RESOLVIENDO PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

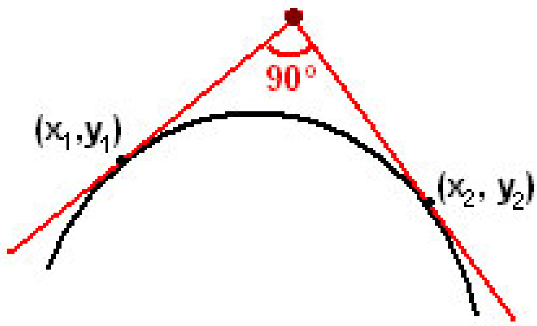
PROBLEMA 008 (301206)

Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos desde donde se pueden trazar dos tangentes, que formen entre sí ángulo recto, a la curva:

$$x.y^2 = 1$$

SOLUCIÓN:

Sean (x_1,y_1) y (x_2,y_2) dos puntos de la curva en donde las respectivas tangentes son perpendiculares



Sus ecuaciones son:

$$\begin{cases} y - y_1 = & y_1'.(x-x_1) \\ y - y_2 = & y_2'.(x-x_2) \end{cases}$$

y por ser perpendiculares, será $y_2' = -\dfrac{1}{y_1'}$

Se tiene: $x.y^2 = 1 \rightarrow y^2 + x.2y.y' = 0 \rightarrow y' = -\dfrac{y^2}{2yx} = -\dfrac{y}{2x} = -\dfrac{y}{2\dfrac{1}{y^2}} = -\dfrac{y^3}{2}$

En definitiva, se tiene para las ecuaciones de las rectas tangentes:

$$\begin{cases} y - y_1 = & y_1'.(x-x_1) \\ y - y_2 = & y_2'.(x-x_2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y - y_1 = & -\dfrac{y_1^3}{2}(x - \dfrac{1}{y_1^2}) \\ y - y_2^2 & -\dfrac{y_2^3}{2}(x - \dfrac{1}{y_2^2}) \end{cases}$$

y siendo $-\dfrac{y_2^3}{2} = -\dfrac{1}{-\dfrac{y_1^3}{2}} \rightarrow y_2^3 = -\dfrac{4}{y_1^3} \rightarrow y_2 = -\dfrac{\sqrt[3]{4}}{y_1}$, se tendrá:

$$\begin{cases} y+\dfrac{\sqrt[3]{4}}{y_1}= & \dfrac{2}{y_1^3}\left(x-\dfrac{y_1^2}{\sqrt[3]{16}}\right) \\ y-y_1= & -\dfrac{y_1^3}{2}\left(x-\dfrac{1}{y_1^2}\right) \end{cases}$$

Despejamos x e y para obtener las ecuaciones paramétricas de este lugar geométrico:

- Eliminando y: $x=\dfrac{6y_1^2+3\sqrt[3]{2}.y_1^4}{4\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}y_1^6}$

- Sustituyendo hayamos también el valor de y: $y=\dfrac{\sqrt[3]{2}y_1-3y_1^5}{4\sqrt[3]{2}+y_1^6\sqrt[2]{2}}$

Ecuaciones paramétricas:

$$x=\frac{6y_1^2+3\sqrt[3]{2}.y_1^4}{4\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}y_1^6},\quad y=\frac{\sqrt[3]{2}y_1-3y_1^5}{4\sqrt[3]{2}+y_1^6\sqrt[2]{2}}$$

Eliminando el parámetro y simplificando, encontramos:

$$3\sqrt[3]{2}.x=2\left(x^2+y^2\right)$$

PROBLEMA 007 (021206)

Desarrollar en serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n . z^n$ la función de variable compleja:

$$f(z) = \frac{1}{\left(1+z^2\right)^4}$$

determinando el radio de convergencia y la expresión del coeficiente a_n en función de n. Determine asimismo los residuos de la función y calcule la integral:

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{(1+z^2)^4}$$

donde γ es el camino que en coordenadas polares tiene por ecuación:

$$\rho = \sqrt{|2.\cos 2w|} \qquad\qquad 0 \le w \le 2\pi$$

SOLUCIÓN:

Desarrollo en serie:

$$\frac{1}{\left(1+z^2\right)^4} = \left(1+z^2\right)^{-4} = \binom{-4}{0} + \binom{-4}{1}.z^2 + \binom{-4}{2}.z^4 + \ldots$$

Radio de convergencia: r=1

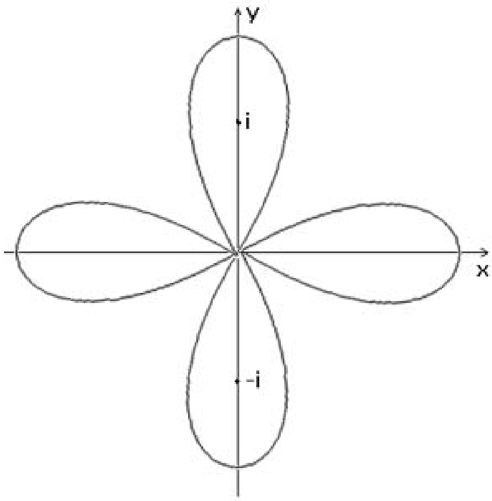
Coeficientes: $a_n = \begin{cases} \dbinom{-4}{n/2}, & si\ n\ par \\ 0, & si\ n\ impar \end{cases} \qquad (n = 0,1,2,\ldots)$

Polos de la función f(z): $1+z^2 = 0 \to z = \pm i$

Residuos:

$$r_1 = \lim_{z \to i} \frac{1}{3!}.\frac{d^3}{dz^3}\left(z+i\right)^{-4} = -\frac{5}{32}i \qquad\qquad r_2 = \lim_{z \to -i} \frac{1}{3!}.\frac{d^3}{dz^3}\left(z-i\right)^{-4} = \frac{5}{32}i$$

El camino indicado es el de la figura, que rodea a ambos polos de la función, por lo cual se tiene:



$$\int_\gamma \frac{dz}{\left(1+z^2\right)^4} = 2\pi.i.\left(r_1 + r_2\right) = 2\pi.i.\left(\frac{5i}{32} - \frac{5i}{32}\right) = 0$$

PROBLEMA 006 (041106)

Sea la superficie:

$$\begin{cases} x = & u + & uv^2 - & u^3/3 \\ y = & v + & u^2v - & v^3/3 \\ z = & u^2 - & v^2 & \end{cases}$$

Determinar:

a) Las dos primeras formas cuadráticas fundamentales.

b) Las direcciones principales asociadas a cada punto.

c) Las líneas asintóticas.

d) Los radios de curvatura principales.

SOLUCIÓN:

Se tiene, para cualquier superficie diferenciable dada por $\vec{r} = \left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)$:

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}.du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}.dv, \qquad d^2\vec{r} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2}.du^2 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u \partial v}.du^2 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v \partial v}.du^2 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v^2}.du^2$$

que podemos representar por:

$$d\vec{r} = \vec{r}_u.du + \vec{r}_v.dv, \qquad d^2\vec{r} = \vec{r}_{uu}.du^2 + 2\vec{r}_{uv}.du^2 + \vec{r}_{vv}.du^2$$

si llamamos $\vec{N}$ al vector unitario normal a $\vec{r}_u$ y $\vec{r}_v$ se tendrá: $\vec{N} = \dfrac{\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v}{\left|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\right|}$

Y las dos formas cuadráticas fundamentales son:

$$I = d\vec{r}.d\vec{r} \qquad II = d^2\vec{r}.\vec{N}$$

en nuestro caso:

$$\vec{r}_u = \left(1 + v^2 - u^2, 2uv, 2u\right) \qquad r_v = \left(2uv, 1 + u^2 - v^2, -2v\right)$$

$$\vec{N} = \frac{1}{\left(1 + u^2 + v^2\right)^2}\left(-2uv^2 - 2u - 2u^3, 2u^2v + 2v + 2v^3, 1 - (u^2 + v^2)^2\right)$$

$$r_{uv} = (2v, 2u, 0) \qquad r_{uu} = (-2u, 2v, 2) \qquad r_{vv} = (2u, -2v, -2)$$

a) Formas cuadráticas fundamentales:

$$I=\vec{r}_u.\vec{r}_u.du^2+\vec{r}_v.\vec{r}_v.dv^2+2\vec{r}_u.\vec{r}_v.du.dv=(1+v^2+u^2)^2.du^2+(1+u^2+v^2)^2.dv^2+0.du.dv=$$
$$=(1+v^2+u^2)^2.(du^2+dv^2)$$

$$II=\vec{r}_{uu}.\vec{N}.du^2+\vec{r}_{vv}.\vec{N}.dv^2+2.\vec{r}_{uv}.\vec{N}.du.dv=2.du^2+(-2).dv^2+2.0.du.dv=2.(du^2-dv^2)$$

b) Por ser $\vec{r}_u.\vec{r}_v=\vec{0}$ y $\vec{r}_{uv}.\vec{N}=0$, las direcciones principales coinciden con las direcciones de los vectores tangentes.

c) Líneas asintóticas. Se obtienen para *II=0.* $II=0\Rightarrow 2(du^2-dv^2)=0\Rightarrow du^2=dv^2\Rightarrow$
$\Rightarrow du=\pm dv\Rightarrow u=c\pm v,\ \ c\ constante$

d) Radios de curvatura principales:

$$R_u=\frac{\vec{r}_v.\vec{r}_v}{\vec{r}_{vv}.N}=\frac{(1+u^2+v^2)^2}{-2}$$
$$R_v=\frac{\vec{r}_u.\vec{r}_u}{\vec{r}_{uu}.N}=\frac{(1+u^2+v^2)^2}{2}$$

PROBLEMA 005 (071006)

Se considera el conjunto *N* de los números naturales dotado de la *topología cofinita T* (los abiertos son los complementarios de los conjuntos finitos).

1) **¿Es *(N, T)* espacio topológico?.**
2) **¿Es Hausdorff?.**
3) **¿La sucesión *{1,2,...,n,...}* converge?. ¿A qué punto?.**
4) **¿Existe en *(N, T)* alguna sucesión que converja a un solo punto?.**
5) **¿Existe alguna sucesión que no converja?.**

SOLUCIÓN:

1) - Los conjuntos N y ϕ pueden considerarse incluidos en T.
   - Si es $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de abiertos de T ($G_i = CF_i \wedge F_i$ *finito*) se tiene:
     a) $\bigcup_{i\in I} G_i = \bigcup_{i\in I} CF_i = C \bigcap_{i\in I} F_i \wedge \bigcap_{i\in I} F_i \ \text{finito} \Rightarrow \bigcup_{i\in I} G_i \ \text{abierto}$
     b) $\bigcap_{i=1}^{n} G_i = \bigcap_{i=1}^{n} CF_i = C \bigcup_{i=1}^{n} F_i \wedge \bigcup_{i=1}^{n} F_i \ \text{finito} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} G_i \ \text{abierto}$

   En resumen:
   - $N, \phi \in T$
   - $\bigcup_{i\in I} G_i \in T$ (La unión de cualesquiera elementos de T es elemento de T)
   - $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in T$ (La intersección de un nº finito de elementos de T es también elemento de T).

   Lo que nos permite afirmar que *(N,T)* es espacio topológico.

2) Para que *(N,T)* sea Hausdorff debe ocurrir que para cualquier par de puntos de *N* existen abiertos no vacíos disjuntos a los cuales pertenecen. Es decir:

$$\forall p_1, p_2 \in N, \exists G_{p_1}, G_{p_2} \in T / p_1 \in G_{p_1} \wedge p_2 \in G_{p_2} \wedge G_{p_1} \cap G_{p_2} = \phi$$

   En nuestro caso:

$$\forall G_{p_1}, G_{p_2} \in T / p_1 \in G_{p_1} \wedge p_2 \in G_{p_2} \Rightarrow G_{p_1} = CF_{p_1} \wedge G_{p_2} = CF_{p_2} \wedge F_{p_1}, F_{p_2} \text{finitos} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G_{p_1} \cap G_{p_2} = CF_{p_1} \cap CF_{p_2} = C(F_{p_1} \cup F_{p_2}) \wedge F_{p_1} \cup F_{p_2} \neq \phi \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C(F_{p_1} \cup F_{p_2}) \neq \phi \Rightarrow G_{p_1} \cap G_{p_2} \neq \phi$$

   Por tanto, no se cumple la condición de Hausdorff.

3) Sabemos que en un espacio *(X,T$_X$)* una sucesión *{s_1,s_2,...,s_n,...}* converge hacia un punto $p \in X$ sii para cualquier entorno abierto G_p de p existe algún número M tal que para todo número natural mayor que M los términos de la sucesión pertenecen al entorno G_p. Es decir:

$$\{s_n\}_{n\in N} \text{conver. hacia } p \Leftrightarrow (\forall G_p \in T_x / p \in G_p) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists M \in N / \forall n \geq M, s_n \in G_p$$

En nuestro caso, para cualquier punto p de N y cualquier entorno abierto de p se verifica que dicho entorno contiene puntos de N. Luego, la sucesión dada $\{s_1,s_2,...,s_n,...\}$ converge hacia todo punto de N.

4) La sucesión constante {2,2,...,2,...} converge hacia el punto 2 únicamente. Es decir, en este espacio topológico, toda sucesión constante de valor k converge hacia k.

5) La sucesión {1,3,1,3,...,1,3,...} no converge.

PROBLEMA 004 (090906)

Dada la sucesión de funciones $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ **donde:**

$$f_n(x) = \frac{nx-1}{(x.L(n+1))(1+nx^2.Ln)}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad n = 1,2,\ldots$$

Calcular $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x).dx$ **y** $\int_0^1 (\lim_{n\to\infty} f_n(x)).dx$

Explicar la aparente contradicción de los resultados.

SOLUCIÓN:

- Cálculo de la primera integral:

Se tiene que $\lim_{x\to 0} \frac{f_n(x)}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{nx-1}{L(n+1)+n.Ln.L(n+1).x^2} = \frac{-1}{L(n+1)} \neq 0$

y comparando con $\lim_{x\to 0} x^{-1} = \infty$, se tiene que $\lim_{x\to 0} f_n(x) = -\infty$

por tanto

$$\int_0^1 f_n(x).dx = -\infty$$

y carece de sentido el limite pedido $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x).dx$.

- Cálculo de la segunda integral:

Se tiene que es $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x - \frac{1}{n}}{x.\dfrac{L(n+1)}{n} + Ln.L(n+1).x^3}$

y como es $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0,\quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{L(n+1)}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{Ln.L(n+1).x^3} = 0$$

para *x=0* es $f_n(0) = -\infty$, por lo que no tiene sentido la expresión $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0)$, teniéndose en definitiva que la sucesión de funciones $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ converge puntualmente hacia el cero, pero no converge uniformemente.

- En resumen:

$\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x).dx$ *carece de sentido.*

$$\int_0^1 (\lim_{n\to\infty} f_n(x)).dx = \int_0^1 0.dx = 0, \quad en \quad 0 < x \leq 1$$

- Explicación de la contradicción:

La explicación de la contradicción entre el valor de la expresiones dadas $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x).dx$ y $\int_0^1 (\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)).dx$ es que no se cumple una condición suficiente para que sean iguales: la condición de convergencia uniforme.

PROBLEMA 003 (120806)

Sea *M* el conjunto de las matrices ortogonales del tipo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad donde \ \ a,b,c,d \in R$$

y sea *f* la aplicación definida del siguiente modo:

$$f : M \to R^4$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}$$

Justifique con detalle que el conjunto imagen de *M* mediante la aplicación *f* es un conjunto cerrado del espacio topológico de cuatro dimensiones *R*^{4}.

SOLUCION:

Si tenemos en cuenta las condiciones de definición de matriz ortogonal y de aplicación continua:

$$A \ ortog \Leftrightarrow A^t.A = A.A^t = I \quad (I : identid)$$

$$\phi : T_1 \to T_2 \ \ continua \Leftrightarrow \forall p \in T_2 \ \ cerrado \ en \ T_2 \Rightarrow \phi^{-1}(p) \in T_1 \ \ cerrado \ en \ T_1$$

En nuestro caso:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ca+db & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

consideremos $\phi : R^4 \to R^3$ definida por

$$\forall (a, \ b, \ c, \ d) \in R^4, \phi(a, \ b, \ c, \ d) = \left(a^2+b^2, \ \ c^2+d^2, \ \ ac+bd\right) = (1, \ 1, \ 0) \in R^3$$

Teniéndose, en definitiva, que $M \xrightarrow{f} R^4 \xrightarrow{\phi} R^3$. Vamos a ver que ϕ es continua:

Podemos considerar que es $\phi = \left(\phi_1, \ \phi_2, \ \phi_3\right)$, siendo:

$$\begin{cases} \phi_1 : R^4 \to R, & \phi_1(a, \ b, \ c) = \ a^2+b^2 = 1 \\ \phi_2 : R^4 \to R, & \phi_2(a, \ b, \ c) = \ c^2+d^2 = 1 \\ \phi_3 : R^4 \to R, & \phi_3(a, \ b, \ c) = \ ac+bd = 0 \end{cases}$$

donde se observa que son ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 continuas, por lo cual $\phi = (\phi_1, \quad \phi_2, \quad \phi_3)$ también es continua.

En definitiva:

$$\phi \ continua \wedge (1,1,0) \ cerrado \ en \ R^3 \Rightarrow \phi^{-1}(1,1,0) \ cerrado \ en \ R^4 \Rightarrow \phi^{-1}(1,1,0) \ cerrado \ en \ R^4 \wedge$$
$$\wedge \ \phi^{-1}(1,1,0) = f(M) \Rightarrow f(M) \ cerrado \ en \ R^4.$$

PROBLEMA 002 (150706)

Resuelva la ecuación

$$2x^3-9x^2+32x+75=0$$

sabiendo que admite una raíz compleja de módulo 5.

SOLUCION:

Si la ecuación dada admite una solución compleja *x=a+b.i*, también admitirá como solución el número complejo conjugado *x=a-b.i*, por lo que, al ser tres las raíces de la ecuación, se podrá factorizar el polinomio de la forma:

$$(x-(a+bi)).(x-(a-bi)).(x-d)=0$$

donde *d* es la tercera raíz, real, de la ecuación.

Si sustituimos en la ecuación la raiz *x=a+b.i* se tiene:

$$2(a^3-3ab^2)-9(a^2-b^2)+32a+75+i[2(3a^2b-b^3)-18ab+32b]=0$$

Si sustituimos en la ecuación la raiz *x=a-b.i* se tiene:

$$2(a^3-3ab^2)-9(a^2-b^2)+32a+75-i[2(3a^2b-b^3)-18ab+32b]=0$$

Restando ambas expresiones:

$$i[4(3a^2b-b^3)-36ab+64b]=0$$

o bien

$$4bi.(3a^2-b^2-9a+16)=0$$

de lo que se deduce que $b=0$ o bien $3a^2-b^2-9a+16=0$

. Si es b=0, entonces x=a=5 sería solución, pero comprobamos aplicando la regla de Ruffini que no verifica la ecuación, por tanto no ha de ser b=0.

. Si es $3a^2-b^2-9a+16=0$, eliminamos la b pues del enunciado es $a^2+b^2=25$, y queda:

$$4a^2-9a-9=0$$

cuyas soluciones son *a=3* y *a=-3/4.* Lo que nos indica que el par de raíces complejas conjugadas de la ecuación dada son

$$\{3+4i,\ 3-4i\} \text{ o bien } \left\{-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{391}}{4}i,\ -\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{391}}{4}i\right\}$$

Si el par de raíces complejas conjugadas es $\{3+4i,\ 3-4i\}$, se verifica que

$$\left(x-(3+4i)\right).\left(x-(3-4i)\right).\left(x-d\right)=0$$

o bien

$$\left(x^2-6x+25\right).(x-d)=0$$

o sea: $2x^3-9x^2+32x+75=\left(x^2-6x+25\right).(x-d)=0$, lo que nos indica que

$$x-d=\frac{2x^3-9x^2+32x+75}{x^2-6x+25}=2x+3$$

siendo exacta la división, por lo que las raíces buscadas son

$$\boxed{\begin{array}{l} x=3+4i \\ x=3-4i \\ x=-3/2 \end{array}}$$

Si el par de raíces complejas conjugadas es $\left\{-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{391}}{4}i,\ -\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{391}}{4}i\right\}$ se habría de verificar que

$$\left(x-(-3/4+(\sqrt{391}/4)i)\right).\left(x-(-3/4-(\sqrt{391}/4)i)\right).\left(x-d\right)=0$$

o bien: $\left(x^2+\frac{3}{2}x+25\right).(x-d)=0$ de donde $x-d=\dfrac{2x^3-9x^2+32x+75}{x^2+\frac{3}{2}x+25}$, pero esta división no es exacta pues da un resto =375, por lo cual los números complejos indicados $\left\{-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{391}}{4}i,\ -\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{391}}{4}i\right\}$ no son soluciones de la ecuación dada.

PROBLEMA 001 (170606)

Sea el espacio vectorial V de los polinomios de grado menor o igual que tres con coordenadas reales, y sea $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ una base. Se pide:

a) **Obtener la base dual $\widehat{B}$ en el espacio dual $\widehat{V}$.**
b) **Si $F(\varphi) = \varphi(4)$ es una forma lineal, hallar sus coordenadas respecto de la base dual $\widehat{B}$.**
c) **Hallar las coordenadas en la base dual $\widehat{B}$ de la forma lineal:**

$$I(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x).dx$$

SOLUCION:

a) Sean $u_1 = 1, u_2 = x, u_3 = x^2, u_4 = x^3$ una base del espacio V. La base dual en el espacio $\widehat{V}$ está constituida por las aplicaciones $f_{u_i} : V \to R$ tales que

$$f_{u_i}(u_j) = \delta_{ij}, \ \ i, j = 1,2,3,4$$

por consiguiente, la base dual es:

$$\widehat{B} = \{f_{u_1}, f_{u_2}, f_{u_3}, f_{u_4}\}$$

b) Si es $F \in \widehat{V}$, se tiene que $F = \sum_{k=1}^{4} \lambda_k f_{u_k}$ y serán sus coordenadas:

$$F(u_j) = \sum_{k=1}^{4} \lambda_k f_{u_k}(u_j) = \lambda_j, \ j = 1,2,3,4$$

Por tanto, si es $F(\varphi) = \varphi(4)$ se tiene que es $F(x^m) = 4^m$, por tanto, es

$$F(u_1) = F(1) = 1, \ F(u_2) = F(x) = 4, \ F(u_3) = F(x^2) = 16, \ F(u_4) = F(x^3) = 64$$

y las cuatro coordenadas de *F* en la base dual son:

$$\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 4, \ \lambda_3 = 16, \ \lambda_4 = 64$$

c) Se tiene, al igual que en el apartado anterior:

$$I(u_j) = \sum_{k=1}^{4} \lambda_k f_{u_k}(u_j) = \lambda_j, \ j = 1,2,3,4$$

por tanto:

$$I(u_1) = \int_0^1 1.dx = x\Big|_0^1 = 1,$$

$$I(u_2) = \int_0^1 x.dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2},$$

$$I(u_3) = \int_0^1 x^2.dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$I(u_4) = \int_0^1 x^3.dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

y las coordenadas en la base dual son, por tanto:

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \frac{1}{2},\ \lambda_3 = \frac{1}{3},\ \lambda_4 = \frac{1}{4}$$