RESOLVIENDO PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 046 (261209)

Hallar el área de la superficie engendrada al girar un arco de cicloide

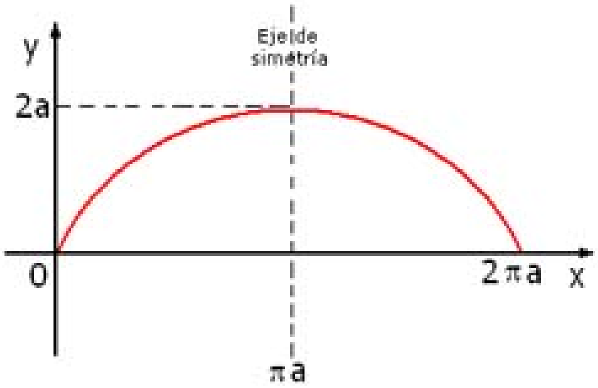
$$\begin{cases} x = a.(t - sent) \\ y = a.(1 - \cos t) \end{cases}$$

alrededor de su eje de simetría.

RESOLUCIÓN:

Fórmula que da la superficie de revolución:

$$S = 2\pi.\int_{x_o}^{x_1} (x - x_0).\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.dt$$



Para encontrar el eje de simetría, hallamos primero los dos puntos de corte con el eje x:

$$a.(1 - \cos t) = 0 \rightarrow \cos t = 1$$

por tanto:

$$t = 0, t = 2\pi$$

Si $t = 0 \rightarrow x = a.(0 - sen0) = 0$

Si $t = 2\pi \rightarrow x = a.(2\pi - sen2\pi) = 2\pi a$

$$S = 2\pi.\int_0^{\pi} (\pi a - x).\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.dt = 2\pi.\int_{\pi}^{0} (x - \pi a).\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.dt$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{a^2 + a^2\cos^2 t - 2a^2\cos t + a^2 sen^2 t} = a\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t} = 2a\sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}} = 2.a.sen\frac{t}{2}$$

$$x - \pi a = a.t - a.sent - a.\pi$$

$$S = 2\pi.\int_{\pi}^{0} (x - \pi a).\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.dt = 2\pi\int_{\pi}^{0} (at - asent - a\pi).2a.sen\frac{t}{2}.dt = 4\pi a^2\int_{\pi}^{0} t.sen\frac{t}{2}.dt -$$

$$- 4\pi a^2\int_{\pi}^{0} sent.sen\frac{t}{2}.dt - 4\pi^2 a^2\int_{\pi}^{0} sen\frac{t}{2}.dt =$$

$$=16\pi a^2\left(sen\frac{t}{2}-\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\right)\Bigg|_{\pi}^{0}-16\pi a^2\left(\frac{1}{3}sen^3\frac{t}{2}\right)\Bigg|_{\pi}^{0}+8\pi^2a^2\cos\frac{t}{2}\Bigg|_{\pi}^{0}=8\pi\left(\pi-\frac{4}{3}\right).a^2$$

PROBLEMA 045 (281109)

Dada la cónica $x^2 - y^2 - 1 = 0$. Se pide:

1) La matriz de dicha cónica.
2) La recta polar del punto $P(3,1)$.
3) Calcular a para que el punto $Q(a,2)$ sea conjugado de $P(3,1)$.
4) Determinar el polo de la recta $y=2x+1$.

RESOLUCIÓN:

1) Ecuación matricial:

$$(1,x,y).\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

que desarrollado es: $a_{00} + 2a_{01}x + 2a_{02}y + 2a_{12}xy + a_{11}x^2 + a_{22}y^2 = 0$

identificando con $x^2 - y^2 - 1 = 0$:

$$a_{00} = -1, \quad a_{01} = a_{02} = a_{12} = 0, \quad a_{11} = 1, \quad a_{22} = -1$$

por tanto:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2) Recta polar de $P(3,1)$:

$$(1, \quad 3, \quad 1)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0 \to (1, \quad 3, \quad 1)\begin{pmatrix} -1 \\ x \\ -y \end{pmatrix} = 0 \to y = 3x - 1$$

3) Cálculo de a:

$$(1, \quad 3, \quad 1)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \to (1, \quad 3, \quad 1)\begin{pmatrix} -1 \\ a \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \to 3a - 3 = 0 \to a = 1$$

4) Sea $P(m,d)$ el polo de $y=2x+1$:

$$(1, \quad m, \quad d)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0 \rightarrow (1, \quad m, \quad d)\begin{pmatrix} -1 \\ x \\ -y \end{pmatrix} = 0 \rightarrow -1 + mx - dy = 0$$

por tanto, $y = \frac{m}{d}x - \frac{1}{d}$, que al identificar con la recta dada $y = 2x + 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{m}{d} = 2 \\ -\frac{1}{d} = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} m = -2 \\ d = -1 \end{array} \rightarrow p(-2,-1)$$

PROBLEMA 044 (311009)

Un buque de carga, navegando 200 horas entre dos puntos situados en el Ecuador, ha recorrido 32º15'30". Se pide:

1º. Calcular en millas por hora la velocidad del barco (la milla es 1' de arco aproximadamente).

2º. Diferencia de horas en ambos puertos.

3º. El capitán conserva un reloj con la hora del puerto de partida y en un momento determinado se da cuenta de que está atrasado 20 minutos con la hora justa del punto en que se halla. ¿Qué diferencia de longitud existe entre aquel puerto y este punto?.

RESOLUCIÓN:

1º. Encontramos el total de millas recorridas: $32x60 + 15 + 0.5 = 1935{,}5$. Por tanto, el barco ha recorrido 1935,5 millas en 200 horas, lo cual nos da la velocidad:

$$v = \frac{1935{,}5}{200} = 9{,}6775\ millas / hora$$

2º. Puesto que 15º de arco en el ecuador corresponden a una hora de tiempo de rotación de la Tierra (pues 360º, una vuelta completa, corresponden a 24 horas), veamos que tiempo t le corresponde a 32º15'30":

$$t = \frac{32^{o}15'30''}{15^{o}} = 2h\ 9m\ 2s$$

3º. Si a cada 15º le corresponde una hora de diferencia, a 20 minutos le corresponderá, por consiguiente, una diferencia d:

$$d = \frac{20.15}{60} = 5^{o}$$

PROBLEMA 043 (031009)

Integrar, por desarrollo en serie, la ecuación diferencial:

$$y' = x^2 + y$$

RESOLUCIÓN:

Se trata de la ecuación diferencial $y' - y = x^2$, $\forall x$, x punto ordinario

Solución $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, $y'(x) = \sum_{n\geq 0} n.a_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0}(n+1).a_{n+1}x^n$

Al sustituir:

$$\sum_{n\geq 0}\left[(n+1).a_{n+1} - a_n\right]x^n = x^2$$

Coeficientes:

$$\begin{array}{lll}
n=0: & a_1 - a_0 = 0 & \rightarrow \quad a_1 = a_0 \\
n=1: & 2a_2 - a_1 = 0 & \rightarrow \quad a_2 = (1/2)\,a_0 \\
n=2: & 3a_3 - a_2 = 1 & \rightarrow \quad a_3 = (1/6)a_0 + (1/3) \\
n=3: & 4a_4 - a_3 = 0 & \rightarrow \quad a_4 = (1/24)a_0 + (1/12) \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \quad\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
n=k: & (k+1)a_{k+1} - a_k = 0 & \rightarrow \quad a_{k+1} = (1/(k+1).k....3.2).a_0 + (1/(k+1).k....3)
\end{array}$$

O sea:

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}a_0, & Si\ 0 \leq n \leq 2 \\ \dfrac{2}{n!} + \dfrac{1}{n!}a_0 & Si\ n \geq 3 \end{cases}$$

y la solución se escribiría así:

$$y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n=0}^{2} a_n x^n + \sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \sum_{n\geq 3} a_n x^n =$$

$$= a_0 + a_0 x + \frac{1}{2}a_0 x^2 + \sum_{n\geq 3}\left(\frac{2}{n!} + \frac{1}{n!}a_0\right)x^n = a_0\left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots\right) +$$

$$+ 2\left(\frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots\right) = a_0 \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}x^n + 2\left(\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}x^n - 1 - x - \frac{1}{2}x^2\right) =$$

$$= a_0 e^x + 2\left(e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2\right) = (a_0 + 2)e^x - x^2 - 2x - 2$$

En definitiva, la solución es: $\boxed{y(x) = c.e^{x} - x^{2} - 2x - 2}$

PROBLEMA 042 (050909)

Determínense las ecuaciones de las envolventes a los siguientes haces de curvas:

a) $x^2 = p.(2y-p)$ p: parámetro
b) $x^2+(y-q)^2 = q$ q: parámetro
c) $x^2+y^2-\frac{r^2}{2}x-2ry=0$ r: parámetro

RESOLUCIÓN:

a) $x^2 = p.(2y-p)$

Derivando la ecuación respecto al parámetro: $0 = 2y-2p$, de donde $p = y$
Sustituimos en la ecuación dada:

$$x^2 = y.(2y-y) \rightarrow x^2 = y^2 \rightarrow y = \pm x$$

envolvente:

$$\boxed{y = \pm x}$$

b) $x^2+(y-q)^2 = q$

Derivamos respecto al parámetro q: $2(y-q).(-1) = 1 \rightarrow y-q = -\frac{1}{2} \rightarrow q = y+\frac{1}{2}$
Sustituyendo:

$$x^2+(y-y-1/2)^2 = y+1/2 \rightarrow x^2+1/4 = y+1/2 \rightarrow x^2-y-1/4 = 0$$

Envolvente:

$$\boxed{4x^2-4y-1=0}$$

c) $x^2+y^2-\frac{r^2}{2}x-2ry=0$

Al derivar con respecto al parámetro r: $-rx-2y=0 \rightarrow r = -\frac{2y}{x}$

Sustituimos:

$$x^2 + y^2 - 2\frac{y^2}{x} + 4\frac{y^2}{x} = 0 \rightarrow x^3 + y^2 x - 2y^2 + 4y^2 = 0$$

Envolvente:

$$\boxed{x^3 + y^2 x - 2y^2 + 4y^2 = 0}$$

PROBLEMA 041 (080809)

En el espacio euclídeo de 3 dimensiones, y con referencia a tres ejes coordenados rectangulares X, Y, Z, se considera el cilindro que tiene por generatrices rectas paralelas a la recta r de ecuación

$$r \equiv \begin{cases} z = \sqrt{3}x \\ y = 0 \end{cases}$$

y directriz la curva c de ecuación

$$c \equiv \begin{cases} y^2 = 2x \\ z = 0 \end{cases}$$

Determinar las líneas situadas en este cilindro que sean de pendiente máxima respecto del plano z=0.

RESOLUCIÓN:

Dirección de la recta r: $r \equiv \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-0}{\sqrt{3}} \to \vec{d} = (1,0,\sqrt{3})$

Rectas paralelas a r (generatrices):

$$\frac{x-a}{1} = \frac{y-b}{0} = \frac{z-c}{\sqrt{3}} \to \begin{cases} x = z/\sqrt{3} + a - c/\sqrt{3} \\ y = b \end{cases}$$

Si llamamos, por simplificar, $A = a - c/\sqrt{3},\ B = b$, la ecuación de las generatrices es:

$$generatrices \equiv \begin{cases} x = z/\sqrt{3} + A \\ y = B \end{cases}$$

La ecuación del cilindro la obtenemos de la relación entre los parámetros A y B:

$$y^2 = 2x \wedge z = 0 \to B^2 = 2(z/\sqrt{3} + A) \wedge z = 0 \to B^2 = 2A$$

por tanto:

$$y^2 = 2(x - z/\sqrt{3})$$

o bien:

$$y^2 - 2x + 2z/\sqrt{3} = 0$$

Las líneas de máxima pendientes son aquellas contenidas en el cilindro que son ortogonales a las líneas de nivel, esto es, a las intersecciones del cilindro con los planos z=K paralelos a la base:

Líneas de nivel:

$$\begin{cases} y^2 - 2x + 2z/\sqrt{3} = 0 \\ z = k \end{cases}$$

es decir, se trata de las familias $y^2 - 2x + 2k/\sqrt{3} = 0$. Obtenemos la pendiente diferenciando:

$$2y.y'-2 = 0 \rightarrow y' = 1/y$$

y la pendientes de las líneas ortogonales:

$$y' = -\frac{1}{1/y} = -y$$

integrando, obtenemos la proyección en el plano z=0 de las líneas de pendiente máxima.

$$y = C.e^{-x}$$

Al estar contenidas en el cilindro, la ecuación de estas líneas será:

$$\begin{cases} y = C.e^{-x} \\ y^2 - 2x + \dfrac{2\sqrt{3}}{3} z = 0 \end{cases}$$

PROBLEMA 040 (110709)

En el plano R^2, con su topología habitual, se consideran los conjuntos

$$A = \{(x,y) \in R^2,\ x^2 + y^2 = 1\} \text{ y } B = \{(x,y) \in R^2,\ y = 1\}$$

llamando $X = A \bigcup B$, sean T_A, T_B y T_X las topologías subordinadas por R^2 respectivamente en A, B y X. Se pide:

1º) Estudiar:

a) Si el conjunto B es cerrado y si es abierto en (X,T_X).
b) Si el conjunto A es entorno de los puntos $P(x=1,y=0)$ y $Q(x=0,y=1)$ en el espacio topológico (X,T_X).
c) Si los espacios (X,T_X) y (A,T_A) son compactos.

2º) Siendo $M = \{(x,y) \in R^2,\ y = x^2\}$ y $f : R^2 \to R^2$ es una aplicación continua tal que $f(A) \bigcap M = \Phi$, demostrar que existe un abierto U de R^2 tal que $A \subset U$ y $f(U) \bigcap M = \Phi$

RESOLUCIÓN:

1º)

a) Intentaremos probar que B es cerrado usando la equivalencia $B \text{ cerrado} \Leftrightarrow B = \overline{B}$
Puesto que $B \subseteq \overline{B}$, sería preciso probar que $\overline{B} \subseteq B$

$$\forall x \in \overline{B},\ d(x,B) = 0 \Rightarrow d(x,B) = d((x_1,x_2),B) = \inf\{d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) / y_2 = 1\} =$$

$$= \inf\left\{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - 1)^2}\right\} = 0 \wedge \begin{cases} (x_1 - y_1)^2 \geq 0 \\ (x_2 - 1)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x = (x_1,x_2) = (y_1,1)$$

por tanto $x \in B$, y, en definitiva, $[\forall x \in \overline{B}, x \in B] \Rightarrow \overline{B} \subseteq B$. B es cerrado.

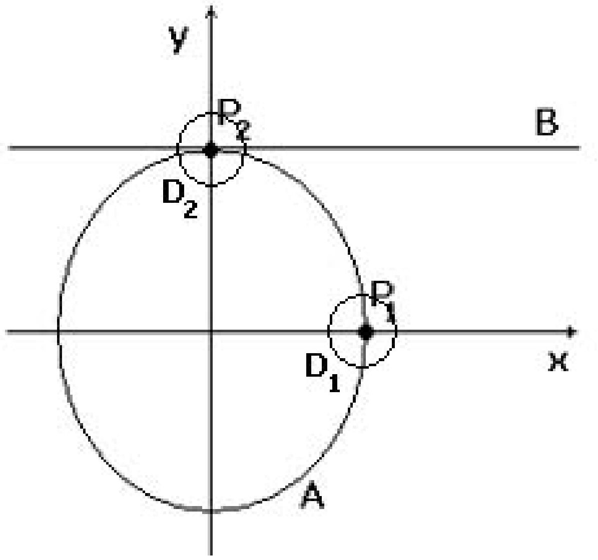
Usando la misma equivalencia, estudiamos ahora el complementario de B, a fin de ver si B es o no abierto:

$$\left.\begin{aligned} cB &= X - B \\ X &= A \bigcup B \end{aligned}\right\} \Rightarrow cB = A \bigcup B - B = A - \{(0,1)\}$$

ahora bien:
$(0,1) \notin cB$, trivialmente
$(0,1) \in c\overline{B}$. En efecto, $d((0,1),B) = \inf\left\{\sqrt{(0 - y_1)^2 + (1 - y_2)^2} / y_1^2 + y_2^2 = 1\right\} =$

$$= \inf\left\{\sqrt{2(1 - y_1)}\right\} = 0$$

b)



Con radio<1, sea D_1 un disco abierto de R^2 centrado en P_1. Se tiene que $D_1 \bigcap A$ es abierto de T_A y contiene a P_1, luego existe un abierto de A que contiene a P_1. Por tanto:

A es un entorno de $P_1(1,0)$

Con radio<1, sea D_2 un disco abierto de R^2 centrado en P_2. Se tiene que $D_2 \bigcap A$ es un abierto de T_X pero no es un abierto contenido en A (de la topología de T_A), pues el elemento $D_2 \bigcap A$ siempre contendrá puntos de B. Por tanto:

A no es entorno de $P_2(0,1)$

c) El espacio (X, T_X) no es compacto por no ser acotado (pues $X = A \bigcup B,$ y B no es acotado). Así, pues

(X, T_X) no es compacto

El espacio (A, T_A) es evidentemente acotado. Veamos que es también cerrado:

$$\forall x \in \overline{A},\, d(x,A) = 0 \Rightarrow d((x_1,x_2),A) = \inf\left\{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2} \,/\, y_1^2+y_2^2=1\right\} =$$
$$= \inf\left\{\sqrt{x_1^2+x_2^2+1-2(x_1y_1+x_2y_2)}\right\} = 0 \Rightarrow x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \Rightarrow (x_1,x_2) \in A \Rightarrow \overline{A} \subseteq A \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A \ cerrado$$

Por tanto:

(A,T_A) es compacto

2º)

$$M = \left\{(x,y) \in R^2, y = x^2\right\} \qquad f(A) \bigcap M = \phi$$

Por ser A compacto y f continua $\Rightarrow$ f(A) compacto.

$f(A) \bigcap M = \phi \Rightarrow \forall x \in f(A), \exists G_x \in T_x \,/\, G_x \bigcap M = \phi$, siendo $\{G_x\}_{x \in f(A)}$ un recubrimiento abierto de f(A)$\Rightarrow \exists \{G_{xi}\}_{1 \le i \le n}$ recubrimiento finito de f(A).

Entonces:

$$\left.\begin{array}{c} f(A) \subseteq G = \bigcup_{i=1}^{n} G_{xi} \\ G \bigcap M = \phi \end{array}\right\}$$

$U = f^{-1}(G)$ verifica la condición pedida en el enunciado, puesto que:

$$f(U) = G \wedge G \bigcap M = \phi \Rightarrow f(U) \bigcap M = \phi$$

Por tanto:

$\boxed{U = f^{-1}(G) \wedge G \text{ recubrimiento finito de f(A)}}$

PROBLEMA 039 (130609)

La longitud de un tornillo se distribuye del siguiente modo:

$$f(x) = \begin{cases} k(x-1)(3-x) & si\ x \in [1,3] \\ 0 & si\ x \notin [1,3] \end{cases}$$

siendo *f(x)* la función de densidad. Sólo son válidos los tornillos comprendidos entre 1'7 y 2'4.

Calcular la probabilidad de que una pieza determinada sea útil.

Si las piezas se empaquetan en lotes de 5 unidades y se acepta el lote si contiene menos de dos piezas defectuosas, ¿cuál es la probabilidad de que un lote sea rechazado?.

RESOLUCIÓN:

Por ser $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx = 1 \Rightarrow k.\int_{-\infty}^{+\infty}(x-1).(3-x).dx = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow k = 1\Big/\int_{-\infty}^{+\infty}(x-1).(3-x).dx = 1\Big/\int_{-\infty}^{+\infty}(-x^2+4x-3).dx = 1\Big/\left(-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x)\right|_1^3 = 1/4/3 = 3/4$$

o sea: $k=3/4$

a) Probabilidad de que una pieza sea útil:

$$P[1'7 < X < 2'4] = \int_{1'7}^{2'4}\frac{3}{4}(x-1)(3-x).dx = 0'50225$$

b) Probabilidad de rechazo de un lote de cinco piezas:

Si llamamos: A, ser rechazado, $\overline{A}$, ser aceptado,

Como solamente son aceptados los lotes que tengan un defecto o ningún defecto de entre las cinco unidades de cada lote, y teniendo en cuenta por el apartado anterior que la probabilidad de éxito, p, o fracaso, q, en cada unidad es:

$$p = 0'50225 \approx 1/2, \quad q = 1/2$$

se tendrá que la probabilidad de ser aceptado = probabilidad de que haya un solo defecto más probabilidad de que no hay defecto alguno:

$$p(\overline{A})=\binom{5}{4}.p(u_1 \cup u_2 \cup u_3 \cup u_4 \cup \overline{u}_5)+\binom{5}{5}p(u_1 \cup u_2 \cup u_3 \cup u_4 \cup u_5)=$$

$$=\binom{5}{4}.p^4.q+\binom{5}{5}.p^5 = 5.\frac{1}{2^4}.\frac{1}{2}+1.\frac{1}{2^5}=3/16$$

Probabilidad de que un lote sea rechazado:

$$p(A)=1-p(\overline{A})=1-\frac{3}{13}=\frac{13}{16}$$

PROBLEMA 038 (160509)

Hallar la relación existente entre los coeficientes de las dos ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} z^3 + p_1 z - q_1 &= 0 \\ z^3 + p_2 z - q_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ (ambas con raíces complejas)}$$

Para que los triángulos que determinan los afijos de las raíces de cada una de ellas sean semejantes.

RESOLUCIÓN:

Sean

z_{11}, z_{12}, z_{13} las raíces de la ecuación $z^3 + p_1 z - q_1 = 0$

z_{21}, z_{22}, z_{23} las raíces de la ecuación $z^3 + p_2 z - q_2 = 0$

De las condiciones de semejanza:

$$z_{1k} = C.z_{2k},\ k = 1,2,3\cdots \quad C: \text{ razón de semejanza}$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$C^3.z_{2k}^3 + p_1 C.z_{2k} - q_1 = 0$$

de la segunda ecuación:

$$z_{2k}^3 = -p_2.z_{2k} + q_2$$

al sustituir:

$$C^3.(-p_2.z_{2k} + q_2)^3 + p_1 C.z_{2k} - q_1 = 0$$

$$(p_1.C - p_2.C^3)z_{2k} - (q_1 - C^3 q_2) = 0$$

de esta última identidad:

$$\left.\begin{aligned} p_1.C - p_2.C^3 &= 0 \\ q_1 - C^3.q_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

en consecuencia:

$$C = \left(\frac{q_1}{q_2}\right)^{1/3}, \quad p_1\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^{1/3} = p_2.\frac{q_1}{q_2} \rightarrow \frac{p_1^3}{q_2} = \frac{p_2^3.q_1^3}{q_2^3} \rightarrow p_1^3.q_2^2 = p_2^3.q_1^2$$

PROBLEMA 037 (180409)

Sea f una aplicación continua de un espacio de Haussdorff compacto X en sí mismo. Demostrar que existe un conjunto cerrado $Y \subset X, Y \neq 0$ tal que $f(Y) = Y$.

SOLUCIÓN:

Si es $f(X) = X$, queda completada la demostración, pues X es compacto y cerrado.

Sea, pues, $f(X) \subset X$ estrictamente. Se trata de un problema de puntos fijos. Construiremos, por tanto, sucesiones convergentes. Llamando $y_1 = X,$ tenemos:

$$\begin{array}{ll} f(X) = f(Y_1) = Y_2 & Y_2 \subset Y_1 = X \\ f(Y_2) = Y_3 & Y_3 \subset Y_2 \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots & \dots\ \dots\ \dots \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots & \dots\ \dots\ \dots \\ f(Y_k) = Y_{k+1} & Y_{k+1} \subset Y_k \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots & \dots\ \dots\ \dots \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} f \ continua \\ X \ compacto \end{array}\right\} \Rightarrow f(X) \ compacto \Rightarrow Y_1, Y_2, ..., Y_k, ... \ \ compactos$$

$$\left.\begin{array}{r} Y_i \ compacto \\ X \ Haussdorff \end{array}\right\} \Rightarrow Y_1, Y_2, ..., Y_k, ... \ \ cerrados$$

Consideremos la intersección $Y = \bigcap_{k \neq 1} Y_k$,y veamos que verifica las condiciones pedidas en el enunciado del problema:

a) $Y \neq 0$

$\{cY_{i1}, cY_{i2}, ..., cY_{ik}, ...\}$es recubrimiento abierto de Y e Y es compacto, por consiguiente $\{cY_{i1}, cY_{i2}, ..., cY_{ik}, ...\}$ es un recubrimiento finito de Y $\Rightarrow$

$\Rightarrow \bigcap_{k=1}^{n} Y_{ik} = cY_{in} \wedge cY_{in} \subset Y \wedge cY_{in} \neq \phi$ por construcción, luego $Y \neq 0$.

b) Y es cerrado por ser intersección de cerrados.

c) $f(Y) \subseteq Y$. En efecto:

$$f(Y) = f(\bigcap_{i \geq 1} Y_i) \subseteq \bigcap_{i \geq 1} f(Y_i) = \bigcap_{i \geq 1} Y_{i+1} = \bigcap_{i \geq 1} Y_i = Y \Rightarrow f(Y) \subseteq Y$$

d) $Y \subseteq f(Y)$. En efecto:

veamos que $\forall x \in Y, \exists y \in Y / f(y) = x$:

$si\ x \in Y \Rightarrow x \in Y_i, i \geq 1 \Rightarrow H_i = \{y_i \in Y_i / f(y_i) = x\} \neq \Phi$

$si\ es\ H = f^{-1}(x),\ siendo\ \{x\}\ cerrado\ en\ (X, T_x) \Rightarrow H\ es\ cerrado\ y$

$compacto \wedge H_i = H \bigcap Y_i$

$H = H_1 \supseteq H_2 \supseteq H_3 \supseteq ... \supseteq H_n \supseteq ...$

$$L = \bigcap_{i=1}^{n} H_i \neq \Phi \wedge L \subseteq Y \Rightarrow \forall x \in Y, \exists y \in Y / f(y) = x \Rightarrow Y \subseteq f(Y)$$

e) de c): $f(Y) \subseteq Y$. De d): $Y \subseteq f(Y)$. Por tanto $Y = f(Y)$.

PROBLEMA 037 (210309)

En una urna hay dos bolas, una blanca y la otra negra. Se saca una bola y se devuelve a la urna acompañada de otra del mismo color. Continuando del mismo modo, se llegará a tener en la urna 22 bolas, ¿cuál es la probabilidad de que en ese momento 11 sean blancas y 11 negras?

SOLUCIÓN:

Sea $P_{i,j}$ la probabilidad de que en un determinado momento se tengan i bolas blancas y j bolas negras. Tratamos de calcular $P_{11,11}$.

Sea $P_{i,j}(B)$ la probabilidad de sacar bola blanca cuando en la bolsa hay i bolas blancas y j bolas negras.

Sea $P_{i,j}(N)$ la probabilidad de sacar bola negra cuando en la bolsa hay i bolas blancas y j bolas negras.

Se tiene:

$$P_{11} = 1$$

$$P_{12} = P_{11}(N) = 1/(1+1) = 1/2$$

$$P_{21} = P_{11}(B) = 1/(1+1) = 1/2$$

$$P_{13} = P_{12}(N).P_{12} = \frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P_{22} = P_{12}(B).P_{12} + P_{21}(N).P_{21} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2} + \frac{1}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$P_{31} = P_{21}(B).P_{21} = \frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$P_{14} = P_{13}(B).P_{13} = \frac{3}{4}.\frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

$$P_{23} = P_{22}(N).P_{22} + P_{13}(B).P_{13} = \frac{2}{4}.\frac{1}{3} + \frac{1}{4}.\frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

… … … … … … … … … … … … .

… … … … … … … … … … … …

$$P_{ij} = P_{i-1\,j}(B).P_{i-1\,j} + P_{i\,j-1}(N).P_{i\,j-1} = \frac{1}{i+j-1}$$

Por tanto, es

$$P_{1111} = \frac{1}{11+11-1} = \frac{1}{21}$$

Para asegurarnos, debemos probar el resultado de la inducción:

Suponiendo cierto que $P_{ij} = P_{i-1\,j}(B).P_{i-1\,j} + P_{i\,j-1}(N).P_{i\,j-1} = \dfrac{1}{i+j-1}$ veamos que se verifica para $P_{i+1\,j+1}$:

$$P_{i+1\,j+1} = P_{i\,j+1}(B).P_{i\,j+1} + P_{i+1\,j}(N).P_{i+1\,j} = \frac{i}{i+j+1}.\frac{1}{i+j+1-1} + \frac{j}{i+j+1}.\frac{1}{i+j+1-1} =$$

$$= \frac{i}{(i+j)(i+j+1)} + \frac{j}{(i+j)(i+j+1)} = \frac{i+j}{(i+j)(i+j+1)} = \frac{1}{i+j+1} = \frac{1}{(i+1)+(j+1)-1}$$

PROBLEMA 036 (210209)

Calcular

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{\left(a+\sqrt{n^2+a^2}\right)\left(2a+\sqrt{n^2+4a^2}\right)\ldots\left(na+\sqrt{n^2+n^2a^2}\right)}$$

SOLUCIÓN:

Llamando A al límite, se tiene:

$$A = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{\left(a+\sqrt{n^2+a^2}\right)\left(2a+\sqrt{n^2+4a^2}\right)\ldots\left(na+\sqrt{n^2+n^2a^2}\right)} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{a+\sqrt{n^2+a^2}}{n}\cdot\frac{2a+\sqrt{n^2+4a^2}}{n}\cdots\frac{na+\sqrt{n^2+n^2a^2}}{n}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\frac{ka+\sqrt{n^2+k^2a^2}}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left[k\frac{a}{n}+\sqrt{1+k^2\left(\frac{a}{n}\right)^2}\right]}$$

Tomando logaritmos:

$$LA = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} L\left(k\frac{a}{n}+\sqrt{1+k^2\left(\frac{a}{n}\right)^2}\right) = \frac{1}{a}\lim_{n \to \infty} \frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n} L\left(k\frac{a}{n}+\sqrt{1+k^2\left(\frac{a}{n}\right)^2}\right)$$

Si representamos por $x_k = k.\frac{a}{n},\ \ k = 1,\ldots,n$, entonces

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = k.\frac{a}{n} - (k-1).\frac{a}{n} = \frac{a}{n}$$

$$x_n = n.\frac{a}{n} = a, \quad \Delta x_1 = x_1 - x_0 \to \frac{a}{n} = x_1 - x_0 \to x_0 = x_1 - \frac{a}{n} = \frac{a}{n} - \frac{a}{n} = 0$$

En definitiva resulta

$$LA = \frac{1}{a}\lim_{n \to \infty}\sum_{k=1}^{n} L(x_k + \sqrt{1+x_k^2}).\Delta x_k$$

que son las sumas de Darboux en el intervalo $(x_0, x_n)=(0,a)$, por lo cual:

$$LA = \frac{1}{a}\int_0^a L(x+\sqrt{1+x^2}).dx \to A = e^{\frac{1}{a}\int_0^a L(x+\sqrt{1+x^2}).dx}$$

Resolvemos por partes la integral:

$$\frac{1}{a}\int_0^a L(x+\sqrt{1+x^2}).dx = \frac{1}{a}xL(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_0^a - \frac{1}{a}\int_0^a \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = L(a+\sqrt{1+a^2} + \frac{1-\sqrt{1+a^2}}{a}$$

sustituyendo:

$$A = e^{\frac{1}{a}\int_0^a L(x+\sqrt{1+x^2}).dx} = e^{L(a+\sqrt{1+a^2}) + \frac{1-\sqrt{1+a^2}}{a}} = e^{L(a+\sqrt{1+a^2})}.e^{\frac{1-\sqrt{1+a^2}}{a}} = (a+\sqrt{1+a^2}).e^{\frac{1-\sqrt{1+a^2}}{a}}$$

En definitiva:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{\left(a+\sqrt{n^2+a^2}\right)\left(2a+\sqrt{n^2+4a^2}\right)\ldots\left(na+\sqrt{n^2+n^2a^2}\right)} = (a+\sqrt{1+a^2}).e^{\frac{1-\sqrt{1+a^2}}{a}}$$

PROBLEMA 035 (240109)

Se considera la circunferencia que pasa por los puntos P(4,0), Q(0,2) y tiene su centro en la bisectriz del primer cuadrante.

Hállense las ecuaciones de las dos tangentes a la circunferencia trazadas desde el origen de coordenadas.

SOLUCIÓN:

Ecuación de la circunferencia: $(x-a)^2+(y-a)^2-r^2=0$

Por pasar por P(4,0): $16-8a+2a^2-r^2=0$

Por pasar por Q(0,2): $4-4a+2a^2-r^2=0$

Por tanto $a=3,\ r^2=10$, quedando, en definitiva: $x^2+y^2-6x-6y+8=0$

Veamos la pendiente de la recta tangente en un punto cualquiera (x_o,y_o)de la circunferencia, determinando la derivada y':

$$2x_o+2y_o.y'_o-6-6y'_o=0 \Rightarrow y'_o=-\frac{x_0-3}{y_o-3}$$

Recta que, pasando por el origen (0,0), es tangente a la circunferencia en el punto genérico (x_o,y_o) de la misma:

$y_o-0=y'_o.(x_o-0) \rightarrow y_o=y'_o.x_o$. Sustituyendo el valor de la derivada:

$y_o=-\frac{x_o-3}{y_o-3}.x_o \rightarrow x_o^2+y_o^2-3x_o-3y_o=0$. Resolvemos el sistema para encontrar los puntos de corte de las tangentes con la circunferencia:

$\begin{cases} x_o^2+y_o^2-3x_o-3y_o=0 \\ x_o^2+y_o^2-6x_o-6y_o+8=0 \end{cases} \rightarrow y_o=\frac{8}{3}-x_o$, sustituimos en la primera ecuación:

$x_o^2+\left(\frac{8}{3}-x_o\right)^2-3x_o-3\left(\frac{8}{3}-x_o\right)_o=0 \rightarrow 9.x_o^2-24.x_o-4=0$. Soluciones: $x_o=\frac{4\pm\sqrt{20}}{3}$

Despejando la y_o para estos valores obtenemos los puntos de tangencia:

Para $x_o = \dfrac{4+\sqrt{20}}{3} \to y_o = \dfrac{8}{3} - x_o = \dfrac{4-\sqrt{20}}{3}$. Punto $A\left(\dfrac{4+\sqrt{20}}{3}, \dfrac{4-\sqrt{20}}{3}\right)$

Para $x_o = \dfrac{4-\sqrt{20}}{3} \to y_o = \dfrac{8}{3} - x_o = \dfrac{4+\sqrt{20}}{3}$. Punto $B\left(\dfrac{4-\sqrt{20}}{3}, \dfrac{4+\sqrt{20}}{3}\right)$

Valores que toma la derivada en cada uno de los dos puntos de tangencia:

En A: $y_o' = -\dfrac{x_o - 3}{y_o - 3} = -9 + 2\sqrt{20}$, en B: $y_o' = -\dfrac{x_o - 3}{y_o - 3} = -9 - 2\sqrt{20}$

Ecuaciones de las rectas tangentes:

$$\begin{cases} En\ A : y = (-9 + 2\sqrt{20}).x \\ En\ B : y = (-9 - 2\sqrt{20}).x \end{cases}$$