RESOLVIENDO PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 021 (291207)

a) Siendo $a_n(x) = n.x.e^{-nx^2}$ averiguar si

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 a_n(x).dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} a_n(x).dx$$

b) Explicar el porqué del resultado obtenido en a).

SOLUCIÓN:

a) $$\int_0^1 n.x.e^{-nx^2}.dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 n.(-2x).e^{-nx^2}.dx = -\frac{1}{2}\int_0^{-n} e^t.dt = \frac{1}{2}\int_{-n}^0 e^t.dt = \frac{1}{2}e^t\Big|_{-n}^0 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e^n}\right)$$

por tanto:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 a_n(x).dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 n.x.e^{-nx^2}.dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e^n}\right) = \frac{1}{2}$$

por otra parte:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{nx}{e^{nx^2}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{x}{x^2.e^{nx^2}} = 0$$

por lo cual:

$$\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} a_n(x).dx = 0$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 a_n(x).dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} a_n(x).dx}$$

b) Del apartado anterior se deduce que la convergencia de la sucesión $\left(a_n(x)\right)$ no converge uniformemente. Veámoslo:

Para que exista convergencia uniforme, ha de ser:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N / \forall n \geq n_0, \left|a_n(x)\right| < \varepsilon, \ \ \forall x \in [0,1]$$

sin embargo, tomando un $x = \frac{1}{\sqrt{n}} \in [0,1]$:

$$\left|a\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right| = \left|n.\frac{1}{\sqrt{n}}.e^{-n.\frac{1}{n}}\right| = \frac{1}{e}.\frac{n}{\sqrt{n}}$$

y para n suficientemente grande es

$$\frac{1}{e}.\frac{n}{\sqrt{n}} > \in \Rightarrow \left|a_n(\frac{1}{\sqrt{n}})\right| > \in \Rightarrow \text{convergencia no uniforme}$$

PROBLEMA 020 (011207)

Desarrollar en serie y estudiar la convergencia de la expresión

$$y = x.arctgx - L\sqrt{1+x^2}$$

SOLUCIÓN:

a) Desarrollo en serie:

- Desarrollo de *x.arctgx*: hacemos $z = arctgx$ y calculamos su derivada: $z' = \left(1+x^2\right)^{-1}$. Se tiene que $z' = \left(1+x^2\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}.x^{2k}$, por lo cual es

$$arc.tgx = \int z'.dx = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}.\int x^{2k}.dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{-1}{k}}{2k+1}.x^{2k+1} \Rightarrow x.arctgx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{-1}{k}}{2k+1}.x^{2k+2}$$

- Desarrollo de $L\sqrt{1+x^2}$: hacemos $u = L\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}L\left(1+x^2\right)$ y calculamos su derivada: $u' = \frac{x}{1+x^2} = x.\left(1+x^2\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}.x^{2k+1} \Rightarrow L\sqrt{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}.\int x^{2k+1}.dx =$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{-1}{k}}{k+1}.x^{2(k+1)}$$

Finalmente, el desarrollo de toda la expresión es:

$$y = x.arctgx - L\sqrt{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right).x^{2k+2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{-1}{k}}{2(k+1)(2k+1)}.x^{2x+2} = \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^6}{5.6} - \frac{x^8}{7.8} + \ldots$$

b) Estudio de la convergencia:

Aplicamos el criterio del cociente:

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{\binom{-1}{k+1} .2.(k+1).(2k+1)}{\binom{-1}{k} .2.(k+2).(2k+2)} .x^2 \right| = \left| x^2 \right|$$

y la serie converge para $-1 < x < 1$

para $|x| = 1$ es indecidible por el criterio del cociente, y se tiene:

$$y(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{-1}{k}}{2.(k+1).(2k+1)}$$

y siendo $\binom{-1}{k} = (-1)^k$: $\quad y(1) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k . \frac{1}{2.(k+1).(2k+1)}$

que es serie alternada, donde se verifica que

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{2.(k+1).(2k+1)} = 0$$

luego, por el criterio de Leibnitz

$$(a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n \geq ... \ \wedge \ \lim a_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n converg)$$

la serie converge para *x=1.*

Por tanto, resulta:

Campo de convergencia: $-1 \leq x \leq 1$

PROBLEMA 019 (031107)

Sea 2Z el anillo de los enteros pares.

a) ¿Cuáles son los ideales principales de 2Z?.
b) ¿Cuáles son los ideales primos de 2Z?.
c) ¿Cuáles son los ideales maximales de 2Z?.
d) ¿Todo ideal maximal es primo?.
e) Si es I un ideal maximal de 2Z, ¿es 2Z/I un cuerpo?.

SOLUCIÓN:

a) Si I es un ideal de *2Z*, entonces $I' = \{z \in Z / 2z \in I\}$ es también ideal de *Z*, cumpliéndose que la intersección $I' \cap 2Z = I$. Para todo ideal *I′ de Z se verifica que su intersección con 2Z es ideal de 2Z:*

$$I' \; ideal \; de \; Z \Rightarrow I' \cap 2Z \; ideal \; de \; 2Z$$

y puesto que todo ideal de *Z* es principal, se tiene que todos los ideales de *2Z* son también ideales principales.

b) Supongamos que es $I = (2p)$ un ideal de *2Z.* Si p no es primo, entonces existirán enteros r y s tales que *p=r.s* con $|r| > 1, |s| > 1$, y en este caso $(2p)$ no es un ideal primo puesto que se verifica que

$$2r \notin (2p), 2s \notin (2p), \; 2r.2s = 2.(2p) \in (2p),$$

Si p es primo se tiene que $a.b \in (2p) \Rightarrow a \in (2p) \wedge b \in (2p), si \; p \neq 2$

En resumen, los ideales primos de 2Z son los engendrados por

$$2p / p \; primo \wedge p \neq 2$$

c) Sea $I = (2p)$ un ideal de *2Z*. Si *p* no es número primo, $p = r.s, con \; |r| > 1, |s| > 1$, entonces $I = (2p)$ no es maximal ya que $(2p) \subset (2r)$. Luego, *p* ha de ser primo.

Si p es primo y $(2p) \subset (2q)$ se tendría que $p = k.q$ en contradicción con que p es primo.

En resumen, los ideales maximales de 2Z son los engendrados por

$$2p / p \; primo$$

d) Existe un ideal maximal que no es primo (es el caso p=2). Es el ideal *(4).*

Por tanto, no es cierto que todo ideal maximal es primo.

e) Para que *2Z/I* sea cuerpo es necesario que el anillo *2Z* sea unitario. En nuestro caso 2Z no tiene elemento unidad, por lo que no es cuerpo *2Z/I*

$$2Z/(2p) \text{ no es cuerpo}$$

PROBLEMA 018 (061007)

Probar que para que la ecuación con coeficientes reales

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \quad a \neq 0$$

tenga todas sus raíces de módulo unidad es necesario y suficiente que se cumpla:

$$\begin{array}{ll} a = e & |4a| \geq |b| \\ b = d & |2a + c| \geq |2b| \\ 8a^2 + b^2 \geq 4ac & 2a^2 + ac \geq 0 \end{array}$$

SOLUCIÓN:

Por ser $a \neq 0$, puede dividirse por a toda la ecuación:

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

y las condiciones que han de cumplirse serían:

$$\begin{array}{cc} e = 1 & |b| \leq 4 \\ b = d & |2 + c| \geq |2b| \\ 8 + b^2 \geq 4c & 2 + c \geq 0 \end{array}$$

a) Es condición necesaria:

Sean $x_{11} = m + ni, x_{12} = m - ni, x_{21} = r + si, x_{22} = r - si$ las cuatro raíces de módulo unidad:

$$|x_{11}| = |x_{12}| = |x_{21}| = |x_{22}| = 1$$

podemos plantear la factorización:

$$(x^2 + px + 1)(x^2 + qx + 1) = x^4 + (p + q)x^3 + (2 + pq)x^2 + (p + q)x + 1 = 0$$

con x_{11} y x_{12} raíces del primer factor y x_{21} y x_{22} raíces del segundo factor:

$$\left.\begin{array}{l} p = -(x_{11} + x_{12}) = -2m \\ q = -(x_{21} + x_{22}) = -2r \end{array}\right\} \rightarrow p + q = -2.(m + r)$$

y se cumplen las condiciones del enunciado:

1) $e = 1$ trivialmente.

2) $\left.\begin{array}{l} b = p+q \\ d = p+q \end{array}\right\} \rightarrow b = d$

3) Se tiene:

$$8+b^2 = 8+(p+q)^2 = 8+p^2+q^2+2pq = 8+p^2+q^2+4pq-2pq = 8+4pq+(p-q)^2$$

$$4c = 4(2+pq) = 8+4pq$$

lo que evidencia que $8+b^2 \geq 4c$, valiendo el signo = en el caso de que *p=q.*

4) Desarrollando la expresión de b:

$$\begin{array}{l} |b| = |p+q| \leq |p|+|q| = |-(x_{11}+x_{12})| + |-(x_{21}+x_{22})| = |x_{11}+x_{12}| + |x_{21}+x_{22}| \leq \\ \leq |x_{11}|+|x_{12}|+|x_{21}|+|x_{22}| = 1+1+1+1 = 4 \end{array}$$

5) Se tiene que $|2+c| = |2+2+pq| = |4+pq|$, y $|2b| = |2(p+q)|$, por tanto, elevando al cuadrado:

$$|2+c|^2 = 16+8pq+p^2q^2$$
$$|2b|^2 = 4(p+q)^2 = 4p^2+4q^2+8pq$$
$$|2+c|^2 - |2b|^2 = 16+p^2q^2-4p^2-4q^2 = \left(4-p^2\right)\left(4-q^2\right) \geq 0$$

(pues $|p| \leq 2,\ |q| \leq 2$)

entonces:

$$|2+c|^2 \geq |2b|^2 \Rightarrow |2+c| \geq |2b|$$

6) $2+c = 2+2+pq = 4+pq \geq 0$ (pues $-4 \leq pq \leq 4$)

b) Es condición suficiente:

$$\left.\begin{array}{r} e = 1 \\ b = d \end{array}\right\} \Rightarrow x^4+bx^3+cx^2+bx+1 = 0$$

que se puede escribir en la forma:

$$x^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2} = 0$$ (pues *x=0* no es raíz)

entonces queda así:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 + b.\left(x+\frac{1}{x}\right) + (c-2) = 0$$

con lo que, al hacer el cambio $u = x + \frac{1}{x}$, queda: $u^2 + bu + c - 2 = 0$. El discriminante de esta ecuación de 2º es $\Delta = b^2 - 4(c-2) = b^2 + 8 - 4c$, y como sabemos, por hipótesis que $8 + b^2 \geq 4c$ se tiene que $\Delta = b^2 + 8 - 4c \geq 0$, por lo tanto, la ecuación tiene sus dos soluciones reales:

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2} \in R \\ u_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2} \in R \end{cases}$$

entonces, desde la relación del cambio de variables:

$$u = x + \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 - ux + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 4}}{2}$$

$$x_{11} = \frac{u_1 + \sqrt{u_1^2 - 4}}{2}, \quad x_{12} = \frac{u_1 - \sqrt{u_1^2 - 4}}{2}, \quad x_{21} = \frac{u_2 + \sqrt{u_2^2 - 4}}{2}, \quad x_{22} = \frac{u_2 - \sqrt{u_2^2 - 4}}{2}$$

y por ser, como hemos visto, reales $u_1, u_2 \in R \Rightarrow u_1^2 - 4 \in R, u_2^2 - 4 \in R$, las soluciones anteriores x_{11} y x_{12} son complejas conjugadas, asimismo también x_{21} y x_{22}.

PROBLEMA 017 (080907)

Hallar las superficies en las que se verifique que el punto medio del segmento de normal comprendido entre la superficie y el plano XY está sobre

$$z^2 = x + y$$

SOLUCIÓN:

Sean las superficies: $F = F(x, y, z)$. Un vector normal a F será $\vec{n} = (F_x, F_y, F_z)$

Ecuaciones de la recta normal a F en un punto $A(x, y, z)$ de la misma:

$$\frac{X - x}{F_x} = \frac{Y - y}{F_y} = \frac{Z - z}{F_z}$$

La intersección B de la recta normal con el plano XY será:

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{X - x}{F_x} = \dfrac{Y - y}{F_y} = \dfrac{Z - z}{F_z} \\ Z = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{X - x}{F_x} = \frac{Y - y}{F_y} = -\frac{z}{F_z} \Rightarrow X = x - \frac{F_x}{F_z} z, Y = y - \frac{F_y}{F_z} z,\ \ Z = 0$$

Punto de corte B es, entonces: $B\left(x - \dfrac{F_x}{F_z} z, \quad y - \dfrac{F_y}{F_z} z, \quad 0 \right)$

El punto medio C del segmento AB es:

$$C\left(x - \frac{F_x}{2F_z} z, \quad y - \frac{F_y}{2F_z} z, \quad \frac{z}{2} \right)$$

Por pertenecer C a la superficie $z^2 = x + y$ será:

$$\left(\frac{z}{2} \right)^2 = x - \frac{F_x}{2F_z} z + y - \frac{F_y}{2F_z} z$$

o bien:

$$2z.F_x + 2z.F_y + (z^2 - 4(x + y)).F_z = 0$$

cuyo sistema característico es:

$$\frac{dx}{2z} = \frac{dy}{2z} = \frac{dz}{z^2 - 4(x + y)}$$

integración:

$$\frac{dx+dy}{4z}=\frac{dz}{z^2-4(x+y)}\Rightarrow\frac{d(x+y)}{4z}=\frac{dz}{z^2-4(x+y)}\Rightarrow\frac{dt}{4z}=\frac{dz}{z^2-4t}\Rightarrow z^2-4z.\frac{dz}{dt}=4t$$

hacemos $z^2=u$: $u-2.\frac{du}{dt}=4t$ (ec. dif. lineal de primer orden)
obtenemos una solución particular para t=0:

$$\begin{matrix} u_0=c_2.e^{at} \\ u'_0=c_2.a.e^{at}\end{matrix}\Rightarrow u_0-2u_0'=0\Rightarrow c_2-2ac_2=0\Rightarrow c_2(1-2a)=0\Rightarrow a=\frac{1}{2}\Rightarrow u_0=c_2.e^{\frac{1}{2}t}$$

Entonces es $u_0=c_2.e^{\frac{1}{2}t}$

Si es $u_1=A+Bt,$ será $u_1'=B$, de lo cual $u_1-2u_1'=A+Bt-2B=4t\Rightarrow\begin{cases}A=8\\B=4\end{cases}$

Se tiene entonces que

$$u=c_2.e^{\frac{1}{2}t}+8+4t\Rightarrow z^2=c_2.e^{\frac{1}{2}t}+8+4t=c_2.e^{\frac{1}{2}(x+y)}+8+4(x+y)\Rightarrow c_2=\frac{z^2-4(2+x+y)}{e^{\frac{x+y}{2}}}$$

Y las integrales primeras son:

$$c_1=x-y$$
$$c_2=\frac{z^2-4(2+x+y)}{e^{\frac{x+y}{2}}}$$

Ecuación de las superficies $F=F(x,y,z)$:

$$F=\varphi(c_1,c_2)=\varphi(x-y,\frac{z^2-4(2+x+y)}{e^{\frac{x+y}{2}}}),\qquad \varphi \text{ arbitraria}$$

PROBLEMA 016 (110807)

Como material para realizar experimentos aleatorios se dispone únicamente de dados (con caras numeradas de 1 al 6). Se desea:

a) Enunciar (clara y detalladamente, encerrándola en un recuadro) una regla, lo más sencilla posible, para efectuar un sorteo que permita adjudicar un premio a uno de los 67 jugadores, de modo que todos ellos tengan igual probabilidad de recibirlo.
b) Organizar un juego entre cinco jugadores que efectuarán apuestas iguales; para decidir el resultado de una partida se arrojan p dados iguales (a la vez, de modo que no debe considerarse el orden de los p resultados obtenidos); si dos de los dados presentan números iguales, la partida es nula y los jugadores recuperan sus apuestas; si los p dados presentan resultados diferentes, un solo jugador gana todo lo aportado. Para proceder así hay que elegir un valor conveniente de p y una regla que permita decidir el ganador a partir del resultado obtenido. Dar, en la forma indicada antes, una regla tal, con el valor de p, de modo que el juego resulte equitativo.
c) Problema análogo al caso b) para cuatro jugadores, en lugar de cinco.

SOLUCIÓN:

a) Haremos tres tiradas, A, B, C, con el mismo dado:

$$A = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$B = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$C = \{1,2,3,4,5,6\}$$

y consideremos el conjunto M de las ternas ordenadas de números que aparecen en la cara superior del dado al efectuar cada tirada:

$$M = \{(a,b,c) / a \in A, b \in B, c \in C\}$$

será entonces $card(M) = RV_6^3 = 216$.

Asignemos tres ternas fijas a cada jugador. Es decir, al jugador i-ésimo se le asignan:

$$\{(a_{ik}, b_{ik}, c_{ik})\}, \quad \begin{array}{l} k = 1,2,3 \\ i = 1,\ldots,67 \end{array}$$

en total se asignan $3x67 = 201$ ternas. Queda por tanto un resto de 15 ternas sin asignar. Este conjunto de 15 ternas lo llamaremos R.

Es decir, el conjunto de ternas asignadas es M-R, y el conjunto de ternas sin asignar es R, siendo $card(M-R)=201, \quad card(R)=15$

En estas condiciones damos la regla del juego:

> *Se lanza el dado 3 veces, A,B,C, con lo cual aparece una terna $(a',b',c')\in M$.*
>
> *Si $(a',b',c')\in M-R$, el jugador que tenga asignada tal terna gana el premio.*
>
> *Si $(a',b',c')\in R$, se repite el lanzamiento.*

b) Se trata de construir un conjunto M de p-plas de modo que se asigne el mismo número de ellas a cada uno de los cinco jugadores.

Puesto que no pueden repetirse los elementos de cada p-pla, ni interviene el orden, será:

$$card(M)=\binom{6}{p}$$

Puesto que han de repartirse entre cinco, interesará (de ser posible) que:

$$card(M)=5.k,\ k\in N$$

Es decir,

$$\left.\begin{array}{r} card(M)=\binom{6}{p} \\ card(M)=5.k,\ \ k\in N \end{array}\right\} \Rightarrow \binom{6}{p}=5.k,\ \ k\in N$$

buscamos el mínimo *p*:

$$\binom{6}{0}\neq 5.k,\quad \binom{6}{1}\neq 5.k,\quad \binom{6}{2}=15=5k,\ \ (k=2)$$

entonces, el valor más simple de *p* resulta ser *p = 2* (dos dados).

Asignaremos 3 de los pares del conjunto M a cada jugador, con lo cual se obtiene ya la regla del juego:

Se lanzan dos dados, que nos dan el par de dígitos (a,b).

Si los números que constituyen el par (a,b) son distintos $(a \neq b)$ *gana la partida el jugador que tenga asignado dicho par.*

Si ambos números son iguales, se repite el lanzamiento.

c) Al ser ahora cuatro los jugadores, se tendrá:

$$\left.\begin{array}{r} card(M) = \binom{6}{p} \\ card(M) = 4.k,\ \ k \in N \end{array}\right\} \Rightarrow \binom{6}{p} = 4.k,\ \ k \in N$$

$$\binom{6}{0} \neq 4.k,\ \ \binom{6}{1} \neq 4.k,\ \ \binom{6}{2} \neq 4.k,\ \ \binom{6}{3} = 20 = 4k,\ \ (k=5)$$

por tanto, el valor más simple de *p* es ahora *p=3.*

Asignamos 5 ternas a cada jugador, y la regla de juego es:

Se lanzan 3 dados. Aparece una terna (a,b,c).

Si en la terna los 3 dígitos son distintos $(a \neq b \neq c \neq a)$ *ganará la partida el jugador que tenga asignada la terna.*

Si al menos dos de los tres números son iguales, se repetirá el lanzamiento.

PROBLEMA 015 (140707)

Si *a* es un elemento de un grupo, *(G,.),* sea S_a la permutación del conjunto *G* que a cada *x€G* le asigna el elemento *a.x*. Demostrar que si *G* es de orden par, la permutación S_a es par.

SOLUCIÓN:

Consideremos dos hipótesis: 1) que el elemento *a* genera al grupo *G*, y 2) que el elemento *a* no genera al grupo *G*.

1) a es generador del grupo:

Si es n el orden de G, se tiene que para cualquier elemento *x* de *G* es:

$$\{x, ax, a^2x, ..., a^{n-1}x\}$$

llamando e al elemento neutro del grupo, $(a^n = e)$, la permutación S_a indicada es la permutación circular $\{1,2,...,n-1,n\}$ que genera a todo el grupo *G*:

$$G = \{e, a, a^2, ..., a^{n-1}\}$$

Dicha permutación presenta las n-1 trasposiciones $(1,2),(2,3),...,(n-1,n)$. Como *n* es un número impar, *n-1* será par. Por tanto, el número de trasposiciones de la permutación circular es par, lo que indica, por definición, que es una permutación par.

2) *a* no genera al grupo:

Consideremos *p* como el orden de *a*. Se tiene que *a* genera entonces al subgrupo $G_a = \{e, a, a^2, ..., a^{p-1}\}$

El grupo G queda descompuesto entonces en *q* clases, *clase1, clase2, ..., clase3*, en donde cada clase está formada por los elementos

$$clasei = (x_i, a.x_i, ..., a^{p-1}.x_i), \ \ x_i \in G, \quad i = 1,2...,q$$

y p es impar, pues debe dividir a *n*. Consideremos que la *clase1* es el subgrupo G_a.

Si suponemos cada clase, clasei, ordenada de esta manera, la restricción de la permutación S_a a *clasei* será una permutación circular, *Ci*, por ser *p* impar. Si ordenamos todo el grupo G colocando sucesivamente los elementos de la *clase1 (Ga), clase2, ..., claseq*, se tiene que es obviamente:

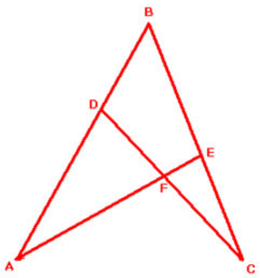
$$S_a = C_1.C_2...C_q$$

y siendo cada Ci una permutación par, deducimos que Sa es permutación par.

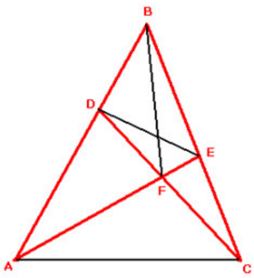
PROBLEMA 014 (160607)

Dado un cuadrilátero completo, se considera el triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados de uno de los triángulos definidos por tres de los lados del cuadrilátero. Demostrar que dicho triángulo es homológico con el triángulo diagonal y que el eje de homología no depende de la elección del primer triángulo.

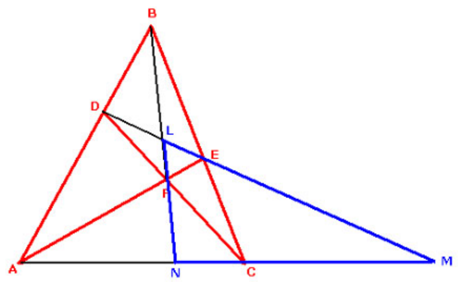
Notas:
Cuadrilátero completo: cuadrilátero con hasta 6 vértices.
Diagonales: rectas que unen vértices no consecutivos (tres)
Triángulo diagonal: triángulo que contiene a las tres diagonales.
Triángulos homológicos: tienen vértices homólogos situados sobre tres rectas concurrentes.



LADOS: AB, BC, CD y AE
VÉRTICES: A, B, C, D, E y F



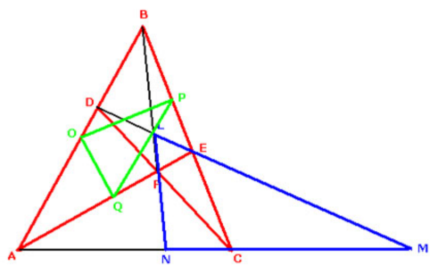
DIAGONALES: AC, BF y DE



DIAGONALES: AC, BF y DE

TRIANGULO DIAGONAL: Lados: LM, MN y NL (contiene a las tres diagonales)

SOLUCIÓN:

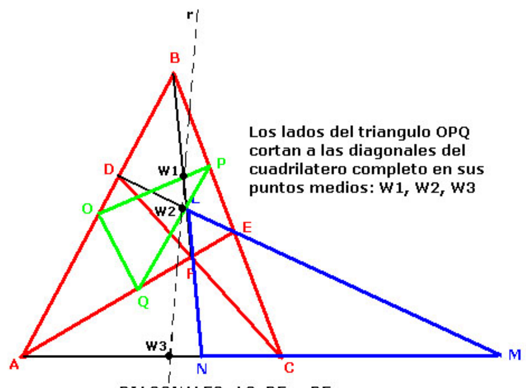


DIAGONALES: AC, BF y DE

TRIANGULO DIAGONAL: Lados: LM, MN y NL (contiene a las tres diagonales)

TRIÁNGULO CUYOS VÉRTICES SON LOS PUNTOS MEDIOS DE LOS LADOS DE UNO DE LOS DOS TRIÁNGULOS QUE DEFINE EL CUADRILÁTERO: Lados: OP, PQ y QO

FIG 1



DIAGONALES: AC, BF y DE

FIG 2

Si probamos que los puntos de corte de los lados homólogos de ambos triángulos, W1, W2 y W3, están alineados, entonces concluimos que ambos triángulos son homológicos, en virtud del Teorema de Desargues: "Dos triángulos son homológicos (sus vértices homólogos están situados sobre tres rectas concurrentes) si y solo si los puntos de corte de sus lados homólogos están alineados".

Por tanto, el problema se reduce a probar que los puntos W1, W2, W3 están sobre una misma recta r.

Hallemos los tres puntos. Para ello fijaremos como ejes de coordenadas las rectas BD (eje OX) y BE (eje OY) en la figura

a) determinación del punto W1:
El punto W1 es el punto medio del segmento BF que definen los puntos B(0,0) y F(f,k). Por consiguiente tal punto es

$$W1\left(\frac{f}{2},\frac{k}{2}\right)$$

b) determinación del punto W2:
El punto W2 es el punto medio del segmento DE definido por los puntos D(d,0) y E(0,e). Por tanto es

$$W2\left(\frac{d}{2},\frac{e}{2}\right)$$

c) determinación del punto W3:
El punto W3 es el punto medio del segmento AC, que delimitan los puntos A(a,0) y C(0,c), donde tanto a como c es necesario determinarlos en función de los puntos B, D, F y E de antes, pues A está en la recta BD y C está en la recta BE.

- Para determinar el punto A(a,0) escribimos la ecuación de la recta que pasa por los puntos E y F y hacemos a continuación y=0:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & e & 1 \\ f & k & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & e & 1 \\ f & k & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x = \frac{ef}{e-k}$$

  por tanto, el punto A es

$$A\left(\frac{ef}{e-k},0\right)$$

- Para determinar el punto C(0,c) escribimos la ecuación de la recta que pasa por los puntos D y F y hacemos a continuación x=0:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ d & 0 & 1 \\ f & k & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & y & 1 \\ d & 0 & 1 \\ f & k & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow y = \frac{dk}{d-f}$$

  por tanto, el punto C es

$$C\left(0,\frac{dk}{d-f}\right)$$

  En definitiva, el punto W3 viene expresado por

$$W3\left(\frac{ef}{2(e-k)},\frac{dk}{2(d-f)}\right)$$

Están alineados. Para comprobar que están en la misma línea recta bastará comprobar que se anula el determinante que definen los tres puntos:

$$\begin{vmatrix} \frac{f}{2} & \frac{k}{2} & 1 \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & 1 \\ \frac{ef}{2(e-k)} & \frac{dk}{2(d-f)} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Por consiguiente los dos triángulos son nomológicos. El eje de homología es el mismo si se toma cualquiera de los cuatro triángulos que define el cuadrilátero completo.

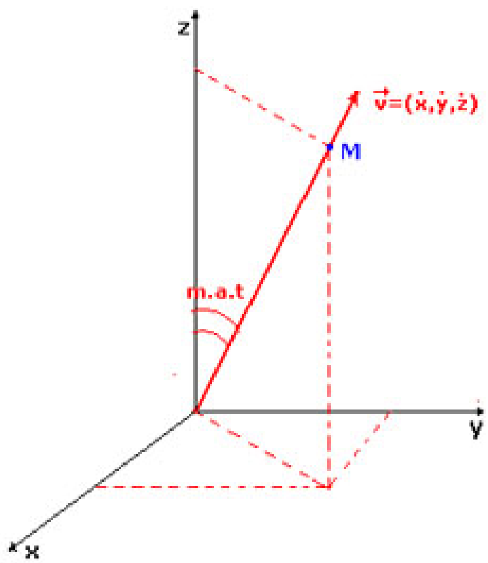
PROBLEMA 013 (190507)

Un punto móvil, *M(x,y,z)*, tiene por coordenadas, en función del tiempo *t*:

$$x(t) = (1+m).\cos(1-m).at + (1-m).\cos(1-m).at$$
$$y(t) = (1+m).sen(1-m).at + (1-m).sen(1-m).at$$

Se desea la expresión de *z(t)* sabiendo que el vector velocidad de *M* forma un ángulo igual a *m.a.t* con el eje *OZ.*

SOLUCION:



se tiene:

$$\frac{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}{\dot{z}} = tg(mat) \Rightarrow dz = \frac{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}{tg(mat)}.dt$$

por lo cual:

$$z(t) = \int \frac{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}{tg(mat)}.dt$$

Determinamos las componentes de velocidad según los ejes x e y:

$$\dot{x}(t) = -(1-m^2).a.[sen((1-m)at) + sen((1+m)at)] = -2(1-m^2).a.sen(at).\cos(mat)$$
$$\dot{y}(t) = (1-m^2).a.[\cos((1-m)at) + \cos((1+m)at)] = 2(1-m^2).a.\cos(at).\cos(mat)$$

por tanto, se obtiene:

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2 = 4(1-m^2)^2.a^2.sen^2(at).\cos^2(mat) + 4(1-m^2)^2.a^2.\cos^2(at).\cos^2(mat) =$$
$$= 4(1-m^2)^2.a^2.\cos^2(mat).(sen^2(at)+\cos^2(at)) = 4(1-m^2)^2.a^2.\cos^2(mat)$$

o sea, $\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} = 2(1-m^2).a.\cos(mat)$, de donde es:

$$\frac{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}{tg(mat)}=\frac{2(1-m^2).a.\cos(mat)}{\dfrac{sen(mat)}{\cos(mat)}}=\frac{2(1-m^2).a.\cos^2(mat)}{sen(mat)}=\frac{2(1-m^2).a.(1-sen^2(mat))}{sen(mat)}=$$

$$=2(1-m^2).a.\frac{1}{sen(mat)}-2(1-m^2).a.sen(mat)$$

Por tanto, al sustituir en la integral:

$$z(t)=\int\frac{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}{tg(mat)}.dt=\int\left(2(1-m^2).a.\frac{1}{sen(mat)}-2(1-m^2).a.sen(mat)\right).dt=$$

$$=\int 2(1-m^2).a.\frac{dt}{sen(mat)}-\int 2(1-m^2).a.sen(mat).dt=2(1-m^2).\frac{a}{ma}.L\left(tg(\frac{mat}{2})\right)+$$

$$+2(1-m^2).\frac{a}{ma}.\cos(mat)+C=2\frac{1-m^2}{m}\left[L\left(tg(\frac{mat}{2})\right)+\cos(mat)\right]+C$$

$$\boxed{z(t)=2\frac{1-m^2}{m}\left[L\left(tg(\frac{mat}{2})\right)+\cos(mat)\right]+C}$$

PROBLEMA 012 (210407)

Situar histórica y matemáticamente a GAUSS, CAUCHY, HILBERT, BOURBAKI, COHEN y GALOIS.

(nombre completo, fecha y lugar de nacimiento y fallecimiento, en su caso, y mención resumida de su trabajo)

SOLUCIÓN:

GAUSS:
Carl Friedrich Gauss
Nacimiento: 1777 en Brunswick
Fallecimiento: 1855 en Gotinga
Trabajo: prácticamente en todas las ramas de la matemática de su tiempo.

CAUCHY:
Agustin Luis de Cauchy
Nacimiento: 1789 en París
Fallecimiento: 1857 en Sceaux
Trabajo: Series, Teoría de la Integración.

HILBERT:
David Hilbert
Nacimiento: 1862 en Königsberg
Fallecimiento: 1943 en Gotinga
Trabajo: Geometría, Fundamentación de la Matemática.

BOURBAKI:
Nicolás Bourbaki (grupo de estudiosos de la matemática, constituido en Francia por los cinco fundadores siguientes: H. Cartan, C. Chevalley, J. Desarte, J. Dieudonné y A. Weil).
Nacimiento: 1933 en París
Trabajo: Elementos de Matemática (desde 1940 han ido apareciendo 35 volúmenes, periódicamente revisados).
Los *Elementos* de Bourbaki constituye una obra de referencia de los temas desarrollados en la época, tales como Teoría de Conjuntos, Álgebra, Topología General, Funciones de una Variable Real, Integración, Espacios Vectoriales Topológicos, Grupos de Lie, etc.. Ha tenido gran influencia en los matemáticos posteriores.

COHEN:
Paul Joseph Cohen
Nacimiento: 1934 en Long Branch.
Trabajo: Análisis Armónico, Ecuaciones en Derivadas Parciales, Hipótesis del Continuo (probó su indecibilidad).

GALOIS:
Evariste Galois
Nacimiento: 1811 en Bourg-la-Reine
Fallecimiento: 1832 en París.
Trabajo: Álgebra Pura (Teoría de Galois en álgebra de Cuerpos)

PROBLEMA 011 (240307)

Sea P_n el número de permutaciones u del conjunto $\{1,2,...,n\}$ tales que $\forall x \in \{1,2,...,n\}$, se cumple la condición de que $u(x) \neq x$.

a) Establecer la relación:

$$n! = P_n + \binom{n}{1}.P_{n-1} + ... + \binom{n}{n-2}.P_2 + 1$$

b) Calcular:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{P_n}{n!}$$

SOLUCIÓN:

a) las permutaciones de los n elementos pueden clasificarse en las siguientes clases disjuntas:

1ª clase: permutaciones para las que $u(x) \neq x, \forall x \in \{1,2,...,n\}$. Número total: P_n.

2ª clase: Permutaciones para las que $u(x) = x$ en un solo elemento. Como este elemento puede ser cualquiera, hay en total $\binom{n}{1}$ subclases, cada una de las cuales conteniendo Pn-1 elementos. Número total: $\binom{n}{1}.P_{n-1}$.

3ª clase: Permutaciones para las que $u(x) = x$ en solo dos elementos. Número total: $\binom{n}{2}.P_{n-2}$

... ...

... ...

n-1_ésima clase: Permutaciones para las que $u(x) = x$ en n-2 elementos. Número total: $\binom{n}{n-2}.P_2$.

N_ésima clase: Permutaciones para las que $u(x) = x$ en n-1 elementos. Número total: 1 (la identidad).

Puesto que son clases disjuntas, el número total es la suma de todas ellas:

$$\boxed{n! = P_n + \binom{n}{1}.P_{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-2}.P_2 + 1}$$

b) De la expresión anterior:

$$1 = \frac{P_n}{n!} + \frac{1}{1!}.\frac{P_{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}.\frac{P_2}{2!} + \frac{1}{n!}$$

cuando $n \to \infty$:

$$1 = \lim_{n \to \infty} \frac{P_n}{n!}\left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \lim_{n \to \infty} \frac{P_n}{n!}$$

o sea:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{P_n}{n!} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}}$$

y, puesto que, por definición, es:

$$e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}.x^n, \quad \forall x \in R$$

se deduce que si *x=1*: $e = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$, por tanto:

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \frac{P_n}{n!} = \frac{1}{e}}$$

PROBLEMA 010 (240207)

Sea $g : R^3 \to R^3$ definida por

$$g(x,y,z) = \left(e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y\right)$$

a) Probar que *g* es diferenciable y posee inversa diferenciable en un entorno de cada punto.
b) Probar que *g* no solo es inyectiva localmente sino que lo es globalmente.
c) Sea *A* el dominio limitado por los planos

x=0, y=0, z=0, y=1, x+z=1

Calcular el volumen de *g(A).*

SOLUCION:

a) - La función g es diferenciable, pues sus componentes son funciones de una variable real, diferenciables:

$$\forall (x,y,z) \in R^3,\ g(x,y,z) = \left(e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y\right)$$

$$\begin{array}{l} g_1 = e^{2y} + e^{2z} \\ g_2 = e^{2x} - e^{2z} \quad \Rightarrow \quad g_i \in C^1,\ i = 1,2,3 \\ g_3 = x - y \end{array}$$

-Veamos que tiene inversa diferenciable:
Por el Teorema de la Función Inversa, la función admite inversa en todo punto en el que no se anule el Jacobiano:

$$J_g = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_3}{\partial x} \\ \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_3}{\partial y} \\ \frac{\partial g_1}{\partial z} & \frac{\partial g_2}{\partial z} & \frac{\partial g_3}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2.e^{2x} & 1 \\ 2.e^{2y} & 0 & -1 \\ 2.e^{2z} & -2.e^{2z} & 0 \end{vmatrix} = -4.\left(e^{2x} + e^{2y}\right).e^{2z} \neq 0$$

Así, pues, en un punto genérico (x,y,z) la función admite inversa. Y la inversa es diferenciable por serlo la función $\vec{g}$.

b) Es inyectiva globalmente:
Vemos que, por el Teorema de la Función inversa, la función es inyectiva en forma local. Veamos que también es inyectiva, uno a uno, globalmente. Para ello consideremos dos puntos cualesquiera (x,y,z) y (x',y',z') tales que

$$g(x,y,z) = g(x',y',z')$$

Entonces:

$$e^{2y}+e^{2z}=e^{2y'}+e^{2z'}$$
$$e^{2x}-e^{2z}=e^{2x'}-e^{2z'}$$
$$x-y=x'-y'$$

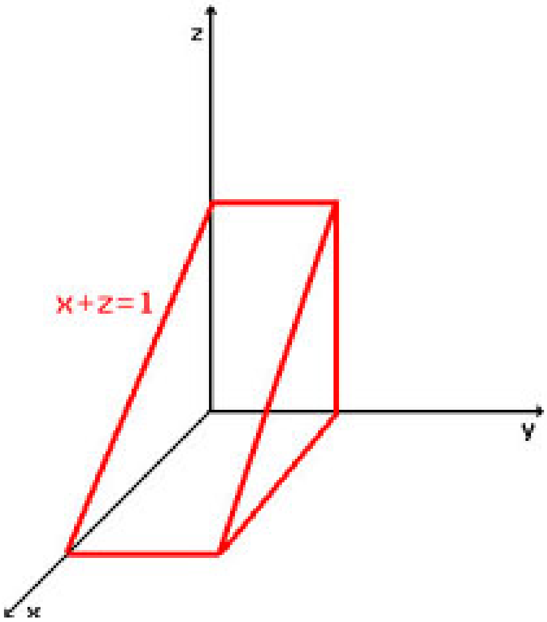
Sumando las dos primeras relaciones:

$$e^{2y}+e^{2x}=e^{2y'}+e^{2x'}\Rightarrow e^{2y}\left(e^{2(x-y)}+1\right)=e^{2y'}\left(e^{2(x'-y')}+1\right)$$

y de la tercera relación *(x-y=x'-y')*: $e^{2y}=e^{2y'}\Rightarrow y=y'$, y, de nuevo por la tercera de las relaciones: x=x'. Finalmente, de la primera relación: z=z'.

En definitiva, $g(x,y,z)=g(x',y',z')\Rightarrow(x,y,z)=(x',y',z')$, lo que nos indica que es una función globalmente inyectiva.

c) Volumen:



Volumen de *g(A):*

$$V=\int_{g(A)}dx'.dy'.dz'=\int_A\left|J_g\right|.dx.dy.dz=$$

$$=\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{1-x}4.(e^{2y}+e^{2x}).e^{2z}.dx.dy.dz=$$

$$=\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1}2.\left(e^{2y}+e^{2x}\right)\left(e^{2(1-x)}-1\right)dy.dx=$$

$$=\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1}2.e^{2y}.\left(e^{2(1-x)}-1\right)dy.dx+$$

$$+\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1}2.\left(e^{2}-e^{2x}\right)dy.dx=I_1+I_2$$

Resolviendo ambas integrales por separado:

$$I_1=\int_0^1 2.e^{2y}.dy\int_0^1\left(e^2.e^{-2x}-1\right)dx=(e^2-1).\frac{e^2-3}{2}$$

$$I_1=\int_0^1 2.dy\int_0^1\left(e^2.-e^{2x}\right)dx=e^2+1$$

Volumen: $V=\frac{1}{2}e^4-e^2+\frac{5}{2}$

PROBLEMA 009 (270107)

Computar:

1º) $Hom_z(Z, Z_n)$
2º) $Hom_z(Z_m, Z_n)$
3º) $Hom_z(Z_m, Z)$
4º) $Hom_z(Q, Z)$
5º) $Hom_z(Q, Q)$

Siendo:

Z: Anillo de los enteros.
Q: Cuerpo de los racionales.
Z_k: Clases de enteros módulo k.
$Hom_z(A, B)$: Homomorfismos de A en B.

SOLUCIÓN:

Consideraremos que se trata de homomorfismos de Z-módulos. Z_k es el conjunto de las clases modulo *k*, esto es, cada clase $[p]_k$ está formada por todos los enteros tales que al dividirlos por *k* dan un resto igual a *p*. Esto indica que el conjunto Z_k está formado por k elementos: $Z_k = \{[0]_k, [1]_k, ..., [k-1]_k\}$

1º) Si $f \in Hom_Z(Z, Z_n)$ se tiene que $f(0) = [0]_n$, donde es $[0]_n$ la clase de Z_n que contiene al cero (es decir, el conjunto de números enteros que son múltiplos de n).
Por ser Z un grupo monógeno infinito engendrado por el 1, el homomorfismo f quedará determinado si se conoce f(1). Veamos que f(1) puede ser un elemento cualquiera de Zn:

$$a)\ \forall a,b \in Z,\ f(a+b) = [(a+b).f(1)]_n = [a.f(1)]_n + [b.f(1)]_n = f(a) + f(b)$$

$$b)\ \forall \alpha, c \in Z,\ f(\alpha.c) = [\alpha.c.f(1)]_n = \alpha.[c.f(1)]_n = \alpha.f(c)$$

Por tanto, hay n homomorfismos, determinados si se conoce f(1).

2º) Si $f \in Hom_Z(Z_m, Z_n)$ se tiene que $f([0]_m) = [0]_n$. Siendo Z_m monógeno finito engendrado por $[1]_m$. El homomorfismo *f* quedará determinado si se conoce, en definitiva, $f([1]_m)$, que es uno de los enteros 0,1, ..., n-1, por lo que $f([a]_m) = [a.f([1]_m)]_n$
Supongamos que es $[a]_m = [b]_m$, es decir, que *a-b=k.m*, entonces será:

$$f([a]_m) = [a.f([1]_m)]_n = [b.f([1]_m)]_n = f([b]_m)$$

o sea, llamando $f([1]_m) = x$:

(a-b).x= kmx=h.n, siendo k arbitrario, por lo que debe dividir a mx. Por ser x<n, se deduce que m y n no son primos entre sí. Caso contrario, $Hom_z(Zm, Z_n)$ se reduciría al homomorfismo trivial: $f(a) = [0]_n, \forall a \in Z_m$

Si podemos elegir x de modo que sea mx múltiplo de m, se tiene trivialmente que:

$$f([a+b]_m)=[(a+b)x]_m=[ax+bx]_n=[ax]_n+[bx]_n=f([a]_m)+f([b]_m),\ \forall a,b\in Z$$

$$f(\lambda[a]_m)=f([\lambda a]_m)=[\lambda ax]_n=\lambda[ax]_n=\lambda.f([a]_m),\ \forall a\in Z$$

En consecuencia, $Hom_Z(Z_m,Z_n)$ consta de tantos elementos cuántas formas existan de elegir x entre $\{0,1,...,n-1\}$ de modo que *n* divida a *mx.*

3º) Se tiene que $Hom_Z(Z_m,Z)=\{0\}$, pues si fuera $f([1]_m)=x\neq 0$ resultaría que para $[a]_m=[b]_m,\ a\neq b:\quad f([a]_m)=ax=bx=f([b]_m)$, lo cual no sería cierto, salvo que x=0.

4º) Supongamos que $f\in Hom_Z(Q,Z)$ y que *f(1)=x*. Entonces:

$$f(n)=nx=f\left(m.\frac{n}{m}\right)=m.f\left(\frac{n}{m}\right)\Rightarrow f\left(\frac{n}{m}\right)=\frac{n}{m}x$$

por lo cual *x* es divisible por *m*, para todo *m*, lo que implica que es *x=0.* En definitiva es:

$$Hom_z(Q,Z)=\{0\}$$

5º) Es trivial probar que, para todo número racional $x\in Q$ la aplicación $f:Q\to Q$ tal que $f\left(\frac{n}{m}\right)=\frac{n}{m}x,$ pertenece a $Hom_z(Q,Q)$ y que todo elemento de $Hom_z(Q,Q)$ es de esa forma.

------oo0oo------

NOTA:

Para ver los problemas propuestos y resueltos en el año 2006, entrar en la dirección:

http://galeon.com/casanchi/problemas2006.pdf