RESOLVIENDO PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

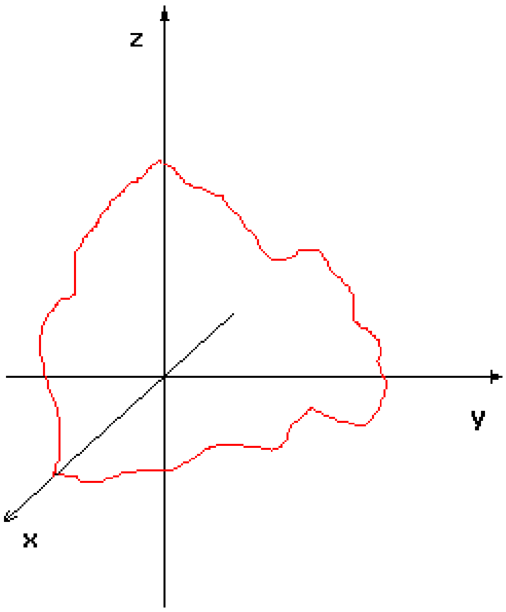
PROBLEMA 034 (271208)

Hallar el área de la porción de superficie definida por las condiciones

$$(x.\cos\alpha + y.sen\alpha)^2 + z^2 = 1,\ \ x \geq 0,\ \ y \geq 0,\ \ z \geq 0 \qquad (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$$

respecto de un sistema cartesiano de ejes rectangulaes en el espacio.

SOLUCIÓN:



$$S = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.dxdy$$

derivando con respecto a x:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{2(x.\cos\alpha + y.sen\alpha)}{2z}.\cos\alpha$$

derivando con respecto a y:

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{2(x.\cos\alpha + y.sen\alpha)}{2z}.sen\alpha$$

$$1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{(x.\cos\alpha + y.sen\alpha)^2}{z^2} = 1 + \frac{1 - z^2}{z^2} = \frac{1}{z^2}$$

$$S = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.dxdy = \iint \frac{1}{z} dx.dy = \int_0^{1/sen\alpha} dy \int_0^{1 - ysen\alpha/\cos\alpha} \frac{1}{z} dx =$$

$$= \frac{1}{\cos\alpha} \int_0^{1/sen\alpha} \left(\frac{\pi}{2} - arcsen(y.sen\alpha)\right).dy = \frac{\pi}{2.sen\alpha.\cos\alpha}$$

PROBLEMA 033 (291108)

Se considera la función de variables compleja

$$f(z)=\left(\frac{z}{1+z^2}\right)^3$$

definida en su dominio de holomorfía en el plano complejo. Se pide:

1) Obtener el desarrollo en serie de potencias de z en un entorno del punto $z=0$, indicando su campo de convergencia.

2) Obtener el desarrollo en serie de potencias de z en un entorno del punto $z=\infty$ del plano complejo ampliado, indicando su campo de convergencia.

3) Calcular la integral $\int_C f(z).dz$, siendo *C* la circunferencia de centro *0* y radio *2*, recorrida una sola vez en sentido positivo.

SOLUCIÓN:

1) Se tiene:

$$f(z)=\left(\frac{z}{1+z^2}\right)^3=z^3\left(1+z^2\right)^{-3}=z^3\sum_{n\geq 0}\binom{-3}{n}z^{2n}=\sum_{n\geq 0}\binom{-3}{n}z^{3+2n}=$$
$$=\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{(3+n-1)!}{2!.n!}z^{3+2n}=\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{(n+2)(n+1)}{2}z^{3+2n}$$

Radio de convergencia:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}}\frac{(n+2)(n+1)}{(n+3)(n+2)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|-\frac{n+1}{n+3}\right|=1$$

La serie converge en el recinto $|z|<1$. Veamos en la frontera del recinto (z=1):

$f(1)=\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{(2+n)(1+n)}{2}$, que es serie alternada y, por tanto, divergente.

Por tanto:

$$\boxed{f(z)=\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{(2+n)(1+n)}{2}z^{3+2n}\quad \text{converge en } |z|<1}$$

2) Haciendo z=1/t:

$$f(z)=\left(\frac{z}{1+z^2}\right)^3=\left(\frac{1/t^2}{1+1/t^2}\right)^3=\left(\frac{t}{1+t^2}\right)^3$$

Para $z\to\infty, t=0$:

$$\boxed{f(z)=\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{(2+n)(1+n)}{2}t^{3+2n}=\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{(2+n)(1+n)}{2}\frac{1}{z^{3+2n}}}$$

que converge en $|z|>1$

3) Polos de $f(z)=\left(\frac{z}{1+z^2}\right)^3$: $z=\pm i\ \ (triples)$

$$R_{z=i}=\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\left\{\frac{d^2}{dz^2}(z-i)^3f(z)\right\}=\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\left\{\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{z}{z+i}\right)^3\right\}=0$$

$$R_{z=-i}=\frac{1}{2!}\lim_{z\to -i}\left\{\frac{d^2}{dz^2}(z+i)^3f(z)\right\}=\frac{1}{2!}\lim_{z\to -i}\left\{\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{z}{z-i}\right)^3\right\}=0$$

Finalmente:

$$\int_C f(z).dz=2\pi i(R_{z=i}+R_{z=-i})=0$$

PROBLEMA 032 (011108)

Los animales de una cierta raza se clasifican en tres clases según que posean dos genes del tipo G **(clase de los dominantes, que denotaremos por 1), un gene del tipo** G **y otro del tipo** g **(clase de los híbridos, que denotaremos por 2) o dos genes del tipo** g **(clase de los recesivos, que denotaremos por 3). Se supone que la reproducción en esta raza de animales se hace siempre por cruce con un animal de la clase dominante (y otro de la clase i, para i=1,2,3) y que los hijos heredan siempre un gene de cada padre, con la misma probabilidad** (=1/2) **en el caso en que pueda ser** G **ó** g**.**
Denotemos por $p_{i,j}$ la probabilidad de que un animal de la clase j haya sido engendrado por intervención de otro de la clase i. Sea P la matriz $P=(p_{i,j})$, con $i,j=1,2,3$. Denotemos por p_i^{n+1} la probabilidad de que en la generación $n+1$ nazca un animal de la clase i y pongamos

$$P^{n+1} = \left(p_1^{n+1}, p_2^{n+1}, p_3^{n+1}\right)$$

Se pide:
1. Determinar la matriz P^{n+1} en función de n y de la matriz P^1 de la composición probable inicial de la población.
2. Suponiendo que dicha composición inicial sea $p_1^1 = 1/5,\ p_2^1 = 3/5,\ p_3^1 = 1/5$, determinar la composición probable P^{n+1} al cabo de n+1 generaciones. Hallar la composición límite p^{∞} cuando el número de generaciones tiende hacia el infinito.

SOLUCIÓN:

Teniendo en cuenta que, según el enunciado, el significado de $p_{i,j}$ es "la probabilidad de que sabiendo que ha intervenido en la procreación un animal de tipo i, se engendre un animal de tipo j", estudiemos los casos posibles para los cruces.

Los cruces que se pueden dar son:

- Animal tipo 1 con animal tipo 1: Todos los individuos heredan el gen G de cada padre (ambos son dominantes), luego resultan ser de tipo 1:

$$p_{1,1} = 1, \qquad p_{1,2} = 0, \qquad p_{1,3} = 0$$

- Animal tipo 1 con animal tipo 2: Hereda un gen G (por el dominante) y un gen G o un gen g, a partes iguales (por el híbrido):

$$p_{2,1} = 1/2, \qquad p_{2,2} = 1/2, \qquad p_{2,3} = 0$$

- Animal tipo 1 con animal tipo 3: Hereda un gen G (por el dominante) y un gen g (por el recesivo), luego todos son recesivos:

$$p_{3,1} = 0, \qquad p_{3,2} = 1, \qquad p_{3,3} = 0$$

Se tiene, entonces, la matriz:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Si es $\left(p_1^1, p_2^1, p_3^1\right)$. se tiene, para la segunda generación: $\left(p_1^2, p_2^2, p_3^2\right) = \left(p_1^1, p_2^1, p_3^1\right).P$

y para la tercera: $\left(p_1^3, p_2^3, p_3^3\right) = \left(p_1^2, p_2^2, p_3^2\right).P = \left(p_1^1, p_2^1, p_3^1\right).P^2$

y para la generación $n+1$: $\left(p_1^{n+1}, p_2^{n+1}, p_3^{n+1}\right) = \left(p_1^1, p_2^1, p_3^1\right).P^n$

Para obtener el resultado es preciso determinar la expresión de P^n:

Si elevamos al cuadrado: $P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$, y al cubo: $P^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7/8 & 1/8 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$

Aparentemente, pues, se ajustan las potencias a:

$$P^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-1/2^n & 1/2^n & 0 \\ 1-1/2^{n-1} & 1/2^{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

que debemos comprobar mediante inducción:

Se verifica para k=1: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-1/2 & 1/2 & 0 \\ 1-1/1 & 1/1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Supuesta cierta para k=h-1, será, para k=h:

$$P^h = P^{h-1}.P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-1/2^h & 1/2^h & 0 \\ 1-1/2^{h-1} & 1/2^{h-1} & 0 \end{pmatrix}$$

En definitiva, se tiene que:

$$\left(p_1^{n+1}, p_2^{n+1}, p_3^{n+1}\right) = \left(p_1^1, p_2^1, p_3^1\right).\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-1/2^n & 1/2^n & 0 \\ 1-1/2^{n-1} & 1/2^{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

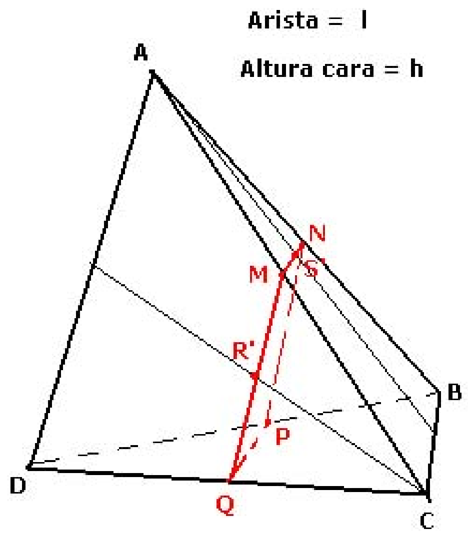
2) $p^{n+1} = \left(p_1^{n+1}, p_2^{n+1}, p_3^{n+1}\right) = \left(1/5, 3/5, 1/5\right).\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-1/2^n & 1/2^n & 0 \\ 1-1/2^{n-1} & 1/2^{n-1} & 0 \end{pmatrix} = \left(1-1/2^n \quad 1/2^n \quad 0\right)$

$$p^{\infty} = \lim p^{n+1} = (1,0,0)$$

PROBLEMA 031 (041008)

Se corta un tetraedro regular por un plano paralelo a dos aristas opuestas. Describir la figura que forma la sección y hallar en qué situación es máxima su área.

SOLUCIÓN:



Supongamos el corte que se muestra en la figura. Por construcción, se forma el cuadrilátero MNPQ, donde, teniendo en cuenta las condiciones impuestas:

QM es paralelo a DA y perpendicular a BC

MN es paralelo a BC y perpendicular a DA.

Por lo cual, QM es perpendicular a MN, lo que indica que el cuadrilátero del corte es un rectángulo.

Por otra parte se forman dos triángulos equiláteros semejantes en cada una de las caras, por ejemplo:

- en la cara ABC son semejantes los triángulos equiláteros ABC y ANM, lo que nos permite escribir la proporcionalidad para el lado dividido por la altura del triángulo):

$$\frac{l}{h} = \frac{MN}{AS'}$$

- en la cara ACD son semejantes los triángulos equiláteros CAD y CMQ, que permite escribir también la proporcionalidad para el lado dividido por la correspondiente altura:

$$\frac{l}{h} = \frac{MQ}{CR'}$$

Donde, obviamente, MN y MQ son lados perpendiculares del rectángulo de corte, y AS' y CR' son las altura de los triángulos menores. Si llamamos, por simplificar, $x = MN,\ y = MQ$, tendremos:

$$AS' = \frac{x.h}{l}, \qquad CR' = \frac{y.h}{l}$$

De la figura se observa, también, que $AS' + CR' = h$

por tanto, se tiene que:

$$\frac{xh}{l} + \frac{yh}{l} = h$$

de donde:

$$y = l - x$$

Para ver cuál sería la superficie máxima, escribamos la expresión de esa área y efectuemos las correspondientes derivadas:

$$S(x) = x.y = x.(l - x) = -x^2 + lx$$

$$S'(x) = -2x + l$$
$$S''(x) = -2$$

por consiguiente, el valor de x que anule a la primera derivada corresponde a un máximo de la función área S(x):

$$S'(x) = -2x + l = 0 \Rightarrow x = \frac{l}{2}, \quad y = l - x = l - \frac{l}{2} = \frac{l}{2}$$

y la superficie resultante es

$$S = x.y = \frac{l}{2}.\frac{l}{2} = \frac{l^2}{4}$$

En definitiva:

El área máxima del corte se obtiene cuando la sección se hace por la mitad de la arista. La sección en este caso es un cuadrado de lado $l/2$ (l arista del tetraedro), y cuya área es $S = l^2/4$.

PROBLEMA 030 (060908)

Se considera la ecuación diferencial

$$y' = máx\{x-2, y\}$$

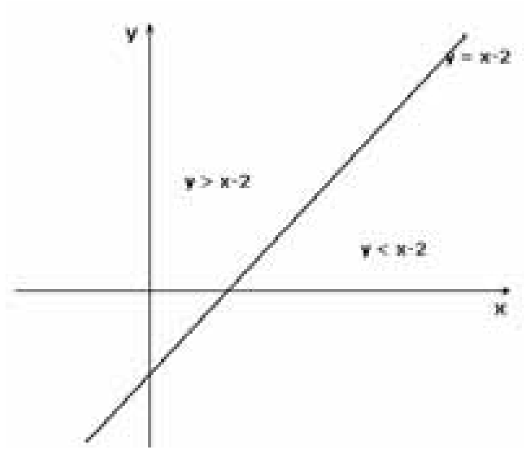
a) Demostrar la existencia y unicidad de una función definida en *R*, de clase *C¹(R)*, que la satisfaga y verifique la condición *y(0)=0* sin construirla explícitamente.

b) Hallar la expresión de dicha función solución comprobando que es de clase *C¹(R)*.

SOLUCIÓN:

$$f(x,y) = máx\{x-2, y\} = \begin{cases} y, & si\ y > x-2 \\ x-2, & si\ y \leq x-2 \end{cases}$$

a) Existencia y unicidad:



Continuidad de f(x,y):

si $y > x-2 \Rightarrow f(x,y) = y \Rightarrow f(x,y)\ \ continua$
si $y \leq x-2 \Rightarrow f(x,y) = x-2 \Rightarrow f(x,y)\ \ continua$
luego, $f(x,y)$ es $continua$ en todo el plano.

Carácter lipschitziano de $f(x,y)$:

si $y > x-2 \Rightarrow f(x,y_1) = y_1,\ \ f(x,y_2) = y_2 \Rightarrow |f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |y_1 - y_2|$
si $y < x-2 \Rightarrow f(x,y_1) = x-2,\ \ f(x,y_2) = x-2 \Rightarrow |f(x,y_1) - f(x,y_2)| = 0$
si $y = x-2 \Rightarrow f(x,y_1) = y_1 = x-2,\ \ \ f(x,y_2) = x-2 \Rightarrow |f(x,y_1) - f(x,y_2)| =$

$$= |y_1 - (x-2)| = |(x-2) - y_2| < |y_1 - y_2| = .|y_2 - y_1|$$

Luego, $\forall N \geq 1, \ |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq N.|y_1 - y_2|$

Por tanto, por el teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales de primer orden: $\dot{\exists} y / y' = f(x,y)$

Puesto que $y' = f(x,y)$ y $f(x,y)$ es continua, será también $y \in C^1$

b) Cálculo de la expresión de *y=f(x):*

$$f(x,y) = máx\{x-2, y\} = \begin{cases} y, & si \ y > x-2 \\ x-2, & si \ y \leq x-2 \end{cases}$$

Si $y > x - 2 \Rightarrow y' = y \Rightarrow y_1 = c_1 e^x$, y como ha de ser $y(0) = 0$:

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = c_1 e^0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0$$

Si $y \leq x - 2 \Rightarrow y' = x - 2 \Rightarrow y_2 = \frac{1}{2}x^2 - 2x + c_2$, y como ha de ser y=0 en el punto de corte con la recta y=x-2, es decir, como ha de pasar por el punto (2,0) para que la gráfica sea continua:

Si x=2 es y = 0 $\Rightarrow y(2) = \frac{1}{2}2^2 - 2.2 + c_2 = 0 \Rightarrow -2 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 2$, lo que quiere decir que ha de ser $y_2 = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = \frac{1}{2}(x-2)^2$

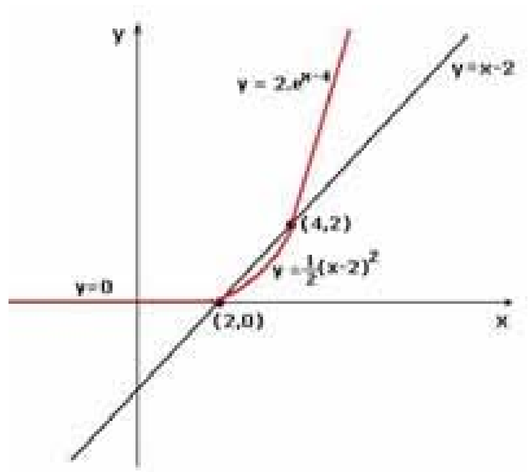
Por otra parte, $y_2 = \frac{1}{2}(x-2)^2$ vuelve a cortar a la recta y= x-2 en x=4, por lo que también debe pasar por el punto (4,2). Es decir, para que siga siendo continua en ese punto, la función $y_3 = c_3.e^x$ ha de pasar por (4,2):

$y(4) = c_3.e^4 = 2 \Rightarrow c_3 = 2.e^{-4}$ o sea, $y_3 = 2.e^{x-4}$

En resumen, la función sería la siguiente:

$$y = \begin{cases} 0, & si\ x \le 2 \\ \dfrac{1}{2}(x-2)^2, & 2 < x \le 4 \\ 2.e^{x-4}, & x > 4 \end{cases}$$

gráficamente:



PROBLEMA 029 (090808)

Sea (X,T) un espacio topológico, y $f : XxR^2 \to R$ una aplicación continua (R y R^2 con la topología usual). Sea p un punto de X, y M el conjunto de R^2 dado por

$$M = \{(x,y) \in R^2, 0 \le x \le 1, y = 0\}$$

a) Si $0 \notin f(\{p\}xM)$, estudiar si existe un entorno U de M en R^2 tal que $0 \notin f(\{p\}xU)$.

b) Demostrar que el conjunto de puntos $p \in X$ tal que para todo $q \in M$ es $f(p,q) \neq 0$, es abierto en X.

SOLUCIÓN:

a) Las hipótesis son:

$f : XxR^2 \to R \quad continua$
$p \in X$
$0 \notin f(\{p\}xM)$

De estas hipótesis se deduce:

$\forall q \in M,\ f(p,q) \in f(\{p\}xM) \Rightarrow f(p,q) = x \neq 0$

$f \quad continua \Rightarrow \ni E(x)\ entorno\ abierto\ de\ x\ en\ R / f^{-1}(E(x))\ es\ abierto\ de\ XxR^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists E(q), E(p)\ entornos\ abiertos\ de\ p\ y\ q\ en\ X\ y\ R^2\ respectivamente\ tales\ que$

$\{p\}xE(q) \subseteq E(p)xE(q) \subseteq f^{-1}(E(x))$

entonces:

$$\boxed{U = \bigcup_{q \in M} E(q)\ \ es\ un\ entorno\ de\ M\ que\ cumple\ la\ condición\ exigida.}$$

b) M cerrado y acotado en R^2 $\Rightarrow$ M compacto en R^2.

Sea $P = \{p \in X / \forall q \in M, f(p,q) \neq 0\}$

$\forall q \in M, (p,q) \in f^{-1}(R - \{0\})$. Entonces:

$\forall q \in M, \exists E^q(p), E(q)$ *entornos abiertos de p y de q tales que*

$$E^q(p) x E(q) \subseteq f^{-1}(R - \{0\})$$

y es $\{E(q) / q \in M\}$ un recubrimiento abierto de *M,* del cual por ser *M* compacto, existe un recubrimiento abierto finito:

$$\{E(q_1),...,E(q_n)\}$$

y sean $E^{q_i}(p)$ los entornos de *p* abiertos tales que:

$$E^{q_i}(p) x E(q_i) \subseteq f^{-1}(R - \{0\})$$

llamando:

$$E = \bigcap_{q_i = 1} E^{q_1}(p)$$

siendo, pues, *E* un entorno abierto de *p* tal que:

$$\begin{aligned} &ExM \subseteq f^{-1}(R - \{0\}) \\ &E \subset P \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} &\forall p \in P, \exists E \text{ entorno abierto de } p \text{ tal que } E \subset P \Rightarrow \\ &\Rightarrow P = \{p \in X / f(p,q) \neq 0\} \text{ es abierto} \end{aligned}$$

PROBLEMA 028 (120708)

Dada la función $f(x)=\dfrac{K}{1+x^2}$ definida en $(-\infty,+\infty)$, se pide:

c) Determinar *K* para que *f(x)* sea una función de densidad.
d) Hallar la función de distribución.
e) Calcular la probabilidad $p(-2\leq X\leq +2)$.

SOLUCIÓN:

a) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx=1\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} k\frac{dx}{1+x^2}=k.arctgx\Big|_{-\infty}^{+\infty}=k\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=k.\pi\Rightarrow k=\frac{1}{\pi}$$

b) $$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx\Rightarrow F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\pi}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{\pi}\left(arctgx+\frac{\pi}{2}\right)$$

c)
$$P(-2\leq x\leq 2)=F(2)-F(-2)=\frac{1}{\pi}\left(arctg(2)+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{\pi}\left(arctg(-2)+\frac{\pi}{2}\right)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(arctg(2)-arctg(-2)\right)$$

PROBLEMA 027 (140608)

Sea *f* la función de variable compleja:

$$f(z)=\frac{z^2}{\left(1+z^2\right)^2}$$

y *C(0,2)* la circunferencia de centro *0* y radio *2*.

a) Obtener una expresión del desarrollo de Laurent de f(z) válido en:
   a1) El conjunto de los complejos z con $|z|<1$.
   a2) Idem con $|z|>1$.

b) Hallar: $\int_C f(z).dz$

c) Si g(x) es la función dada por $g(x)=\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}$, determinar: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}.dx$

   Razonando previamente la convergencia.

SOLUCIÓN:

a) $f(z)=z^2.\left(1+z^2\right)^{-2}$

a1)

$$f(z)=z^2.\sum_{n\geq 0}\binom{-2}{n}z^{2n}=\sum_{n\geq 0}\binom{-2}{n}z^{2(n+1)}=\sum_{n\geq 0}(-1)^{n+2}.(n+1).z^{2n+2}=\sum_{n\geq 0}(-1)^{n+2}.n.z^{2n}$$

convergencia:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}.\frac{z^{2n+1}}{z^{2n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}.z\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|.\lim_{n\to\infty}|z|=1.\lim_{n\to\infty}|z|=|z|<1$$

y para *z=1* diverge.

$$\boxed{f(z)=\sum_{n\geq 0}(-1)^{n+2}.n.z^{2n}\ \text{ es válido en } |z|<1}$$

a2) haciendo $z=1/w$ en a1):

$$f(w) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1}.n.\frac{1}{w^{2n}}$$ válido en $\left|w^{-1}\right| < 1 \Rightarrow \text{válido en } |w| > 1$

$$\boxed{f(z) = \sum_{n\geq 0} (-1)^{n+2}.n.\frac{1}{z^{2n}} \text{ es válido en } |z| > 1}$$

b) Polos: $1 + z^2 = 0, \quad z = \pm i$ (dobles), quedan dentro de C(0,2).
Residuos:

$$a_{-1}(i) = \lim_{z\to i} \frac{1}{(2-1)!}\left\{\frac{d}{dz}(z-i)^2 f(z)\right\} = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\frac{z^2}{(z+i)^2} = -\frac{1}{4}i$$

$$a_{-2}(-i) = \lim_{z\to -i}\frac{1}{(2-1)!}\left\{\frac{d}{dz}(z+i)^2 f(z)\right\} = \lim_{z\to -i} \frac{d}{dz}\frac{z^2}{(z-i)^2} = \frac{1}{4}i$$

por tanto:

$$\int_C f(z).dz = 2\pi i\left(a_{-1}(i) + a_{-2}(-i)\right) = 2\pi i.0 = 0$$

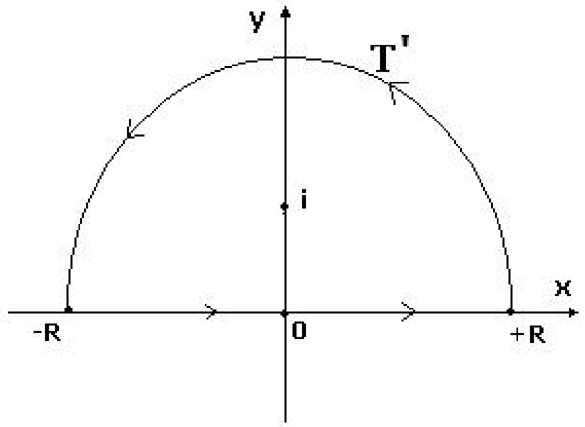
$$\boxed{\int_C f(z).dz = 0}$$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}dx$ es integral impropia de 1ª especie

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2}.dx$ es integral impropia de 1ª especie convergente. Comparando por paso al límite, se tiene:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2/(1+x^2)^2}{1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{(1+x^2)^2} = 1$$, luego la integral dada es convergente en C.

Para integrarla en el camino cerrado Γ de la figura, constituido por el tramo rectilineo sobre el ejeo x comprendido entre –R y +R, y el tramo curvo (semicircunferencia) que hemos denominado Γ'.



Camino total: T= T'+[-R,R]

Puesto que el único polo interior al recinto Γ es *z=+i* se tiene que la integral compleja viene dada por

$$\int_{\Gamma} f(z).dz = 2\pi i(-\frac{1}{4}i) = \frac{\pi}{2}$$

por tanto, desglosando esta integral en los dos tramos del camino, que hemos llamado Γ' y [-R,+R], se tiene que:

$$\int_{\Gamma} f(z).dz = \int_{-R}^{R} f(x).dx + \int_{\Gamma'} f(z).dz \Rightarrow \int_{-R}^{R} f(x).dx = \int_{\Gamma} f(z).dz - \int_{\Gamma'} f(z).dz = \frac{\pi}{2} - \int_{\Gamma'} f(z).dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{R} f(x).dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_{\Gamma'} f(z).dz \Rightarrow \int_{0}^{R} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}.dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_{\Gamma'} f(z).dz$$

tomando límites para $R \to \infty$:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}.dx = \lim_{R \to \infty} \int_{0}^{R} \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}.dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma'} \frac{z^2}{(1+z^2)^2}.dz = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

PROBLEMA 026 (170508)

Hallar la ecuación de una cuádrica con centro en O*(1,-2,-1)* sabiendo que

a) Tiene un cono asintótico $Y \equiv x^2 + y^2 + 3z^2 - 4xz = 0$.
b) Los puntos *M(1,1,0)* y *N(0,3,1)* son conjugados respecto de ella.

SOLUCIÓN:

La ecuación de una cuádrica es

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{01}x + 2a_{02}y + 2a_{03}z + a_{00} = 0$$

La ecuación del cono asintótico:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0$$

La ecuación de los centros (α, β, γ):

$$\begin{array}{lllll} a_{01} + & a_{11}\alpha + & a_{21}\beta + & a_{31}\gamma = & 0 \\ a_{02} + & a_{12}\alpha + & a_{22}\beta + & a_{32}\gamma = & 0 \\ a_{03} + & a_{13}\alpha + & a_{23}\beta + & a_{33}\gamma = & 0 \end{array}$$

La ecuación de conjugación de dos puntos M(m_1, m_2, m_3) y N(n_1, n_2, n_3):

$$\begin{pmatrix} 1 & m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{03} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$$

En el caso del enunciado:

- de ser $x^2 + y^2 + 3z^2 - 4xz = 0$ el cono asintótico, se tiene:

$$a_{11} = 1, a_{22} = 1, a_{33} = 3, a_{13} = -2, a_{12} = 0, a_{23} = 0$$

- de ser $(\alpha, \beta, \gamma) = (1,-2,-1)$ un centro:

$$\begin{cases} a_{00} + & a_{11} - & 2a_{21} - & a_{31} = & 0 \\ a_{02} + & a_{12} - & 2a_{22} - & a_{32} = & 0 \\ a_{03} + & a_{13} - & 2a_{23} - & a_{33} = & 0 \end{cases}$$

de donde se obtiene al sustituir:

$$\begin{cases} a_{01} + & 1 - & 2.0 - & (-2) = & 0 \\ a_{02} + & 0 - & 2.1 - & 0 = & 0 \\ a_{03} + & (-2) - & 2.0 - & 3 = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{01} + & 3 = & 0 \\ a_{02} - & 2 = & 0 \\ a_{03} - & 5 = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a_{01} = & -3 \\ a_{02} = & 2 \\ a_{03} = & 5 \end{matrix}$$

- de ser conjugados los puntos *M(1,1,0)* y *N(0,3,1)*, se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & -3 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

O bien:

$$\begin{pmatrix} a_{00} - 3 + 2, & -3 + 1, & 2 + 1, & 5 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{00} - 1, & -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{00} + 11 = 0 \Rightarrow a_{00} = -11$$

en definitiva, la ecuación de la cuádrica es:

$$\boxed{x^2 + y^2 + 3z^2 - 4xz - 6x + 4y + 10z - 11 = 0}$$

PROBLEMA 025 (190408)

Sea V es espacio vectorial de las funciones continuas en $[-\pi,\pi]$ y T el endomorfismo de V dado por

$$T(f)(x)=\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos(x-t)).f(t).dt,\quad f(t)\in V$$

Se pide:

c) Probar que *T(V)* es de dimensión finita y hallar una base.
d) Determinar *Ker(T).*
e) Hallar los valores propios y los vectores propios de T.

SOLUCIÓN:

a) siendo $\cos(x-t)=\cos x.\cos t+senx.sent$, se tiene que

$$T(f)(x)=\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos(x-t)).f(t).dt=\int_{-\pi}^{\pi}f(t).dt+\cos x.\int_{-\pi}^{\pi}\cos t.f(t).dt+senx.\int_{-\pi}^{\pi}sent.f(t).dt$$

O sea:

$$\forall f\in V,\ T(f)=\varphi_1.1+\varphi_2.\cos x+\varphi_3.senx$$

y las funciones $\{1,\cos x,senx\}$ pertenecen al espacio T(V) pues son, respectivamente las imágenes de las funciones continuas en $[-\pi,\pi]$, $\frac{1}{2\pi},\cos t, sent$, ya que:

$$T\left(\frac{1}{2\pi}\right)=1$$
$$T(\cos t)=\cos x$$
$$T(sent)=senx$$

por tanto:

Dim T(V)=3

$B=\{1,\cos x,senx\}$ es base de T(V)

b) Determinación de Ker(f):

$Ker(T)=\{f\in V/T(f)=0\}$, o sea:

$$T(f)(x)=\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+\cos(x-t)\right).f(t).dt=0\Rightarrow\int_{-\pi}^{\pi}f(t).dt=0,\ \int_{-\pi}^{\pi}\cos t.f(t).dt=0,\int_{-\pi}^{\pi}sent.f(t).dt=0,$$

y puesto que los coeficientes de Fourier de una función f(t) en el intervalo $\left[-\pi,\pi\right]$ son de la forma:

$$a_n=\int_{-\pi}^{\pi}f(t).\cos nt.dt\quad y\quad b_n=\int_{-\pi}^{\pi}f(t).sennt.dt$$

se tiene que las funciones de Ker(T) son aquellas que tienen nulos los coeficientes a0, a1 y b1 en el desarrollo de Fourier en $\left[-\pi,\pi\right]$:

Ker(T)= $\left\{f(t)\in V\,/\,f(t)=\sum_{n\geq 2}^{\infty}\left(a_n.\cos nt+b_n.sennt\right)\right\}$

c) Valores propios y vectores propios:

$$T(1)(x)=\int_{-\pi}^{\pi}dt=2\pi,\quad T(\cos t)(x)=\left(\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 t.dt\right).\cos x=\pi.\cos x,\ T(\cos t)(x)=\left(\int_{-\pi}^{\pi}sen^2t.dt\right).senx=\pi.senx$$

Autovalores: $2\pi,\ \pi,\ \pi$

Autovectores: *1, cost, sent*

PROBLEMA 024 (220308)

Se considera la función *f* definida en los intervalos *(0,1)* y (1,+00) por

$$f(x) = \frac{x.Lx}{x^2 - 1}$$

Se pide:

a) Demostrar que eligiendo convenientemente *f(o)* y *f(1)* la función *f* es continua y derivable para $x \geq 0$.
b) Estudiar la variación de la función y construir su gráfica.

SOLUCIÓN:

a) Continuidad y derivabilidad:

- continuidad:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x.Lx}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{1 + 1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$$

para que sea continua en *x=0*, ha de ser *f(0)=0*.

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x.Lx}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x.Lx}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

para que sea continua en *x=1* ha de ser *f(1)=1/2.*

- derivabilidad:

$$f'(x) = \frac{(Lx + 1)(x^2 - 1) - 2x(xLx)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{(x^2 - 1) - (x^2 + 1).Lx}{(x^2 - 1)^2}$$

f'(x) existe $\forall x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$

en *x=0*: $\lim_{x \to 0} f'(x) = \infty$

en *x=1:* $\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} f'(x) = 0$

Luego, *f′(x) existe* $\forall x \geq 0$.

f(x) es continua y derivable en x, $\forall x \geq 0$ si *f(0)=0*. y *f(1)=1/2.*

b) La gráfica:

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2+1} = 0$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$

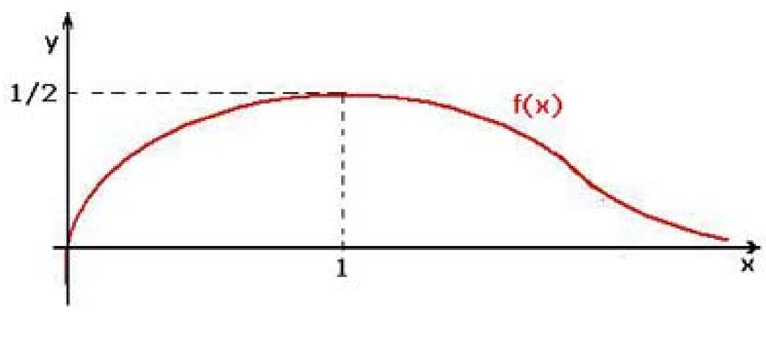
De ser:

$f'(x) = \frac{(x^2-1)-(x^2+1).Lx}{(x^2-1)^2}$ se tiene que

para $x \in (0,1)$, $f'(x) > 0 \to f(x)$ *creciente*

Para $x \in (1,\infty)$, $f'(x) < 0 \to f(x)$ *decreciente*

Tiene un máximo en x=1: $f(1) = 1/2$



PROBLEMA 023 (230208)

Se supone en R^2 un sistema de referencia ortogonal *OXY*. Hallar la ecuación de la envolvente de los ejes radicales de dos circunferencias *C* y *C'*, donde la circunferencia *C* es fija y tiene su centro en el eje *OY*, y la circunferencia *C'* es variable con centro en *OX* y tangente a la parábola $y^2 = 2x$.

SOLUCIÓN:

Circunferencia C (fija):

Centro (0, c), radio r; c,r constantes

Ecuación: $(x-0)^2+(y-c)^2-r^2=0; \quad x^2+y^2-2cy+c^2-r^2=0$

Circunferencia C' (variable, se trata del haz $C(\lambda)$):

Centro (λ, 0), radio r; λ,r variables relacionadas entre sí por f(λ)=r.

Ecuación: $(x-\lambda)^2+(y-0)^2-f(\lambda)^2=0; \quad x^2+y^2-2\lambda x+\lambda^2-f(\lambda)^2=0$

Determinación de la función $r=f(\lambda)$:

- pendiente de la normal a $y^2 = 2x$ en un punto genérico (x_0,y_0):
- expresión de la pendiente en función de los puntos (x_0,y_0) y (λ, 0):
- expresión de λ en función de (x_0,y_0): $1 = -x_0 + \lambda$
- cálculo de $r=f(\lambda)$:

$$r^2=d^2\left[(\lambda,0),(x_0,y_0)\right]=(\lambda-x_0)^2+y_0{}^2=1+2x_0=2\lambda-1\to r=\sqrt{2\lambda-1}$$

Ecuación del haz de circunferencias $C(\lambda)$:

$$x^2+y^2-2\lambda x+\lambda^2-2\lambda+1=0$$

Ecuación paramétrica del haz de ejes radicales:

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2-2cy+c^2-r^2=0 \\ x^2+y^2-2\lambda y+\lambda^2-2\lambda+1=0 \end{array}\right\} - restando \to 2\lambda x-2cy+2\lambda+c^2-r^2-\lambda^2-1=0$$

Derivando con respecto a λ:

$$2x-2(\lambda-1)=0$$

de donde resulta:

$$\lambda = x + 1$$

Envolvente:

$$2(x+1)x - 2cy - x^2 + c^2 - r^2 = 0$$

o sea:

$$x^2 + 2x - 2cy + c^2 - r^2 = 0$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2c}x^2 + \frac{1}{c}x + \frac{c^2 - r^2}{2c}}$$

PROBLEMA 022 (260108)

Sea la superficie S definida por

$$x = 2z.f(t) - \frac{4}{3}t^3$$
$$y = z.f'(t) - f(t)$$

a) Comprobar que se trata de una superficie reglada.
b) Hallar *f(t)* para que S sea desarrollable.
c) Pongamos en S que *f(t)=t.* Encontrar en un punto genérico el radio de curvatura y el plano osculador de la curvatura contenida en S y definida por la ecuación $(z-6t).dt + t.dz = 0$, pasando por *A(t,z)=(1,3).*

SOLUCIÓN:

a) Será preciso comprobar que la ecuación vectorial de S es de la forma

$$\vec{X}(u_1,u_2) = \vec{v}(u_1) + u_1.\vec{r}(u_2); \quad u_1, u_2 \ \text{parámetros}$$

donde son:

$$\vec{v}(u_2): \text{curva directriz}$$
$$\vec{r}(u_2): \text{curva generatriz}$$

haciendo $z=u_1$, $t=u_2$:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2z.f(t) - \frac{4}{3}t^3 \\ y = z.f'(t) - f(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 2u_1 f(u_2) - \frac{4}{3}u_2^3 \\ y = u_1 f'(u_2) - f(u_2) \\ z = u_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{X}(u_1,u_2) = (x,y,z) =$$

$$= \left(-\frac{4}{3}u_2^3, -f(u_2), 0\right) + u_1\left(2f(u_2), f'(u_2), 1\right)$$

y se tienen:

curva directriz: $\vec{v}(u_2) = \left(-\frac{4}{3}u_2^3, -f(u_2), 0\right)$

curva generatriz: $\vec{r}(u_2) = \left(2f(u_2), f'(u_2), 1\right)$

por tanto:

$$\boxed{\text{S es superficie reglada}}$$

b) Para que S sea desarrollable, el plano tangente ha de ser el mismo en todo punto de una misma generatriz. Como cada generatriz solo depende de u_2 (su ecuación es $\vec{r}(u_2)$), se tiene que el plano tangente sólo ha de depender de u_2. La condición a seguir es que no dependa de u_1 la ecuación del plano $(\vec{x}-\vec{a}).(\vec{X}_1 \wedge \vec{X}_2) = 0$, siendo *a* un punto fijo de la superficie S y *x* un punto genérico del plano.

Si es $\vec{X}_1 = \dfrac{\partial \vec{X}}{\partial u_1}, \quad \vec{X}_2 = \dfrac{\partial \vec{X}}{\partial u_2}$:

$$\vec{X}_1 \wedge \vec{X}_2 = \vec{r}(u_2) \wedge \left(\vec{v}'(u_2) + u_1.\vec{r}'(u_2)\right) = \vec{r}(u_2) \wedge \vec{v}'(u_2) + u_1 \vec{r}(u_2) \wedge \vec{r}'(u_2)$$

Los vectores $\vec{r}, \vec{v}, \vec{r}'$ han de ser coplanarios, lo cual ocurre en los tres casos siguientes:

1) $\vec{v}' \wedge \vec{r} = 0$, por lo que $\vec{v}' \wedge \vec{r} = \left(-f'(u_2), 4u_2, -4u_2^2.f'(u_2) + 2.f(u_2).f'(u_2)\right) = 0$
 pero al ser $4.u_2^2 \neq 0$, este caso no es posible en nuestro problema.

2) $\vec{r} \wedge \vec{r} = 0,$ de donde $\left(f''(u_2), 2f'(u_2), 2f'^2(u_2) - 2.f(u_2).f''(u_2)\right) = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow f(u_2) = c \ (constante\ arbitr.),$ y por ser $\vec{r}' = \left(2f'(u_2), f''(u_2), 0\right) = 0$, la superficie en este caso es una cónica $\left(\vec{r}' = 0\right)$.

3) $\vec{v}' \wedge \vec{r} \parallel \vec{r}' \wedge \vec{r}$ lo que implica que $\vec{v}' \wedge \vec{r} \parallel \vec{r}' \wedge \vec{r}$ y $\vec{v}'.\vec{r}'$ coplanarios $\Rightarrow \vec{v}' \parallel \vec{r}'$
 al ser $\vec{v}' \parallel \vec{r}'$ sus componentes son proporcionales:

$$\frac{2f'(u_2)}{4.u_2^2} = \frac{f''(u_2)}{f'(u_2)} \Rightarrow \frac{1}{2.u_2^2} = \frac{f''(u_2)}{f'^2(u_2)} = \left(-\frac{1}{f'(u_2)}\right)'$$

$$\left(-\frac{1}{f'(u_2)}\right)' = \frac{1}{2.u_2^2} \Rightarrow \frac{1}{f'(u_2)} = \frac{1}{2.u_2} + c \quad (c : constante\ arbitraria)$$

Si $c = 0$: $\quad f(u_2) = u_2^2 + K \quad (K : cte.\ arbitraria)$

Si $c \neq 0$: $\quad f'(u_2) = \dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{c}.\dfrac{1}{1 + 2.c.u_2} \Rightarrow f(u_2) = \dfrac{u_2}{c} - \dfrac{1}{2c^2}.L\left|1 + 2.c.u_2\right| + b$

(c,b, constantes arbitrarias)

y en este caso son $\vec{r}' \neq 0$ y $\vec{v}' \neq 0$, tratándose, por consiguiente, de un desarrollable tangencial.

Si $f(t) = cte$: Superficie cónica.
Si $f(t) = t^2 + cte$: Superficie desarrollable tangencial
Si $f(t) = \dfrac{t}{c} - \dfrac{1}{2c^2}.L\left|1 + 2ct\right| + b$: Superficie desarrollable tangencial (c, b, arbitrarias)

c) $\left(z - 6t\right).dt + t.dz = 0 \Leftrightarrow d(zt - 3t^2) = 0 \Rightarrow zt - 3t^2 = c$

por pasar por el punto (t,z)=(1,3), se verifica que: 3 - 3 = 0 = c, y la curva es, por consiguiente: $zt - 3t^2 = 0 \Rightarrow z = 3t$. Como está contenida en la superficie se cumple:

$$\begin{cases} x = 2z.f(t) - \frac{4}{3}.t^3 \\ y = z.f'(t) - f(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2zt - \frac{4}{3}.t^3 \\ y = z - t \end{cases} \qquad \left(f(t) = t\right)$$

sus ecuaciones paramétricas serán:

$$\begin{cases} x = 6t^2 - \frac{4}{3}t^3 \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$$

es decir, vectorialmente:

$$\vec{x} = \left(-\frac{4}{3}t^3 + 6t^2, 2t, 3t\right)$$

y sus derivadas primeras:

$$\vec{x}' = \left(-4t^2 + 12t, 2, 3\right)$$
$$\vec{x}'' = \left(-8t + 12, 0, 0\right)$$

hacemos el producto vectorial:

$$\vec{x}' \wedge \vec{x}'' = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ -4t^2 + 12t & 2 & 3 \\ -8t + 12 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left(0, -24t + 36, 16t - 24\right)$$

producto interno de $\vec{x}'$ por sí mismo:

$$\vec{x}'.\vec{x}' = \left(-4t^2 + 12t\right)^2 + 4 + 9 = \left(-4t^2 + 12t\right)^2 + 13$$

curvatura:

$$k^2 = \frac{\left(\vec{x}' \wedge \vec{x}''\right)\left(\vec{x}' \wedge \vec{x}''\right)}{\left(\vec{x}'.\vec{x}'\right)^3} = \frac{(-24t + 36)^2 + (16t - 24)^2}{\left[(-4t^2 + 12t)^2 + 13\right]^3}$$

Radio de curvatura:

$$R = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{\left(16t^4 - 96t^3 + 144t^2 + 13\right)^3}{576t^2 - 1728t + 1296}}$$

Vector binormal:

$$\vec{b} = \frac{\vec{x}' \wedge \vec{x}''}{\left|\vec{x}' \wedge \vec{x}''\right|} = \frac{1}{\sqrt{576t^2 - 1728t + 1296}}.\left(0,\ -24t + 36,\ 16t - 24)\right)$$

un vector en la dirección del vector binormal es, por ejemplo, para t=2:

$$\vec{b}(2) = \frac{1}{\sqrt{13}}.(0, \ -3, \ 2)$$

por ser en el plano oscilador $(\vec{x} - \vec{X}).\vec{b}(2) = 0$, la ecuación de este plano será:

$$\left(x + \frac{4}{3}t^3 - 6t^2, 4 - 2t, z - 3t\right).\frac{1}{\sqrt{13}}.(0, \ -3, \ 2) = 0$$

o sea: $-3y + 6t + 2z - 6t = 0$. En definitiva: $-3y + 2z = 0$