RESOLVIENDO PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 72 (241211)

Sea un espacio topológico compacto (X,T) y una aplicación continua

$$f:(X,T)\to(Y,T')$$

Demuéstrese que *f(X)* es compacto y que, en particular, si *f* es además sobreyectiva, entonces Y es también compacto.

RESOLUCIÓN:

Consideremos un recubrimiento abierto de *f(X)*: $\{U_i\cap f(X)\}_{i\in I}$. Entonces será: $f(X)\subset\bigcup_{i\in I}U_i$, de donde se deduce que

$$X=f^{-1}f(X)\subset f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}U_i\right)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}(U_i)$$

es decir, $\{f^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de X. Y, puesto que X es compacto se puede extraer de $\{f^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$ un subrecubrimiento finito de X, $\{f^{-1}(U_1),...,f^{-1}(U_n)\}$, tal que $X=\bigcup_{k=1}^{n}f^{-1}(U_k)$, por lo que se cumplirá que

$$f(X)=f\left(\bigcup_{k=1}^{n}f^{-1}(U_k)\right)=\bigcup_{k=1}^{n}f(f^{-1}(U_k))=\bigcup_{k=1}^{n}(U_k\cap f(X))$$

o sea, se ha extraído de $\{U_i\cap f(X)\}_{i\in I}$ un subrecubrimiento finito:

$$\{U_1\cap f(X),...,U_n\cap f(X)\}$$

de lo cual, resulta que $(f(X),T')$ es espacio compacto.

Es obvio que si la aplicación es además sobreyectiva, entonces $f(X)=Y$, por lo que se sigue que, en este caso, también (Y,T') es espacio compacto.

PROBLEMA 71 (261111)

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d^2x}{dt^2}-2\dfrac{dy}{dt}+3x=0\\ \dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{dx}{dt}-2y=e^{2t}\end{array}\right\}$$

RESOLUCIÓN:

Podría tratarse como el problema de las ecuaciones del movimiento de un móvil que se desplaza en un plano, donde (x, y) son las coordenadas del móvil respecto a dos ejes coordenados X e Y. Ambas coordenadas dependen del tiempo.

Derivando la segunda ecuación $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{dx}{dt}-2y=e^{2t}$ respecto del tiempo, se tiene:

$$\frac{d^3x}{dt^3}+\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}=2e^{2t}$$

Utilizando la primera de las ecuaciones en este resultado obtenido, resulta:

$$\frac{d^3x}{dt^3}-3x=2e^{2t}$$

Siendo a y b dos constantes a determinar, x es de la forma:

$$x=be^{at}$$

Derivando tres veces y sustituyendo:

$$\frac{d^3x}{dt^3}=ba^3e^{at}$$

$$ba^3e^{at}-3be^{at}=2e^{at}\rightarrow b(a^3-3)=2$$

De esta última expresión resulta $a=2, b=2/5$:

y, por tanto, obtenemos como soluciones para la coordenada x: $x=\dfrac{2}{5}e^{2t}$

La coordenada y: $y=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d^2x}{xt^2}+\dfrac{dx}{dt}-e^{2t}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{8}{5}+\dfrac{4}{5}-1\right)e^{2t}=\dfrac{7}{10}e^{2t}$

(Solución de nuestro colaborador Niceto Valcárcel Yeste)

PROBLEMA 70 (291011)

Sea n un nº natural. Probar que el último dígito del nº $1+2+3+\ldots+n$ nunca podrá ser *2, 4, 7* o *9*.
(Olimpiada Matemática Española, 1977)

RESOLUCIÓN:

Se tiene que $1+2+\ldots+n=\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\ldots+\binom{n}{1}=\binom{n+1}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$

Que se prueba fácilmente mediante inducción.
En definitiva, puesto que $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, para contestar a lo preguntado en el enunciado es necesario discutir cómo podría ser el semiproducto dos números naturales consecutivos, n y n+1.

Si se supone primero, (n = 2m) un número par.

s = 1 + 2 + 3 + ... + 2m = 2m^2 + m

El último dígito del número m es uno de los siguientes: $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, por lo que el último dígito de s para cada uno de ellos es:

$$\{2.(0)^2+0,\ 2.(1)^2+1,\ 2.(2)^2+2,\ 2.(3)^2+3,\ 2.(4)^2+4,\ 2.(5)^2+5,\ 2.(6)^2+6,\ 2.(7)^2+7,$$
$$2.(8)^2+8,\ 2.(9)^2+9\}=\{0,3,10,21,36,55,78,105,136,171\}$$
y terminan en 0,3,0,1,6,5,8,5,6,1

Si se supone después, (n = 2m + 1) un número impar.

s = 1 + 2 + 3 + … + 2m + 1 = 2m^2 + 3m + 1

El último dígito del número m es uno de los siguientes: $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, por lo que el último dígito de s para cada uno de ellos es:

$$\{2.(0)^2+3.0+1,\ 2.(1)^2+3.1+1,\ 2.(2)^2+3.2+1,\ 2.(3)^2+3.3+1,\ 2.(4)^2+3.4+1,\ 2.(5)^2+3.5+1,$$
$$2.(6)^2+3.6+1,\ 2.(7)^2+3.7+1, 2.(8)^2+3.8+1,\ 2.(9)^2+3.9+1\}=$$
$$=\{1,6,15,28,45,66,91,120,153,190\}$$
y terminan en 1,6,5,8,5,6,1,0,3,0

por consiguiente, en ningún caso el último dígito de la suma es 2, 4, 7 o 9.

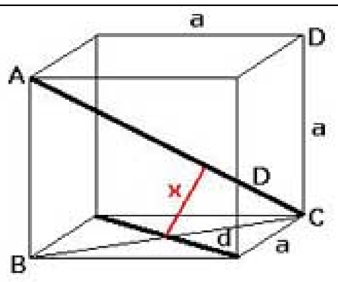
(Solución de nuestro colaborador Niceto Valcárcel Yeste)

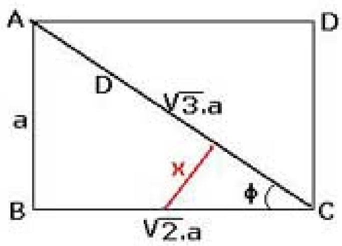
PROBLEMA 69 (011011)

En un cubo de arista *a* se considera una diagonal *D* del mismo y la diagonal *d* de una de sus caras, de modo que las rectas que contienen los segmentos *D* y *d* se crucen. Hallar la distancia *x* de *D* a *d*.

RESOLUCIÓN:

La distancia x pedida es la longitud del segmento que pasa por el centro de d y es perpendicular a D





$$D^2 = a^2 + a^2 + a^2 \rightarrow D = \sqrt{3}.a$$

$$d^2 = a^2 + a^2 \rightarrow d = \sqrt{2}.a$$

$$sen\phi = \frac{a}{\sqrt{3}.a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{x}{\sqrt{2}.a/2} = sen\varphi \rightarrow x = \frac{\sqrt{2}.a}{2}.sen\phi = \frac{\sqrt{6}}{6}a$$

Distancia pedida: $x = \dfrac{\sqrt{6}}{6}a$

PROBLEMA 068 (030911)

Encontrar dos números impares de dos cifras tales que si se permutan sus cifras resultan dos números distintos, y, sin embargo, su producto coincide con el producto de los dos primeros.

Propuesto en la Olimpiada Matemática Española 1988, fase de Sevilla.

RESOLUCIÓN:

Sea los números M y N, tales que $M=10a+b,\ N=10c+d$

Si se permutan sus cifras se obtienen los números $M'=10b+a$ y $N'=10d+c$

Como sus productos han de coincidir: $M.N = M'.N'$

$$(10a+b).(10c+d)=(10b+a).(10d+c)$$

o sea:

$$100ac+10(ad+bc)+b.d=100bd+10(bc+ad)+a.c$$

por lo que $b.d=a.c$ (el producto de las dos parejas de dígitos coincide)

como M y N son impares, b y d son impares, por lo cual:

$$b,d\ impares \rightarrow b.d\ impar \rightarrow a.c\ impar \rightarrow a,c\ impares$$

es decir, los dígitos que intervienen en ambos números son todos impares

como los únicos impares que hay son 1, 3, 5, 7, 9, para que el producto de dos parejas coincidan tienen que ser, necesariamente, 1.9 =3.3 (única posibilidad)

Por lo cual pueden darse dos soluciones:

b=1, d=9, a=3, c=3, o bien, b=3, d=3, a=1,c=9

con lo que los números que buscamos serían:

$M=10a+b,\ N=10c+d \rightarrow M=3.10+1=31, M=3.10+9=39$

O bien:

$M=10a+b,\ N=10c+d \rightarrow M=1.10+3=13, M=9.10+3=93$

Solución: Los números buscados son el 31 y el 39, o bien, el 13 y el 93.

PROBLEMA 067 (060811)

a) Para la variable aleatoria X, y la función de densidad en *(a,b)* dada por $f(x)=\frac{1}{b-a}$, calcular la esperanza matemática *E[X]* (momento central de primer orden), el momento central de orden k y la varianza.

b) Probar que si la función de densidad es $f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}, \forall x\in R$, entonces no existe la esperanza matemática *E[X]*.

RESOLUCIÓN:

a) $$a_1=E[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}x.f(x).dx=\int_a^b x.\frac{1}{b-a}.dx=\frac{1}{b-a}\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b=\frac{b+a}{2}$$

$$a_k=E[X^k]=\int_{-\infty}^{+\infty}x^k.f(x).dx=\int_a^b x^k.\frac{1}{b-a}.dx=\frac{1}{b-a}\left.\frac{x^{k+1}}{k+1}\right|_a^b=\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{(b-a)(k+1)}$$

$$D^2[X]=E[(X-a_1)^2]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a_1)^2.f(x).dx=\int_a^b(x^2-2a_1x+a_1^2).f(x).dx=$$

$$=\int_a^b x^2.f(x).dx-2a_1\int_a^b x.f(x).dx+a_1^2\int_a^b f(x).dx=a_2-2a_1^2+a_1^2=a_2-a_1^2=$$

$$=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\left(\frac{b+a}{2}\right)^2=\frac{1}{12}(b-a)^3$$

b) $a_1=E[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}L\left|1+x^2\right|\Big|_{-\infty}^{+\infty}(\inf inito)\Rightarrow$ No existe $E[X]$

PROBLEMA 066 (090711)

Demostrar que si la ecuación de cuarto grado $x^4 + mx^2 + n = 0$ tiene cuatro raíces distintas en progresión geométrica, entonces el coeficiente m es nulo.

RESOLUCIÓN:

Si a es raíz, también lo es $-a$, por lo cual, si tuviera cuatro raíces distintas serían, por ejemplo, $a,b,-a,-b$, con $a \neq b$.

La razón r de la progresión ha de ser distinta de -1, por lo que el único orden posible es a,b,-a,-b (también, obviamente, puede ser $b,a,-a,-b$).

Esto quiere decir que $b=ar$, $-a=ar^2$, $-b=ar^3$, de lo cual se deduce que $r=i$ o bien $r=-i$. Si $r=i$, la progresión sería: $a,ia,-a,-ia$, y si $r=-i$, la progresión sería $a,-ia,-a,ia$.

En todo caso podemos factorizar el polinomio de cuarto grado del modo:

$$(x-a)(x+a)(x-ia)(x+ia) = 0$$

Es decir: $(x^2 - a^2)(x^2 + a^2) = 0$, o sea, $x^4 - a^4 = 0$, por lo cual, comparando con la ecuación de cuarto grado $x^4 + mx^2 + n = 0$ del enunciado, se deduce que $m=0$ y $n=-a^4$.

PROBLEMA 065 (110611)

Determinar en función de b>1 el valor de la integral:

$$\varphi(b) = \int_0^b |x-1|.\cos x.dx$$

RESOLUCIÓN:

$$\varphi(b) = \int_0^b |x-1|\cos x.dx = \int_0^1 |x-1|\cos x.dx + \int_1^b |x-1|\cos x.dx = \int_0^1 (1-x)\cos x.dx +$$

$$+\int_1^b (x-1)\cos x.dx$$

Determinación de la primitiva:

$$\left.\begin{matrix} x-1=u & dx=du \\ \cos x.dx = dv & v = senx \end{matrix}\right\} \rightarrow \int (x-1).\cos xdx = (x-1).senx - \int senxdx = (x-1)senx + \cos x + C$$

De lo cual, también es $\int (1-x).\cos xdx = (1-x).senx + \int senxdx = (1-x)senx - \cos x + C$

Aplicamos la regla de Barrow:

$$\int_0^1 (1-x)\cos x.dx = \left[(1-x)senx - \cos x\right]_0^1 = 0 - \cos 1 - 0 + 1 = 1 - \cos 1$$

$$\int_1^b (x-1)\cos .dx = \left[(x-1)senx + \cos x\right]_1^b = (b-1)senb + \cos b - \cos 1$$

Finalmente:

$$\varphi(b) = \int_0^b |x-1|\cos x.dx = \int_0^1 (1-x)\cos x.dx + \int_1^b (x-1)\cos x.dx = 1 - \cos 1 + (b-1)senb +$$

$$+\cos b - \cos 1 = (b-1)senb + \cos b - 2\cos 1 + 1$$

Resultado:

$$\boxed{\varphi(b) = (b-1)senb + \cos b - 2\cos 1 + 1}$$

PROBLEMA 064 (140511)

Demostrar que los números *49, 4489, 444889, ...,* obtenidos colocando el número *48* en medio del número anterior, son cuadrados de números enteros.
(propuesto en 1988, XXV Olimpiada Matemática, fase de Sevilla, España)

RESOLUCIÓN:

Los números son de la forma

$$49 = 4.10 + 9$$
$$4489 = 44.100 + 8.10 + 9$$
$$444889 = 444.1000 + 88.10 + 9$$
$$44448889 = 4444.10000 + 888 + 10 + 9$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$4.. - n - .48 - n - 1 - 89 = 4... - n - ...4.10^n + 8... - n - 1 - ..8.10 + 9$$

Si escribimos los números en desarrollo de potencias de 10:

$$\varphi_1 = 49 = 4.10 + 9 = \frac{4.10 - 4}{9}.10 + 9$$
$$\varphi_2 = 4489 = 44.10^2 + 8.10 + 9 = \frac{4.10^2 - 4}{9}.10^2 + \frac{8.10 - 8}{9}.10 + 9$$
$$\varphi_3 = 444889 = 444.10^3 + 88.10 + 9 = \frac{4.10^3 - 4}{9}.10^3 + \frac{8.10^2 - 8}{9}.10 + 9$$
$$\varphi_4 = 44448889 = 4444.10^4 + 888.10 + 9 = \frac{4.10^4 - 4}{9}.10^4 + \frac{8.10^3 - 8}{9}.10 + 9$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\varphi_n = 4... - n - 48... - (n-1)...89 = \frac{4.10^n - 4}{9}.10^n + \frac{8.10^{n-1} - 8}{9}.10 + 9$$

Veamos cómo es cada número, φ_n, para todo valor de $n \in N^+$:

$$\varphi_n = \frac{4.10^n - 4}{9}.10^n + \frac{8.10^{n-1} - 8}{9}.10 + 9 = \frac{4.10^{2n} - 4.10^n + 8.10^n - 8.10 + 81}{9} =$$
$$= \frac{4.10^{2n} + 4.10^n + 1}{9} = \frac{(2.10^n + 1)^2}{3^2} = \left(\frac{2.10^n + 1}{3}\right)^2$$

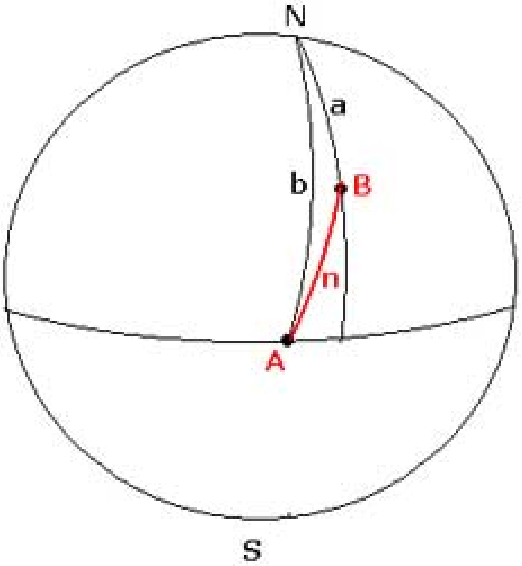
Es decir, todo número φ_n es de la forma $\left(\frac{2.10^n+1}{3}\right)^2$, que es un número entero al cuadrado, pues 2.10^n+1 es divisible por 3, ya que la suma de sus dígitos es siempre tres, para todo valor de $n \in N^+$.

Luego, queda probado que todo número de la forma indicada en el enunciado es el cuadrado de un entero.

PROBLEMA 063 (160411)

Determinar la distancia existente entre los dos puntos A y B de la superficie terrestre que se indican mediante sus coordenadas geográficas (la primera es la longitud y la segunda la latitud): $A(-13^o, 0^o)$, $B(17^o, 45^o)$.

RESOLUCIÓN:



En el triángulo esférico ABN se tiene que:

Angulo N=13º+17º=30º
Lado b=90º
Lado a=45º

Se trata de determinar el lado n. Bastará usar la fórmula del coseno de la trigonometría esférica:

$$\cos n = \cos a.\cos b + sena.senb.\cos N$$

$$\cos n = 0{,}707107.0 + 0{,}707107.1.0.866025 =$$
$$= 0{,}6123723$$

$$n = \arccos(0{,}6123723) = 52^o 14'19''$$

Como n está medido sobre un círculo máximo de la esfera terrestre puede establecerse la siguiente proporcionalidad, llamando d a la distancia en kilómetros entre ambos puntos y R al valor en kilómetros del radio del planeta:

$$\frac{360^o}{2\pi R} = \frac{n}{d} \rightarrow d = \frac{2\pi R}{360}.n = 5.758{,}72\ kilómetros$$

PROBLEMA 062 (190311)

a) Indíquese la manera de integrar ecuaciones diferenciales de primer orden con variables separables.
b) Intégrense las ecuaciones diferenciales siguientes:

1) $y'=(x+1).y$

2) $\dfrac{\cos x}{1+e^y}dx+2dy=0$

RESOLUCIÓN:

a) Las ecuaciones diferenciales en variables separables de primer orden son de la forma siguiente:

$$f_1(x).g_1(y).dx=f_2(x).g_2(y).dy$$

o sea:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}.dx=\frac{g_1(y)}{g_2(y)}.dy$$

integrando:

$$\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}.dx=\int\frac{g_1(y)}{g_2(y)}.dy$$

y llamando $F(x)=\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}.dx$, $G(y)=\int\frac{g_1(y)}{g_2(y)}.dy$, se tiene $F(x)+C=G(y)$

(C constante arbitraria)

b)

1) $y'=(x+1).y\rightarrow\dfrac{dy}{dx}=(x+1).y\rightarrow\dfrac{dy}{y}=(x+1).dx\rightarrow\int\dfrac{dy}{y}=\int(x+1).dx$

integrando: $Ln\ y=\frac{1}{2}x^2+x+C$, o bien, llamando $C=Ln\ K$:

$$Ln\ y-Ln\ K=\frac{1}{2}x^2+x+C\rightarrow Ln\frac{y}{K}=\frac{1}{2}x^2+x\rightarrow\frac{y}{K}=e^{\frac{1}{2}x^2+x}\rightarrow y=K.e^{\frac{1}{2}x^2+x}$$

(K constante arbitraria)

2) $\dfrac{\cos x}{1+e^y}dx+2dy=0\rightarrow\cos x.dx=-2(1+e^y).dy\rightarrow\int\cos x.dx=-2\int(1+e^y).dy$

integrando: $sen\ x+C=-2(y+e^y)\rightarrow sen\ x+C+2(y+e^y)=0$

(C constante arbitraria)

PROBLEMA 061 (190211)

Calcular la integral

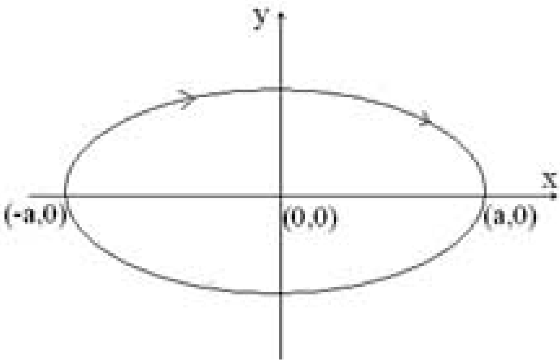
$$\int_C y^2dx + x^2dy$$

donde C es la mitad superior de la elipse

$$\begin{cases} x = a.\cos t \\ y = b.sen\, t \end{cases}$$

que se recorre en el sentido de las agujas del reloj.

RESOLUCIÓN:



$$\begin{cases} x = a.\cos t \\ y = b.sen\, t \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} dx = -a.sent \\ dy = b.\cos t \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x^2 = a^2.\cos^2 t \\ y^2 = b^2.sen^2 t \end{cases}$$

Valores de la variable t en el punto inicial *(-a,0)* y en el punto final *(a,0)* del recorrido sobre la semielipse superior:

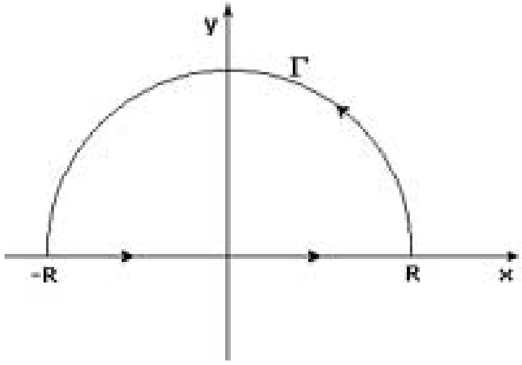
- en el punto inicial *(-a,0)*: $x = -a \rightarrow \cos t = -1 \rightarrow t = \pi$
- en el punto final *(a,0)*: $x = a \rightarrow \cos t = 1 \rightarrow t = 0$

Por lo que escribimos la integral en función de la variable t:

$$\int_C y^2dx + x^2dy = \int_\pi^0 (b^2sen^2t).(-a.sent).dt + (a^2\cos^2 t).(b.\cos t).dt = -ab\int_\pi^0 bsen^3t + a\cos^3 t.dt =$$

$$= -ab^2\int_\pi^0 sen^3t.dt + a^2b\int_\pi^0 \cos^3 t.dt = ab^2(\cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t)\Big|_\pi^0 + a^2b(sent - \frac{1}{3}sen^3t)\Big|_\pi^0 = \frac{4}{3}ab^2$$

PROBLEMA 060 (220111)



a) Si $|f(z)| \leq \frac{M}{R^k}$, para $z = R.e^{i\theta}$, donde k>1 y M son constantes, demostrar que

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma} f(z).dz = 0$$

siendo Γ el arco semicircular de la figura.

b) Calcular: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$

RESOLUCIÓN:

a) Puesto que es $|f(z)| \leq \frac{M}{R^k}$ para $z = R.e^{i\theta}$, se tendrá que

$$\left| \int_{\Gamma} f(z).dz \right| \leq \int_{\Gamma} |f(z)|.|dz| \leq \pi.\frac{M}{R^{k-1}}$$

por lo que al tender al límite:

$$\lim_{R \to \infty} \left| \int_{\Gamma} f(z).dz \right| \leq \lim_{R \to \infty} \pi \frac{M}{R^{k-1}} = 0$$

por tanto:

$$\lim_{R \to \infty} \left| \int_{\Gamma} f(z).dz \right| = 0 \to \int_{\Gamma} f(z).dz = 0$$

b) Cálculo de la integral $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$:

Veamos que la función de variable compleja $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$ verifica la condición del apartado anterior:

Si $z = R.e^{i\theta}$,es $|f(z)| = \left| \frac{1}{1+R^4e^{4i\theta}} \right| \leq \frac{1}{R^4e^{4i\theta}-1} \leq \frac{1}{\left|R^4e^{i\theta}\right|-1} = \frac{1}{R^4-1} \leq \frac{2}{R^4}$

(M=2, R=4)

La integral $\oint_C \frac{dz}{z^4+1}$ sobre el contorno cerrado C de la figura es

$$\oint_C \frac{dz}{z^4+1} = 2\int_0^R \frac{dx}{x^4+1} + \int_\Gamma \frac{dz}{z^4+1}$$

Determinamos los polos igualando a cero el denominador $z^4+1=0$, con lo que resultan:

$$z_1 = e^{\frac{1}{4}\pi i}, z_1 = e^{\frac{3}{4}\pi i}, z_1 = e^{\frac{5}{4}\pi i}, z_1 = e^{\frac{7}{4}\pi i}$$

de los cuales solamente quedan dentro del recinto los $z_1 = e^{\frac{1}{4}\pi i}, z_2 = e^{\frac{3}{4}\pi i}$, para los que calculamos los residuos a fin de aplicar el teorema de Cauchy:

$$r_1 = \lim_{z\to z_1} (z-z_1).\frac{1}{z^4+1} = \lim_{z\to z_1} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4}e^{-\frac{3}{4}\pi i}$$

$$r_2 = \lim_{z\to z_2} (z-z_2).\frac{1}{z^4+1} = \lim_{z\to z_2} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4}e^{-\frac{9}{4}\pi i}$$

Por el teorema de Cauchy, es $\oint_C \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i(r_1+r_2) = \frac{\pi i}{2}\left(e^{-\frac{3}{4}\pi i} + e^{-\frac{9}{4}\pi i}\right)$

Puesto que $i = \cos\left(\pi/2\right) + isen\left(\pi/2\right) = e^{\frac{\pi}{2}i}$, se tiene, al sustituir:

$$\oint_C \frac{dz}{z^4+1} = \frac{\pi}{2}\left(e^{-\frac{1}{4}\pi i} + e^{-\frac{7}{4}\pi i}\right) = \frac{\pi}{2}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{2}\sqrt{2}$$

Y de aquí, obtenemos la integral buscada:

$$\int_0^R \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\oint_C \frac{dz}{z^4+1} - \frac{1}{2}\int_\Gamma \frac{dz}{z^4+1} \to$$

$$\to \int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty} \oint_C \frac{dz}{z^4+1} - \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma \frac{dz}{z^4+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} + 0 = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$