RESOLVIENDO PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 059 (251210)

a) Hallar la tabla de multiplicar de S_3, grupo simétrico del conjunto $X=\{1,2,3\}$**.**

b) Probar que $R=\{i,\sigma_1,\sigma_2\}$ **es subgrupo de S_3, siendo**

$$i=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\quad \sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$

RESOLUCIÓN:

a) Veamos los elementos de S_3:

$$i=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\ \sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\ \sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\ \pi_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\ \pi_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\ \pi_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

Operaciones:

$$i\circ i=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=i,\quad i\circ\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\sigma_1,\ i\circ\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\sigma_2,\ i\circ\pi_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=\pi_1$$

$$i\circ\pi_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=\pi_2,\quad i\circ\pi_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=\pi_3,$$

$$\sigma_1\circ i=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\sigma_1,\quad \sigma_1\circ\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\sigma_2,\ \sigma_1\circ\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=i,\ \sigma_1\circ\pi_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=\pi_3$$

$$\sigma_1\circ\pi_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=\pi_1,\quad \sigma_1\circ\pi_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=\pi_2,$$

$$\sigma_2\circ i=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\sigma_2,\quad \sigma_2\circ\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\sigma_1,\ \sigma_2\circ\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\sigma_1,\ \sigma_2\circ\pi_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=\pi_2$$

$$\sigma_2\circ\pi_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=\pi_3,\quad \sigma_2\circ\pi_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=\pi_1,$$

$$\pi_1\circ i=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=\pi_1,\quad \pi_1\circ\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=\pi_2,\ \pi_1\circ\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=\pi_3,\ \pi_1\circ\pi_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=i$$

$$\pi_1\circ\pi_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\sigma_1,\quad \pi_1\circ\pi_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\sigma_2,$$

$$\pi_2\circ i=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=\pi_2,\quad \pi_2\circ\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=\pi_3,\ \pi_2\circ\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=\pi_1,\ \pi_2\circ\pi_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\sigma_2$$

$$\pi_2\circ\pi_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=i,\quad \pi_2\circ\pi_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\sigma_1,$$

$$\pi_3 \circ i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \pi_3, \quad \pi_3 \circ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \pi_1, \; \pi_3 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \pi_2, \; \pi_3 \circ \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_1$$

$$\pi_3 \circ \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \sigma_2, \quad \pi_3 \circ \pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = i,$$

Resulta, en definitiva, la tabla:

	i	σ_1	σ_2	π_1	π_2	π_3
i	i	σ_1	σ_2	π_1	π_2	π_3
σ_1	σ_1	σ_2	i	π_3	π_1	π_2
σ_2	σ_2	i	σ_1	π_2	π_3	π_1
π_1	π_1	π_2	π_3	i	σ_1	σ_2
π_2	π_2	π_3	π_1	σ_2	i	σ_1
π_3	π_3	π_1	π_2	σ_1	σ_2	i

b) Estudio del conjunto $R = \{i, \sigma_1, \sigma_2\}$:

De la tabla anterior se tiene que $R \neq \phi \; \wedge \; \forall a,b \in R, a \circ b \in R$

Elementos inversos:

De ser $\sigma_1 \circ \sigma_2 = i \Rightarrow \sigma_1^{-1} = \sigma_2$
De ser $\sigma_2 \circ \sigma_1 = i \Rightarrow \sigma_2^{-1} = \sigma_1$
De ser $i \circ i = i \Rightarrow i^{-1} = i$

En definitiva: $\forall a,b \in R, a \circ b^{-1} \in R$, luego R es subgrupo de S_3.

PROBLEMA 058 (271110)

Sean X e Y espacios topológicos.

a) Demostrar que si $f : X \to Y$ es una función constante, por ejemplo $f(x) = c \in Y, \forall x \in X$, entonces f es continua respecto a cualquier topología τ del espacio X y a cualquier topología τ^* del espacio Y.

b) Demostrar que si $f : X \to Y$ es una función cualquiera y (Y,γ) es un espacio topológico indiscreto, entonces $f:(X,\tau) \to (Y,\gamma)$ es continua, cualquiera que sea la topología τ.

RESOLUCIÓN:

c) Consideraremos la siguiente caracterización para la continuidad de f:

$$f : X \to Y \text{ continua } \Leftrightarrow \forall H \in \tau^*, f^{-1}(H) \in \tau$$

De la definición se tiene:

$$\forall x \in X, f(x) = c \Rightarrow f^{-1}(c) = X \text{ , o bien:}$$

$$\forall H \in \tau^*, f^{-1}(H) = \begin{cases} X, si\ c \in H \\ \phi, si\ c \notin H \end{cases}$$

Puesto que tanto X como ϕ pertenecen a la topología τ, cualquiera que sea ésta, se tiene: $\forall H \in \tau^*, f^{-1}(H) \in \tau \Rightarrow f$ es continua

d) Sea la misma caracterización de continuidad del apartado anterior:

$$f : X \to Y \text{ continua } \Leftrightarrow \forall H \in \tau^*, f^{-1}(H) \in \tau$$

Sabemos que (Y,γ) indiscreto $\Leftrightarrow \gamma = \{\phi, Y\}$, por tanto $f^{-1}(\phi) = \phi, f^{-1}(Y) = X$, y como tanto ϕ como X son elementos de cualquier topología en X, se tiene que $f^{-1}(\phi) \in \tau \wedge f^{-1}(Y) \in \tau \Rightarrow f$ continua

PROBLEMA 057 (301010)

1) Defínase derivada direccional y las superficies equipotenciales.
2) Hallar la derivada direccional de $F = x^2yz^3$ a lo largo de la curva

$$x = e^{-u}$$
$$y = 2senu + 1$$
$$z = u - \cos u$$

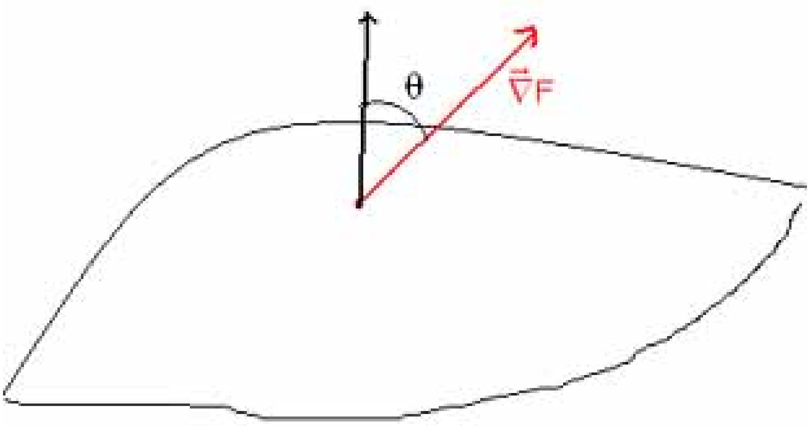
3) Demostrar que la máxima variación de F, es decir, la máxima derivada direccional, se verifica en la dirección del vector $\vec{\nabla}F$ y tiene su magnitud.
4) Hallar la derivada direccional de $U = 2x^3y - 3y^2z$ en $P(1,2,-1)$ en una dirección hacia $Q(3,-1,5)$. ¿En qué dirección a partir de P es máxima la derivada direccional?. ¿Cuál es la magnitud de la derivada direccional máxima?

RESOLUCIÓN:

1) $$\lim_{\Delta s \to 0} \Delta F / \Delta s = \frac{dF}{ds}$$

$$\frac{dF}{ds} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} = \vec{\nabla}F.\frac{d\vec{r}}{ds} \rightarrow \frac{dF}{ds} = \vec{\nabla}F.\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\nabla}F.\vec{T}_o$$

puesto que $\left| d\vec{r}/ds \right| = 1$, se tiene que $\frac{dF}{ds} = \left|\vec{\nabla}F\right|.\cos\theta$, y esta derivada es máxima cuando el coseno sea la unidad, esto es, cuando el ángulo ϑ sea cero.



Las superficies equipotenciales son aquellas que son normales a las direcciones en donde dF/ds es máxima.

2) El punto de la curva en el que $u=0$ es $A(1,1,-1)$, luego, se tiene que:

$$\vec{\nabla}F\Big|_A = 2xyz^3\vec{i} + x^2z^3\vec{j} + 3x^2yz^2\vec{k}\Big|_A = -2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{r}}{du}\Big|_A = -e^{-u}\vec{i} + 2\cos u\vec{j} + (1 + senu)\vec{k}\Big|_A = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{T}_0 = \frac{\left.\dfrac{d\vec{r}}{du}\right|_A}{\left|\left.\dfrac{d\vec{r}}{du}\right|_A\right|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}\right)$$

por consiguiente es $\dfrac{dF}{ds} = \vec{\nabla}F.\vec{T}_0 = \dfrac{3}{\sqrt{6}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{6}$

3) $\dfrac{dF}{ds} = \left|\vec{\nabla}F\right|.\cos\theta \Rightarrow \dfrac{dF}{ds}\, máxima \leftrightarrow \cos\theta = 1 \leftrightarrow \theta = 0 \Rightarrow \left.\dfrac{dF}{ds}\right|_{\max} = \left|\vec{\nabla}F\right|$

4) $\vec{\nabla}U = 6x^2 y\vec{i} + (2x^3 - 6yz)\vec{j} + (-3y^2)\vec{k} \rightarrow \left(\vec{\nabla}U\right)_p = 12\vec{i} + 14\vec{j} - 12\vec{k}$

$$\left.\begin{matrix} P(1,2,-1) \\ Q(3,-1,5) \end{matrix}\right\} \rightarrow \overrightarrow{PQ} = (3-1)\vec{i} + (-1-2)\vec{j} + (5+1)\vec{k} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k} \rightarrow \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{49} = 7$$

$$\frac{dF}{ds} = (\vec{\nabla}U)_P.\frac{\overrightarrow{PQ}}{\left|\overrightarrow{PQ}\right|} = \frac{1}{7}(12\vec{i} + 14\vec{j} - 12\vec{k}).(2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}) = -\frac{90}{7}$$

$\dfrac{dF}{ds}$ es máxima en la dirección de $\left(\vec{\nabla}U\right)_p = 12\vec{i} + 14\vec{j} - 12\vec{k}$, o sea:

$$\left.\frac{dF}{ds}\right|_{\max} = \left|(\vec{\nabla}U)_P\right| = +\sqrt{12^2 + 14^2 + (-12)^2} = \sqrt{484} = 22$$

PROBLEMA 056 (021010)

1) Hallar la ecuación de las superficies cuyo plano tangente en cada punto corte al eje OZ en un punto de cota igual y de signo contrario a la cota del punto de contacto.

2) Determinar entre estas superficies la que contiene a la hipérbola equilátera

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN:

1) Plano tangente en (x_0, y_0, z_0) : $z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(y - y_0)$.

Del enunciado: Si $x = y = 0 \rightarrow z = -z_0$, y la ecuación del plano es ahora:

$$-2z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(-x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(-y_0) \rightarrow 2z = \frac{\partial z}{\partial x}x + \frac{\partial z}{\partial y}y$$

Ecuación característica:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{2z}$$

por tanto:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dz}{2z} \\ \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{2z} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 = k_1 z \\ y^2 = k_2 z \end{cases}$$ Integral general: $\Psi(k_1, k_2) = 0 \rightarrow \Psi\left(\frac{x^2}{z}, \frac{y^2}{z}\right) = 0$

2) La directriz o curva que engendra a las superficies es la hipérbola equilátera

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

y las generatrices o curvas que se apoyan en ella son:

$$\begin{cases} x^2 = k_1 z \\ y^2 = k_2 z \end{cases}$$

$$x^2 - y^2 = 1 \rightarrow k_1 z - k_2 z = 1 \wedge z = 1 \rightarrow k_1 - k_2 = 1 \rightarrow \frac{x^2}{z} - \frac{y^2}{z} = 1 \rightarrow x^2 - y^2 = z$$

PROBLEMA 055 (040910)

Hallar la descomposición canónica de la función

$$f: Q \to Q$$

Definida del siguiente modo: $f(x) = [x]$, donde $[x]$ representa el máximo número entero menor o igual a x.

RESOLUCIÓN:

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta"'] & Q \\ Q/f \arrow[r, "\varphi"'] & f(Q) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Relación inducida por f:

$$\forall x, y \in Q,\ xfy \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

a) La aplicación f: (dada en el enunciado)

$$\forall x \in Q,\ f(x) = [x]$$

b) El conjunto cociente Q/f:

$$Q/f = \{w_j \in Q / j \leq w_j < j+1,\ j \in Z\}$$

(las clases de equivalencia son segmentos racionales, cerrados a la izquierda)

c) La aplicación suprayectiva η:

$$\forall x \in Q / x \in w_j, \eta(x) = w_j$$

d) La aplicación biyectiva φ:

$$\forall w_j \in Q/f, \varphi(w_j) = j$$

e) La aplicación inyectiva i:

$$\forall j \in f(Q) = i(j) = j$$

PROBLEMA 054 (070810)

Sea X una variable aleatoria cuya Función de Distribución es la siguiente

$$F(x) = \begin{cases} 0 & para\ x \le -2 \\ x/4 + 1/2 & para\ -2 < x \le 2 \\ 1 & para\ x > 2 \end{cases}$$

Se pide calcular:

1) La esperanza matemática de X.
2) La varianza.
3) $p[X \le 1]$.
4) $p[1 < X \le 2]$
5) $p[X > 3]$

RESOLUCIÓN:

La función de densidad de dicha variable aleatoria es, derivando en la Función de Distribución:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & para\ x \le -2 \\ 1/4 & para\ -2 < x \le 2 \\ 0 & para\ x > 2 \end{cases}$$

1) Esperanza matemática:

$$E[X] = \int_{-2}^{2} x.f(x).dx = \int_{-2}^{2} x.\frac{1}{4}.dx = \frac{1}{8}x^2 \Big|_{-2}^{2} = 0$$

2) Varianza:

$$D^2 = E\left[(x-0)^2\right] = \int_{-2}^{2} x^2.\frac{1}{4}.dx = \frac{1}{12}x^3 \Big|_{-2}^{2} = \frac{4}{3}$$

3) $p[X \le 1] = F(1) = 0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

4) $p[1 < X \le 2] = p[X \le 2] - p[X \le 1] = F(2) - F(1) = (0 + \frac{2}{4} + \frac{1}{2}) - (0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

5) $p[X > 3] = 1 - p[X \le 3] = 1 - F(3) = 1 - 1 = 0$

PROBLEMA 053 (100710)

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Se pide calcular:

6) Los autovalores.
7) Los autovectores.
8) La matriz diagonal semejante, si existe.

RESOLUCIÓN:

1) $A.\vec{x} = \lambda.\vec{x} \rightarrow (A - \lambda.I).\vec{x} = 0 \rightarrow |A - \lambda.I| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda).(2-\lambda) - 6 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \lambda^2 - 3.\lambda - 4 = 0$

Autovalores: $\lambda = 4, \lambda = -1$

2) $A.\vec{x} = \lambda.\vec{x} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\vec{x} = \lambda.\vec{x} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

para el autovalor $\lambda = 4 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x + 2y = 4x \\ 3x + 2y = 4y \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} -3x + 2y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{matrix} \rightarrow$

$\rightarrow 3x - 2y = 0 \rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

para el autovalor $\lambda = -1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x + 2y = -x \\ 3x + 2y = -y \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 2x + 2y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{matrix} \rightarrow$

$\rightarrow x + y = 0 \rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

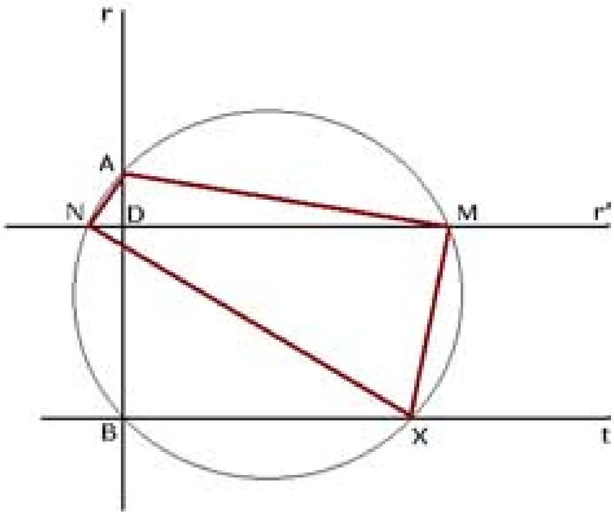
4) Puesto que los autovectores son linealmente independientes, existe matriz semejante diagonal:

9) $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow D = P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 3/5 & -2/5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

PROBLEMA 052 (120610)

Sean r y r' dos rectas perpendiculares y sea D su punto de intersección. Sobre r tomamos un punto A fijo y sobre r' dos puntos M y N variables de modo que $DM.DN=c^2$. Se trazan las perpendiculares a las rectas AM y AN por los puntos M y N respectivamente.
Determinar el lugar geométrico del punto X de intersección de dichas perpendiculares.

RESOLUCIÓN:
A) Caso de que los puntos M y N estén situados uno a cada lado de la recta r:



Por los puntos A, M y N pasan circunferencias que se cortan en B.
El punto B se obtiene por la condición

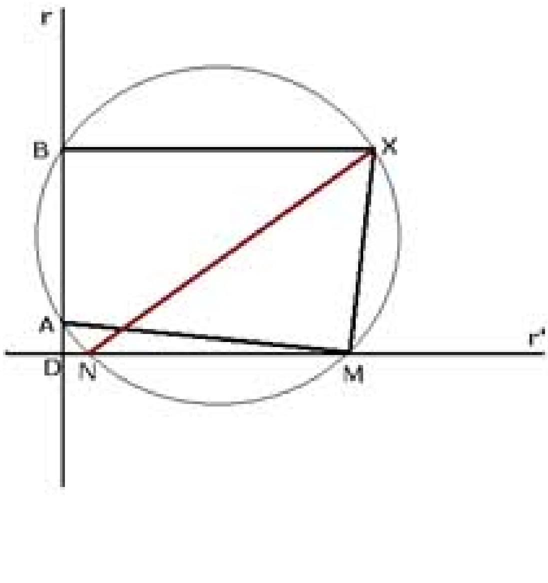
$$DA.DB = c^2$$

$$DB = c^2 / DA$$

En todas estas circunferencias, el ángulo CBX es recto, o sea, X está en una recta perpendicular a r por el punto B.

Por tanto, el lugar geométrico pedido es la recta t paralela a r' por el punto B obtenido de modo que $CB=c^2/DA$.

B) Caso de que ambos puntos, M y N, estén situados al mismo lado de la recta r:



Obtenemos B igual que antes:

$$DB = {c^2}/{DA}$$

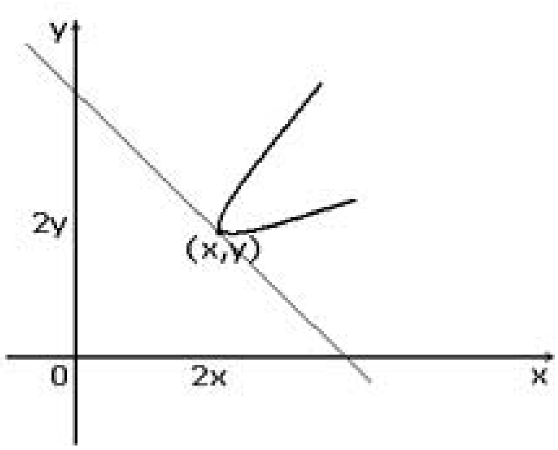
el ángulo ABX es recto siempre por quedar inscrito en las circunferencias y siento AB contenido en r será BX perpendicular.

Por tanto, en este caso el lugar geométrico pedido es la semirrecta perpendicular a r en todo el semiplano donde se encuentran los puntos M y N.

PROBLEMA 051 (150510)

Determinar una curva que pasa por el punto (3,2) y para la cual la longitud del segmento de cualquiera de sus tangentes comprendido entre los ejes de coordenadas está dividido por el punto de contacto en dos partes iguales.

RESOLUCIÓN:



Ecuación

$$y' = -\frac{2y}{2x} \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0$$

$$Ly + Lx = const = Lk$$

$$L(x.y) = Lk$$

Ecuación

$$x.y = k$$

puesto que la curva pasa por (3,2) $\rightarrow 3.2 = k$

$$\boxed{x.y = 6}$$

PROBLEMA 050 (170410)

Calcular los valores de: a) $L(-4)$, b) Li, c) $L(1+i)$, d) $\log_{-1}(i)$.

RESOLUCIÓN:

a) $L(a+bi) = L\rho + (\theta + 2k\pi).i \qquad (k = 0,1,2,...)$

$\rho = 4, \ \theta = \pi$

$$\boxed{L(-4) = L4 + (2k+1)\pi i}$$

b) $Li = L1 + (\pi/2 + 2k\pi).i = L1 + \dfrac{1+4k}{2}\pi i \qquad (k = 0,1,2,...)$

$$\boxed{Li = \frac{1+4k}{2}\pi i}$$

c) $L(1+i) = L\sqrt{2} + (\pi/4 + 2k\pi).i = L\sqrt{2} + \dfrac{1+8k}{4}\pi i \qquad (k = 0,1,2,...)$

$$\boxed{L(1+i) = \frac{1+8k}{4}\pi i}$$

d) $\log_{-1}(i) = \dfrac{Li}{L(-i)} = \dfrac{L1 + \left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i}{L1 + \left(-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i} = \dfrac{\dfrac{1+4k}{2}\pi i}{\dfrac{-1+4k}{2}\pi i} = \dfrac{4k_1+1}{4k_2-1} \qquad (k_1, k_2 = 0,1,2,...)$

$$\boxed{\log_{-1}(i) = \frac{4k_1+1}{4k_2-1} \qquad (k_1, k_2 = 0,1,2,...)}$$

PROBLEMA 049 (200310)

Ecuación de la superficie que contiene a la hipèrbola:

$$\begin{cases} y^2+z^2=x^2 \\ z=1 \end{cases}$$

y que satisface la ecuación diferencial

$$xy(p-q)=(x-y)z$$

$$(\,p=dz/dx,\;\; q=dz/dy)$$

RESOLUCIÓN:

Determinación de la integral general de la ecuación diferencial

$$xyp-xyq=(x-y)z$$

sistema característico:

$$\frac{dx}{xy}=\frac{dy}{-xy}=\frac{dz}{(x-y)z}=\frac{dx/x+dy/y+dz/z}{0}$$

integración:

de las dos primeras: $dx+dy=0 \to x+y=C_1$

de la última: $\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+\frac{dz}{z}=0 \to L(xyz)=LC_2 \to xyz=C_2$

$$C_2=\varphi(C_1) \to xyz=\varphi(x+y) \text{ integral general}$$

Determinación de la integral particular que contiene a la hipérbola:

$$\left.\begin{array}{c} x^2-y^2=1 \\ z=1 \\ x+y=C_1 \\ xyz=C_2 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{c} x^2-y^2=1 \\ xyz=C_1 \\ xy=C_2 \end{array}\right\} \to C_1^4-4C_1^2C_2=1$$

$$(x+y)^4-4.(x+y)^2xyz=1$$

PROBLEMA 048 (200210)

Determinar los puntos singulares de las curvas siguientes:

a) $(x_2-1)^3+(x_2-1)^2-(x_1+1)^2=0$

b) $x_2^2-x_1^3=0$

RESOLUCIÓN:

a) $(x_2-1)^3+(x_2-1)^2-(x_1+1)^2=0$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[(x_2-1)^3+(x_2-1)^2-(x_1+1)^2\right]=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left[(x_2-1)^3+(x_2-1)^2-(x_1+1)^2\right]=0$$

$$\begin{cases}-2(x_1+1)=0\\ 3(x_2-1)^2+2(x_2-1)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1=-1\\ 3x_2^2-4x_2+1=0\rightarrow\begin{cases}x_2=1\\ x_2=1/3\end{cases}\end{cases}$$

Puntos singulares: *(-1. 1), (-1, 1), (-1, 1/3)*

b) $x_2^2-x_1^3=0$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[x_2^2-x_1^3\right]=0\rightarrow -3x_1^2=0\rightarrow x_1=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left[x_2^2-x_1^3\right]=0\rightarrow 2x_2^2=0\rightarrow x_2=0$$

Punto singular: *(0,0)*

PROBLEMA 047 (230110)

Clasificar la cónica siguiente

$$13.x^2 + 5.y^2 + 4.xy - 26.x - 22y + 23 = 0$$

Obtener su ecuación reducida y representarla en un diagrama cartesiano.

RESOLUCIÓN:

c) Ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 23 & -13 & -11 \\ -13 & 13 & 2 \\ -11 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

d) Invariantes métricos:

$$\begin{aligned} |A| &= & -443 \\ A_{00} &= & adja_{00} = 61 \\ a_{11} + a_{22} &= & 18 \end{aligned}$$

e) Clasificación:

Por ser $|A| \neq 0 \rightarrow$ Cónica irreducible.

Por ser $A_{00} \neq 0 \rightarrow$ Cónica con centro único.

Por ser $A_{00} > 0 \rightarrow$ Elipse.

Por ser $sig|A| \neq sig(a_{11} + a_{22}) \rightarrow$ Elipse real.

f) Ecuación reducida:

$$a''_{00} + a''_{11}x^2 + a''_{22}y^2 = 0$$

g) Obtención de los coeficientes:

$$a''_{00} = \frac{|A|}{A_{00}} = -\frac{443}{61}$$

$$z^2 - (a_{11} + a_{22}).z + A_{00} = 0 \rightarrow z^2 - 18.z + 61 = 0 \rightarrow z = \begin{cases} 9 + 2\sqrt{5} \\ 9 - 2\sqrt{5} \end{cases}$$

Resulta:

$$\frac{x^2}{\frac{443}{61(9+2\sqrt{5})}}+\frac{y^2}{\frac{443}{61(9-2\sqrt{5})}}=1$$

h) Representación gráfica: