$$\frac{1}{a^2}x + \frac{1}{b^2}y\frac{db}{da} = 0 \qquad [3]$$

Derivando [2]:

$$a + b\frac{db}{da} = 0 \qquad [4]$$

Sustituimos [4] en [3]:

$$\frac{1}{a^2}x+\frac{1}{b^2}y\left(-\frac{a}{b}\right)=0 \rightarrow \frac{x}{a^2}-\frac{a}{b^3}y=0 \rightarrow b=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}a$$

Sustituimos esta expresión en [1] y en [2]:

$$x/a+y/b=1 \rightarrow x/a+\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}}y/a=1 \rightarrow x/a+\left(x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}\right)\Big/a=1 \rightarrow x+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}=a \rightarrow 1+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}=a/x$$

$$a^2+b^2=c^2 \rightarrow a^2+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}a^2=c^2 \rightarrow a=\frac{c}{\sqrt{1+\left(y/x\right)^{\frac{2}{3}}}}$$

Finalmente, identificando ambas expresiones:

$$\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\right]x=\frac{c}{\left[1+\left(y/x\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}} \rightarrow x\left[1+\left(y/x\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}=c \rightarrow x^{\frac{2}{3}}\left[1+\left(y/x\right)^{\frac{2}{3}}\right]=c^{\frac{2}{3}} \rightarrow x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{2}{3}}$$

Envolvente:

$$\boxed{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{2}{3}}}$$

(Astroide)

PROBLEMA 147 (200917)

Para todos los $\alpha,\beta \in G = \{\alpha / \alpha : Z \to Z\}$ sea $\alpha \times \beta$ la aplicación definida por $(\alpha\times\beta)(x) = \alpha(x).\beta(x)$ donde $x \in Z$ y . es la multiplicación usual de los enteros. ¿Es $(G,\times)$ un grupoide?. ¿Posee elemento neutro?. ¿Qué elementos poseen inverso?.

RESOLUCIÓN:

a) Es un grupoide:

Por definición, se trata de probar que $\times$ es ley interna en G. Es decir, hay que probar que $\alpha\times\beta$ pertenece a G, o sea, que $\alpha\times\beta$ es una aplicación de Z en Z.

$\forall\alpha,\beta\in G, \forall x\in Z, (\alpha\times\beta)(x) = \alpha(x).\beta(x) \wedge \alpha(x)\in Z, \beta(x)\in G \to \alpha(x).\beta(x)\in Z \to$

$\to (\alpha\times\beta)(x)\in Z \to \alpha\times\beta\in G$.

En definitiva, $\alpha,\beta\in G, \alpha\times\beta\in G \to (G,\times)\ grupoide$

b) Elemento neutro:

El elemento neutro ϕ ha de cumplir: $\phi\times\alpha = \alpha\times\phi = \alpha, \forall\alpha\in G$, o sea $\forall x\in Z, \forall\alpha\in G$:

$$\left.\begin{array}{l}(\phi\times\alpha)(x) = \phi(x).\alpha(x) = \alpha(x)\\ (\alpha\times\phi)(x) = \alpha(x).\phi(x) = \alpha(x)\end{array}\right\} \to \phi(x) = 1$$

En definitiva, el elemento neutro del grupoide existe y está el definido por la condición de que:

$$\forall x\in G, \phi(x) = 1$$

c) Elementos inversibles:

Un elemento $\alpha\in G$ poseerá inverso α' si $\alpha\times\alpha' = \alpha'\times\alpha = \phi$, o sea, si es, $\forall x\in Z$,

$$\left.\begin{array}{l}\alpha(x).\alpha'(x) = 1\\ \alpha'(x).\alpha(x) = 1\end{array}\right\} \to \forall\alpha(x).\alpha'(x)\in Z$$

Soluciones posibles: $\alpha(x) = 1$ y $\alpha'(x) = -1$, o bien $\alpha(x) = -1$ y $\alpha'(x) = 1$

Los unicos elementos inversibles son los $\phi_i(x)$ tales que $\phi_i(x) = 1 \vee \phi_i(x) = -1$

PROBLEMA 146 (230817)

En una interpolación polinominal, encontrar el polinomio de interpolación para la función $f(x)$ sabiendo que

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=3 \\ f(2)=-2 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN:

Soporte de la interpolación: $S=\left[x_0,x_1,x_2\right]\equiv\left[0,1,2\right]$

Base: $B=\left[1,x,x^2\right]$

Matriz de la interpolación:

$$G=\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Valores de la función en el soporte:

$$F=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Aplicamos la fórmula de Interpolación de Lagrange $p_n(x)=B.L.F$.

Podemos calcular la matriz L bien como inversa de la matriz de la interpolación o bien como la matriz cuyas columnas son los coeficientes de los polinomios de Lagrange. Veámos su cálculo de ambas maneras.

a) Cálculo usando la matriz inversa de la matriz de interpolación:

$$L=G^{-1}=\frac{1}{|G|}adj(trasp(G))=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 2 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

b) Cálculo usando los polinomios de Lagrange:

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}=1-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}x^2$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}=2x-x^2$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2$$

$$L=\begin{bmatrix} L_{00} & L_{10} & L_{20} \\ L_{01} & L_{11} & L_{21} \\ L_{02} & L_{12} & L_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 2 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Finalmente:

$$p_2(x)=B.L.F=\left[1,x,x^2\right].\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 2 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}=1+\frac{11}{2}x-\frac{7}{2}x^2$$

PROBLEMA 145 (260717)

Para la variable aleatoria ξ de contradominio $\left[\xi \geq x_0\right]$ y función de densidad de probabilidad dada por

$$p(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x_0}e^{-\frac{x}{x_0}} & x\geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

Determinar:

a) La función de distribución.
b) Determinar $p\left[x\geq x_0\right],\ \forall x$.
c) Representación gráfica.

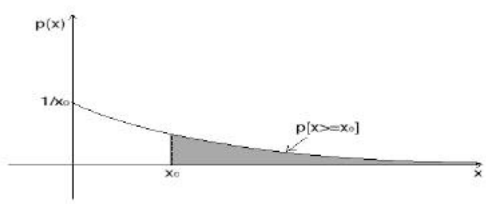
RESOLUCIÓN:

a) $F(x)=p\left[x\geq x_0\right]=\int_{-\infty}^{x} p(x).dx=\int_{x_0}^{x} p(x).dx=\int_{x_0}^{x}\frac{1}{x_0}e^{-\frac{x}{x_0}}.dx=$

$$=-e^{-\frac{x}{x_0}}\Big|_{x_0}^{x}=-e^{-\frac{x}{x_0}}+e^{-\frac{x_0}{x_0}}=e^{-1}-e^{-\frac{x}{x_0}}=\frac{1}{e}-\frac{1}{e^{\frac{x}{x_0}}}$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} p\left[x\geq x_0\right]=\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=\dfrac{1}{e}$

c) Representación gráfica:



PROBLEMA 144 (280617)

Hallar la ecuación de una hipérbola, referida a un sistema ortonormal contenido en los ejes coordenados, en cada uno de los siguientes casos:

a) Su excentricidad es 5/4 y su distancia focal es 5.

b) Su excentricidad es $\sqrt{13}/3$ y el punto $P(5,8/3)$ pertenece a la hipérbola.

c) Los puntos $P(25/4,3)$ y $Q(5,0)$ pertenecen a la hipérbola.

RESOLUCIÓN:

a)

$$\left.\begin{array}{c} e = c/a = 4/5 \\ c = 5 \end{array}\right\} \rightarrow a = 4 \rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9 \rightarrow b = 3$$

ecuación:

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$$

b)

$$\left.\begin{array}{c} e = c/a = \sqrt{13}/3 \\ \left(\frac{5}{a}\right)^2 - \left(\frac{8}{3b}\right)^2 = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} \frac{c^2}{a^2} = \frac{13}{9} \rightarrow \frac{b^2 + a^2}{a^2} = \frac{13}{9} \rightarrow 9b^2 = 4a^2 \\ \frac{25}{a^2} - \frac{64}{9b^2} = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{25}{a^2} - \frac{64}{4a^2} = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{25}{a^2} - \frac{16}{a^2} = 1 \rightarrow \frac{9}{a^2} = 1 \rightarrow a = 3 \,,\; b^2 = \frac{4}{9}a^2 = 4 \rightarrow b = 2$$

ecuación:

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

c)

$$\left.\begin{array}{c} \left(\frac{25}{4a}\right)^2 - \left(\frac{3}{b}\right)^2 = 1 \\ \left(\frac{5}{a}\right)^2 - \left(\frac{0}{b}\right)^2 = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} \left(\frac{25}{4a}\right)^2 - \left(\frac{3}{b}\right)^2 = 1 \\ a^2 = 25 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{25}{16} - \frac{9}{b^2} = 1 \rightarrow b = 4$$

ecuación:

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 - \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$$

PROBLEMA 143 (310517)

Mediante el Algoritmo de Euclides, obténgase el Máximo Común Divisor de los números **25905** y **12405**. Obténgase también el Mínimo Común Múltiplo.

RESOLUCIÓN:

a) Cálculo del MCD(25905, 12405):

	2	11	3	24	cocientes
25905	12405	1095	360	15	
1095	1455	15	60		restos
	360		0		

Por tanto, el 15 es el número divisor al que corresponde el resto cero.

MCD(25905,12405)=15

b) Cálculo del MCM(25905,12405):

Por ser, para dos números cualesquiera, MCD(a,b).MCM(a,b)=a.b, se tiene que

MCM(25905,12405) =25905.12405 / MCD(25905,12405) =25905.12405/15 =
=21423435

MCM(25905,12405)=21423435

PROBLEMA 142 (030517)

Sea *(G,+)* un grupo aditivo abeliano. Se pide:

a) Probar que para dos elementos, *x* e *y*, cualesquiera de *G*, se verifica que el opuesto de *x+y* es – *x* - *y*.
b) Demostrar que si *H* es subgrupo de *G*, entonces *G/H* es grupo abeliano.
c) Sea *n* un número entero. Probar que para dos elementos, *x* e *y*, cualesquiera de G se verifica que *n.(x+y)=n.x+n.y*.

RESOLUCIÓN:

a) $(x+y)+(-x-y)=(x+y+(-x))+(-y)=(x+(-x)+y)+(-y)=(0+y)+(-y)=$
$= y+(-y)=0$

$$\forall x,y\in G,\ -(x+y)=-x-y$$

b) $\forall x,y\in G \rightarrow x+H, y+H\in G/H \rightarrow$
$\rightarrow (x+H)+(y+H)=(x+y)+H=(y+x)+H=(y+H)+(x+H)$
O sea: $\forall (x+H),(y+H)\in G/H,\ (x+H)+(y+H)=(y+H)+(x+H)$

c) 1. Si es $n=0$:

$$\left.\begin{array}{l} n.(x+y)=0.(x+y)=0 \\ n.x=0.x=0,\ n.y=0.y=0 \end{array}\right\} \rightarrow n.(x+y)=n.x+n.y=0,\ \forall x,y\in G$$

2. Si es $n>0$:
Procedemos por inducción:
- para $n=1\rightarrow 1.(x+y)=x+y=1.x+1.y$. Se verifica.
- para $n>1\rightarrow \exists m\in N / n=m+1,\ \ (m>0)$. Supongamos la expresión cierta para *m* y veamos que entonces ha de ser cierta para *m+1*. Se tendrá:

$$n(x+y)=(m+1).(x+y)=m.(x+y)+1.(x+y)=m.x+m.y+1.x+1.y=$$
$$=(m.x+1.x)+(m.y+1.y)=(m+1).x+(m+1).y=n.x+n.y$$

Por tanto: $\forall x,y\in G,\forall n\in Z^+,\ n.(x+y)=n.x+n.y$

3. Si es $n<0$:
Hacemos $n=-m\ (m>0)$:

$$n.(x+y)=(-m).(x+y)=m.(-1).(x+y)=m.(-(x+y))=m.(-x-y)=$$
$$=m.\left[(-x)+(-y)\right]=m.(-x)+m.(-y)=(-m.x)+(-m.y)=(-m).x+(-m).y=$$
$$=m.\left[(-x)+(-y)\right]=m.(-x)+m.(-y)=(-m.x)+(-m.y)=(-m).x+(-m).y=$$

Por tanto: $\forall x,y\in G,\forall n\in Z^-,\ n.(x+y)=n.x+n.y$

En definitiva, de 1., 2. Y 3.: $\forall x,y\in G,\forall n\in Z,\ n.(x+y)=n.x+n.y$

PROBLEMA 141 (050417)
Se desea obtener el punto de la gráfica de la función

$$f(x)=\frac{x^2}{4}-2x$$

en el que la recta tangente es paralela a la recta de ecuación

$$3x-2y+1=0$$

RESOLUCIÓN:
Pendiente de la recta tangente en $x=x_0$:

$$m=f'(x_0)=\frac{1}{2}x_0-2$$

Pendiente de la recta dada:

$$3x-2y+1=0\rightarrow y=\frac{3}{2}x+1\rightarrow pend=\frac{3}{2}$$

Si la recta tangente es paralela a la recta dada han de tener ambas la misma pendiente, luego:

$$\frac{1}{2}x_0-2=\frac{3}{2}\rightarrow x_0=7$$

El punto de la gráfica pedido es $\left(7,f(7)\right)$. Y como es $f(7)=\frac{7^2}{4}-2.7=-\frac{7}{4}$, se tiene, finalmente que el punto es

$$\left(7,-\frac{7}{4}\right)$$

PROBLEMA 140 (080317)

Estudiar la continuidad de

a) $f_1(x) = +\sqrt{x^2 - 3x + 2},\ \forall x \in R$

b) $f_2(x) = L(\cos x),\ en\left[0,2\right]$

c) $f_3(x) = \sqrt{\pi^2 - x^2}.tgx,\ \forall x \in R$

RESOLUCIÓN:

a) $f_1(x) = +\sqrt{x^2 - 3x + 2}$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2$$

y se tiene que

$$x \leq 1 \rightarrow x^2 - 3x + 2 \geq 0$$

$$1 < x < 2 \rightarrow x^2 - 3x + 2 < 0$$

$$x \geq 2 \rightarrow x^2 - 3x + 2 \geq 0$$

La función existe en $R - (1,2)$

$$\forall x \in R - (1,2),\ f_1(x+0) = +\lim_{h \to 0} \sqrt{(x+h)^2 - 3(x+h) + 2} = +\sqrt{x^2 - 3x + 2} = f_1(x)$$

$$\forall x \in R - (1,2),\ f_1(x-0) = +\lim_{h \to 0} \sqrt{(x-h)^2 - 3(x-h) + 2} = +\sqrt{x^2 - 3x + 2} = f_1(x)$$

O sea, $f_1(x+0) = f_1(x-0) = f_1(x)$, por lo que $\lim_{\Delta x \to 0} f_1(x + \Delta x) = f_1(x)$

La función existe y es continua en $R - (1,2)$.

b) $f_2(x) = L(\cos x)$

La función no existe si $\cos x \leq 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$, es decir, solo existe en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right),\ f_2(x+0) = +\lim_{h \to 0} L(\cos(x+h)) = L(\cos x) = f_2(x)$$

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right),\ f_2(x-0) = +\lim_{h \to 0} L(\cos(x-h)) = L(\cos x) = f_2(x)$$

O sea, $f_2(x+0) = f_2(x-0) = f_2(x)$, por lo que $\lim_{\Delta x \to 0} f_2(x + \Delta x) = f_2(x)$

La función existe y es continua en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

c) $f_3(x) = \sqrt{\pi^2 - x^2}.tgx$

$\pi^2 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm\pi$

y se tiene que

$f_3(x)$ no existe para $x < -\pi, x > \pi$.

Si $x = \pm\pi$ es $tg(\pm\pi) = \pm\infty$ y $f_3(x)$ no está definida.

Campo de existencia: $\left(-\pi, \pi\right)$

Y se cumple que $f_3(x+0) = f_3(x-0) = f_3(x)$, por lo que $\lim_{\Delta x \to 0} f_3(x + \Delta x) = f_3(x)$

La función existe y es continua en $\left(-\pi, \pi\right)$.

PROBLEMA 139 (080217)

Calcúlese por medio de una integral definida

$$A = \lim a_n$$

siendo (a_n) la sucesión cuyo término general es

$$a_n = \sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n}\right)\left(1+\frac{6}{n}\right)...\left(1+\frac{2n}{n}\right)}$$

RESOLUCIÓN:

$$A = \lim a_n \rightarrow LA = L(\lim a_n) = \lim(La_n) = \lim\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}L\left(1+2\frac{k}{n}\right)$$

haciendo $\frac{k}{n} = x_k$ será $\Delta x_k = \frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} = \frac{1}{n}$, por lo cual:

$$A = \lim\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}L\left(1+2\frac{k}{n}\right) = \lim_{\Delta x_k\to 0}\sum_{k=1}^{n}L\left(1+2x_k\right)\Delta x_k = \int_0^1 L(1+2x).dx$$

hacemos un cambio de variables y a continuación integramos por partes:

$$h = 1+2x,\ dx = \frac{1}{2}dh \rightarrow A = \int_0^1 L(1+2x).dx = \frac{1}{2}\int_1^3 Lh.dh$$

integrando por partes:

$$\frac{1}{2}\int_1^3 Lh.dh = \frac{1}{2}\left[h.Lh\right]_1^3 - \frac{1}{2}h\Big|_1^3 = \frac{1}{2}(L3^3 - 2) = \frac{1}{2}(L3^3 - Le^2) = \frac{1}{2}L\frac{3^3}{e^2} = L\sqrt{\frac{3^3}{e^2}} = \frac{3\sqrt{3}}{e}$$

Resultado:

$$A = \frac{3\sqrt{3}}{e}$$

PROBLEMA 138 (110117)

La gráfica de $y^2+2xy+40|x|=400$ divide al plano en varias regiones una de las cuales está acotada. Calcula el área de esa región.

RESOLUCIÓN:

Si $x\geq 0$, la función es $y^2+2xy+40x=400$, es decir, $y^2-400=-2x(y+20)$ que es equivalente a $(y+20)(y-20)+2x(y+20)=0 \to (y+20)(y-20+2x)=0$, que corresponde a las dos rectas

$$\begin{cases} y=-20 \\ y=-2x+20 \end{cases}$$

Si $x<0$, tendríamos la función $y^2+2xy-40x=400$, y por tanto es $y^2-400=-2x(y-20)$. O sea,

$(y+20)(y-20)+2x(y-20)=0 \to (y-20)(y+20+2x)=0$, que corresponde a las rectas

$$\begin{cases} y=20 \\ y=-2x-20 \end{cases}$$

La grafica de la función dada es la siguiente, donde se observa que la región acotada es el paralelogramo de base 20 y altura 40. El área es, por tanto, 800.