RESOLVIENDO PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 85 (221212)

Un número natural tiene dos factores primos y ocho divisores naturales. La suma de sus divisores es 320. Hallar dicho número.

RESOLUCIÓN:

Sean p y q los dos factores primos. Del enunciado se tiene:

$$N = p^x.q^y, \qquad p,q \ primos$$

De ser 8 el número de sus divisores, se cumplirá:

$$(1+x)(1+y) = 8$$

de lo cual:

$$1+x=4 \to x=3$$
$$1+y=2 \to y=1$$

por tanto:

$$N = p^3.q$$

De ser 320 la suma de sus divisores:

$$\frac{p^4-1}{p-1}.\frac{q^2-1}{q-1} = 320 = 2^6.5$$

Es decir:

$$(1+p+p^2+p^3)(1+q) = 2^6.5$$

Las posibilidades son las siguientes:

$1+p+p^2+p^3$	$1+q$		
2^6	5	$q=4$	q no seria primo
2^5	2.5	$q=9$	q no seria primo
2^4	$2^2.5$	$q=19$	$1+p+p^2+p^3=2^4$ no tiene soluc entera
2^3	$2^3.5$	$q=39$	q no seria primo
2^2	$2^4.5$	$q=79$	$1+p+p^2+p^3=2^2$ p=1 no vale
2	$2^5.5$	$q=159$	q no seria primo
5	2^6	$q=63$	q no seria primo
5.2	2^5	$q=31$	$1+p+p^2+p^3=5.2$ no tiene soluc entera
5.2^2	2^4	$q=15$	q no seria primo
5.2^3	2^3	$q=7$	$1+p+p^2+p^3=5.2^3=40$ $p=3$, *válida*
5.2^4	2^2	$q=3$	$1+p+p^2+p^3=5.2^4$ no tiene soluc entera
5.2^5	2	$q=1$	no vale

Por consiguiente ha de ser:

$$q=7,\ p=3 \to N = p^3.q = 3^3.7 = 189$$

PROBLEMA 84 (241112)

En el anillo $R[x]$ de los polinomios se considera el ideal I de los múltiplos de x^2-1. Se pide:

a) Probar que todo elemento del anillo cociente $A=R[x]/I$ admite un representante de grado menor o igual a uno.
b) Razonar si A posee divisores de cero.
c) ¿Es I un cuerpo?.

RESOLUCIÓN:

a) Los elementos de $A=R[x]/I$ son las clases de equivalencia cl_i, cuyos elementos son los polinomios cuya diferencia pertenece a I. O sea:

$$cl_i = p_i(x)+I$$

Sea $p(x)$ un polinomio cualquiera de la clase cl_i. Se tiene, dividiéndolo por x^2-1:

$$p(x)=(x^2-1).d(x)+r(x), \quad grdr(x)\leq 1$$

y de aquí

$$p(x)-r(x)=(x^2-1).d(x)$$

por lo que

$$p(x)-r(x)\in I \Rightarrow r(x)\in cl_i \wedge grdr(x)\leq 1$$

Luego, la clase cl_i admite efectivamente un representante de grado menor o igual a uno: $r(x)$.

b) Divisores de cero:

De existir cl_i y cl_j divisores de cero, cumplirían:

$$cl_i.cl_j = 0+I, \quad con \;\; cl_i \neq 0 \;\; y \;\; cl_j \neq 0$$

Es decir, existirán representantes $p_i(x), p_j(x)$ tales que

$$\begin{matrix} cl_i = p_i(x)+I \\ cl_j = p_j(x)+I \end{matrix} \Rightarrow cl_i.cl_j = p_i(x).p_j(x)+I = 0+I = I$$

Y como la base del ideal I es $x^2-1=(x-1)(x+1)$, serán:

$$p_i(x)=x-1$$
$$p_j(x)=x+1$$

con lo que $cl_i.cl_j = p_i(x).p_j(x)+I=(x-1)(x+1)+I=(x^2-1)+I=I$

Por tanto, son efectivamente divisores del cero las clases

$$cl_i = p_i(x)+I$$
$$cl_j = p_j(x)+I$$

en consecuencia, el anillo $A=R[x]/I$ si tiene divisores de cero.

c) Un cuerpo no tiene divisores de cero: $A=R[x]/I$ no es cuerpo.

PROBLEMA 83 (271012)

d) Determínense los campos de convergencia de las series

$$\sum_1^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n.3^n} \quad \text{y} \quad \sum_1^{\infty}(1-x).x^n$$

e) Estúdiese la convergencia uniforme de la serie $\sum_1^{\infty}(1-x).x^n$ en el intervalo *(-1/2,1/2)*.

RESOLUCIÓN:

a)

$\sum_1^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n.3^n}$ Llamamos $u_n=\frac{1}{n.3^n}x^{n-1}$, de donde $u_{n+1}=\frac{1}{(n+1).3^n}x^{n-1}$

se tiene:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n}{n+1}\frac{x}{3}\text{, y para } n\to\infty \text{ es } \lim\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{|x|}{3}$$

Si $|x|<3\to\lim\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{|x|}{3}<1\to$ converge

Si $x=3\to\sum_1^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n.3^n}=\sum_1^{\infty}\frac{1}{3n}\to$ diverge (por el crit. integral)

Si $x=-3\to\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n.3}\to$ serie alternada $\begin{cases}\left\{\frac{1}{3n}\right\} decrec \\ \lim(1/3n)=0\end{cases}\to$ converge

Campo de convergencia: $[-3,3)$

$\sum_1^{\infty}(1-x).x^n$ Llamamos $u_n=(1-x).x^n$, de donde $u_{n+1}=(1-x).x^{n+1}$, y

se tiene: $u_{n+1}/u_n=|x|$

Si $|x|<1\to\lim\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=|x|<1\to$ converge

Si $x=1\to\sum_1^{\infty}(1-x).x^n=0\to$ converge

Si $x=-1\to\sum_1^{\infty}(-1)^n.2,\ \ ser\ altern\to$ diverge

Campo de convergencia: $\left(-1,1\right]$

b) $\sum_{1}^{\infty}(1-x).x^n$. Aplicamos la definición: será uniformemente convergente si es uniform. Convergente la sucesión, $S_n(x)$, de sumas parciales, o sea, si:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_0 \in N / \left|S(x) - S_n(x)\right| < \varepsilon, \quad \forall n > N_0$$

$$S_n(x) = \sum_{0}^{n-1}(1-x).x^n = (1-x)\sum_{0}^{n-1}x^n = (1-x).\frac{x^{n-1}x-1}{x-1} = 1-x^n$$

$S(x) = \lim S_n(x) = \lim(1-x^n) = 1$, para $n \to \infty$

$\left|S(x) - S_n(x)\right| = \left|1-(1-x^n)\right| = \left|x^n\right|$, y sea $\left|x^n\right| < \varepsilon$ a partir de $n>N_0$.

Esto quiere decir que $n.Ln\left|x\right| < Ln\varepsilon \to n < \dfrac{Ln\varepsilon}{Ln\left|x\right|}$

Se tiene, pues, que para $n > \dfrac{Ln\varepsilon}{Ln\left|x\right|}$ se verifica que $\left|S(x) - S_n(x)\right| < \varepsilon$,

Luego la sucesión $\left\{S_n(x)\right\}$ es uniformemente convergente y, por tanto, es uniformemente convergente la serie $\sum_{0}^{\infty}(1-x).x^n$

PROBLEMA 82 (290912)

Estudiar la convergencia de la integral

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^n}}$$

RESOLUCIÓN:

Es una integral impropia de 1ª especie, pues $\lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^n}}=\infty, \quad \forall n\in R$

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^n}}=\int_0^1 \frac{dt}{3t^{2/3}\sqrt{\left(1-t\right)^n}}=\int_0^{1/2} \frac{dt}{3t^{2/3}\sqrt{\left(1-t\right)^n}}+\int_{1/2}^1 \frac{dt}{3t^{2/3}\sqrt{\left(1-t\right)^n}} \qquad (x^3=t)$$

La primera integral de esta suma, $\int_0^{1/2} \frac{dt}{3t^{2/3}\sqrt{\left(1-t\right)^n}}$, tiene acotado $1/3t^{2/3}$ (pues es *2/3<1*) en el intervalo $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, y también en este intervalo está acotada, para n finito, la expresión $1/(1-t)^{n/2}$.

Luego $\int_0^{1/2} \frac{dt}{3t^{2/3}\sqrt{\left(1-t\right)^n}}$ es convergente.

La segunda integral, $\int_{1/2}^1 \frac{dt}{3t^{2/3}\sqrt{\left(1-t\right)^n}}$, tiene acotada en $\left[\frac{1}{2},1\right]$ la expresión $1/3t^{2/3}$, y la integral $\int_{1/2}^1 \frac{dt}{\left(1-t\right)^{n/2}}$ será convergente para $\frac{n}{2}<1$, esto es, para $n<2$.

En definitiva,

$$\boxed{I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^n}} \text{ converge para } n<2}$$

PROBLEMA 81 (010912)

Hállese la ecuación cartesiana del plano normal a la hélice circular

$$x = a.\cos t$$
$$y = a.sent$$
$$z = k.t$$

en el punto $t=0$.

RESOLUCIÓN:

Ecuación del plano normal en un punto t:

$$\frac{x - x(t)}{x'(t)} + \frac{y - y(t)}{y'(t)} + \frac{z - z(t)}{z'(t)} = 0$$

y siendo, en este caso

$$x'(t) = -a.sent$$
$$y'(t) = a\cos t$$
$$z'(t) = k$$

se tiene, al sustituir:

$$\frac{x - a\cos t}{-a.sent} + \frac{y - a.sent}{a.\cos t} + \frac{z - kt}{k} = 0$$

en $t=0$:

$$\frac{x - a}{0} + \frac{y - 0}{a} + \frac{z - 0}{k} = 0$$

$$\boxed{ky + az = 0}$$

PROBLEMA 80 (040812)

Calcular

$$\oint_C \frac{e^z dz}{(z-1)(z+3)^2}$$

siendo C dada por

a) $|z| = 3/2$, b) $|z| = 10$.

RESOLUCIÓN:

- Polos: $z=1$ (simple), $z=-3$ (doble)

- Residuos:

$$a_{-1} = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} = \lim_{z\to 1}\frac{e^z}{(z+3)^2} = \frac{e}{16}$$

$$b_{-1} = \lim_{z\to -3}\frac{d}{dz}\left\{(z+3)^2\frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}\right\} = \lim_{z\to -3}\frac{d}{dz}\frac{e^z}{(z-1)} = \lim_{z\to -3}\frac{(z-1).e^z - e^z}{(z-1)^2} = -\frac{5}{16}e^{-3}$$

a) Si $|z| = 3/2$, entonces C encierra solo al polo z=1.

$$\oint_C \frac{e^z dz}{(z-1)(z+3)^2} = 2\pi i a_{-1} = 2\pi i\frac{e}{16} = \frac{\pi e}{8}i$$

b) Si $|z| = 10$, entonces C encierra solo al polo z=1 y al polo z=-3.

$$\oint_C \frac{e^z dz}{(z-1)(z+3)^2} = 2\pi i(a_{-1} + b_{-1}) = 2\pi i\left(\frac{e}{16} - \frac{5}{16}e^{-3}\right) = \frac{\pi}{8}(e - 5e^{-3})i$$

PROBLEMA 79 (070712)

a) Determinar a y b para que los planos de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ 3x - y - az = b \end{cases}$$

Se corten en una recta r.

b) Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto $P(2,1,3)$.

RESOLUCIÓN:

a) Aplicando el Teorema de Rouché Fröbenius, la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada han de tener rango 2 para que exista una recta de soluciones.

Matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -a \end{pmatrix} \wedge rang(A) = 2 \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -a \end{vmatrix} = 0 \rightarrow a = -1$$

Matriz ampliada, para $a = -1$:

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & b \end{pmatrix} \wedge rang(A') = 2 \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & b \end{vmatrix} = 0 \rightarrow b = 4$$

b) Consideremos el haz de planos que contiene a la recta r intersección y elijamos aquel de los planos del haz que contiene el punto P indicado:

$$2x - y + z - 3 + \lambda(x - y + z - 2) = 0 \rightarrow (2+\lambda)x - (1+\lambda)y + (1+\lambda)z - (3+2\lambda) = 0$$

Obtengamos el valor del parámetro λ que nos da precisamente el plano que contiene al punto $P(2,1,3)$:

$$(2+\lambda)2 - (1+\lambda) + (1+\lambda)3 - (3+2\lambda) = 0 \rightarrow 3 + 2\lambda = 0 \rightarrow \lambda = -3/2$$

Sustituimos este valor del parámetro en la ecuación del haz:

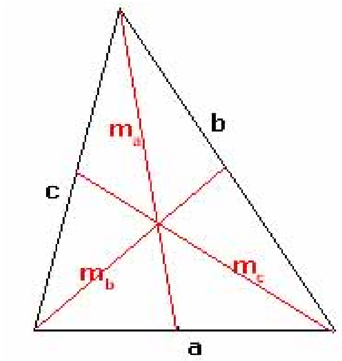
$$(2 - 3/2)x - (1 - 3/2)y + (1 - 3/2)z - (3 - 3) = 0 \rightarrow x + y - z = 0$$

La ecuación del plano es, por tanto:

$$x + y - z = 0$$

PROBLEMA 78 (090612)

Demostrar que en un triángulo cualquiera la razón entre la suma de los cuadrados de sus lados y la suma de los cuadrados de sus medianas es 4/3.



$$\frac{a^2+b^2+c^2}{m_a^2+m_b^2+m_c^2}=\frac{4}{3}$$

RESOLUCIÓN:

Si consideramos que, por ejemplo, la mediana m_a divide al triángulo dado en dos triángulos, aplicando a uno cualquiera de ellos el Teorema del Coseno, tenemos:

$$m_a^2=(a/2)^2+b^2-2(a/2)b.\cos C\text{, o bien }\quad m_a^2=\frac{a^2}{4}+b^2-ab.\cos C$$

Asimismo, si aplicamos el mismo teorema al triángulo completo, obtenemos:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

con lo que, al eliminar $-ab\cos C$ entre ambas ecuaciones, resulta:

$$m_a^2=\frac{a^2}{4}+b^2+\frac{c^2-a^2-b^2}{2}=\frac{a^2+4b^2+2c^2-2a^2-2b^2}{4}=\frac{1}{4}\left(2b^2+2c^2-a^2\right)\text{, o bien:}$$

$$4m_a^2=2b^2+2c^2-a^2$$

si hacemos lo mismo con las otras dos medianas, obtenemos por analogía:

$$4m_a^2=2b^2+2c^2-a^2,\quad 4m_b^2=2a^2+2c^2-b^2,\quad 4m_c^2=2a^2+2b^2-c^2$$

sumando estas relaciones término a término:

$$4m_a^2+4m_b^2+4m_c^2=3a^2+3b^2+3c^2\rightarrow 4(m_a^2+m_b^2+m_c^2)=3(a^2+b^2+c^2)\rightarrow\frac{a^2+b^2+c^2}{m_a^2+m_b^2+m_c^2}=\frac{4}{3}$$

PROBLEMA 77 (120512)

Probar que $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$ es un número entero. Determinarlo.

RESOLUCIÓN:

Llamemos $\alpha=\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$, $\beta=\sqrt[3]{16-15\sqrt{3}}$. Si x es el número buscado, será:

$x=\alpha+\beta$, con lo que $x^3=(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2=26+15\sqrt{3}+26-15\sqrt{3}+$
$+3\alpha\beta(\alpha+\beta)=26+26+3\alpha\beta.x=52+3\alpha\beta.x$

y siendo $\alpha\beta=\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}.\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}=\sqrt[3]{(26+15\sqrt{3}).(26-15\sqrt{3})}=\sqrt[3]{26^2-15^2.3}=$
$=\sqrt[3]{676-675}=1$

resulta finalmente que $x^3=52+3x$. Si esta ecuación tiene alguna solución entera se puede determinar mediante la regla de Ruffini:

$$x^3-3x-52=0\rightarrow(x-4)(x^2+4x+13)=0$$

y, finalmente, resolviendo la ecuación de 2º grado:

$$(x-4).(x+2-3i).(x+2+3i)=0$$

El número entero buscado es el 4.

PROBLEMA 76 (140412)

Determinar la curvatura total y la curvatura media de las superficies de revolución de ecuación

$$z = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

RESOLUCIÓN:

Sabemos que si son k_1, k_2 las curvaturas principales, se definen:

Curvatura total: $K = k_1.k_2$ Curvatura media: $M = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$

- Expresión de ambas curvaturas, total y media, en función de los coeficientes de las formas fundamentales:

De la ecuación de 2º grado en k_i (curvatura principal):

$$\begin{vmatrix} g_{11}k_i - l_{11} & g_{12}k_i - l_{12} \\ g_{12}k_i - l_{12} & g_{22}k_i - l_{22} \end{vmatrix} = 0$$

se obtiene: $(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)k_i^2 - (g_{11}l_{22} + g_{22}l_{11} - 2g_{12}l_{12}).k_i + l_{11}l_{22} - l_{12}^2 = 0$

de donde, siendo k_1, k_2 las soluciones, se tiene:

$$k_1.k_2 = \frac{l_{11}l_{22} - l_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{l}{g}, \qquad k_1 + k_2 = \frac{g_{11}l_{22} + g_{22}l_{11} - 2g_{12}l_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{g_{11}l_{22} + g_{22}l_{11} - 2g_{12}l_{12}}{g}$$

De donde:

$$K = \frac{l}{g} \qquad M = \frac{g_{11}l_{22} + g_{22}l_{11} - 2g_{12}l_{12}}{2g}$$

- Determinación de los coeficientes de las dos formas fundamentales:

haciendo $x^2 + y^2 = r^2$:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = rsen\varphi \\ z = f(r) \end{cases}$$

ecuación vectorial de la superficie:

$$X(r,\varphi) = \left(r\cos\varphi,\ rsen\varphi,\ f(r)\right)$$

$$X_1 = \frac{\partial X}{\partial r} = \left(\cos\varphi,\ sen\varphi,\ f'\right) \qquad X_2 = \frac{\partial X}{\partial \varphi} = \left(-rsen\varphi,\ r\cos\varphi,\ 0\right)$$

$$X_{11} = \left(0,\ 0,\ f''\right) \quad X_{22} = \left(-r\cos\varphi,\ -rsen\varphi,\ 0\right) \quad X_{12} = \left(-sen\varphi,\ \cos\varphi,\ 0\right)$$

de donde:

$$\left.\begin{array}{lll} g_{11} = & X_1.X_1 = & 1+f'^2 \\ g_{22} = & X_2.X_2 = & r^2 \\ g_{12} = & X_1.X_2 = & 0 \end{array}\right\} g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = r^2\left(1+f'^2\right)$$

y siendo $N = \dfrac{X_1 \wedge X_2}{|X_1 \wedge X_2|} = \dfrac{X_1 \wedge X_2}{\sqrt{g}} = \dfrac{X_1 \wedge X_2}{r\sqrt{1+f'^2}}$ y $X_1 \wedge X_2 = \left(-f'.r.\cos\varphi, -f'.r.sen\varphi, r\right)$

se tiene que: $N = \left(-\dfrac{f'.\cos\varphi}{\sqrt{1+f'^2}}, -\dfrac{f'.sen\varphi}{\sqrt{1+f'^2}}, \dfrac{1}{\sqrt{1+f'^2}}\right)$

por tanto:

$$\left.\begin{array}{lll} l_{11} = & X_{11}.N = & \dfrac{f''}{\sqrt{1+f'^2}} \\ l_{22} = & X_{22}.N = & \dfrac{r.f'}{\sqrt{1+f'^2}} \\ l_{12} = & 0 & \end{array}\right\} l = l_{11}l_{22} - l_{12}^2 = \frac{r.f'.f''}{\sqrt{1+f'^2}}$$

por otra parte: $g_{11}l_{22} + g_{22}l_{11} - 2g_{12}l_{12} = \dfrac{r^2 f''}{\sqrt{1+f'^2}} + \dfrac{rf'(1+f'^2)}{\sqrt{1+f'^2}}$

sustituyendo en la expresión de la curvatura total y media:

$$K = \frac{l}{g} = \frac{f'f''}{r\left(1+f'^2\right)}$$

$$M = \frac{g_{11}l_{22} + g_{22}l_{11} - 2g_{12}l_{12}}{2g} = \frac{f''}{\left(1+f'^2\right)^{3/2}} + \frac{f'(1+f'^2)}{\left(1+f'^2\right)^{3/2}}$$

PROBLEMA 75 (170312)

En una ciudad el 55% de la población consume aceite del tipo A, el 30% del tipo B y el 20% de ambos tipos de aceite. Se escoge una persona al azar:

1. Si ésta consume aceite del tipo A, ¿Cuál es la probabilidad de que consuma también del tipo B?.
2. Si consume del tipo B, ¿Cuál es la probabilidad de que no consuma del tipo A?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que no consuma del tipo A ni del tipo B?

RESOLUCIÓN:

Los datos que se nos facilita son: $A \rightarrow 55\%,\ B \rightarrow 30\%,\ A \cap B \rightarrow 20\%$

1. $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{20}{55} = 4/11$ (36,36%)

2. $P[(A/B)'] = 1 - P(A/B) = 1 - \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - \dfrac{20}{30} = 1/3$ (33,33%)

3. $P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - [0{,}55 + 0{,}30 - 0{,}20] =$
$= 0{,}35 = 7/20$ (35%)

PROBLEMA 74 (180212)

Sea U el conjunto de todas las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Donde a, b, c y d son enteros tales que $ad\text{-}bc=1$. Encuentre el conjunto de todas las matrices de U que verifican:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

RESOLUCIÓN:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ecuaciones:

$$ad-bc=1$$
$$a^2+bc=1$$
$$ab+bd=0$$
$$ca+dc=0$$
$$cb+d^2=1$$

De la 3ª: $(a+d).b=0 \to b=0$

De la 4ª: $c.(a+d)=0 \to c=0$

De la 1ª: $ad-bc=1 \to ad=bc+1=0+1=1$

De la 5ª: $cb+d^2=1 \to d^2=1-cb=1-0=1 \to d=\pm 1$

De lo cual: $a = {}^{1}\!/_{d} = \pm 1$ (signo de a = signo de b)

En definitiva las matrices pedidas son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 73 (210112)

Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{c}{1+x^2}, & 0\le x\le 1\\ 0, & en\ el\ resto\end{cases}$$

a) Calcular el valor de c para que $f(x)$ sea una función de densidad.
b) Hallar la función de distribución.
c) Esperanza matemática de la variable x que tiene por función de densidad $f(x)$.

RESOLUCIÓN:

a) Ha de ser $\int_0^1 f(x).dx=1$, por tanto:

$$\int_0^1 \frac{c}{1+x^2}.dx=c.[arc\,tgx]_0^1=c.\frac{\pi}{4}=1\to c=\frac{4}{\pi}$$

b) Función de distribución:

$$si\ x<0 \quad \to F(x)=0$$

$$si\ 0\le x\le 1\to \int_0^x f(x).dx=\int_0^x \frac{4/\pi}{1+x^2}dx=\frac{4}{\pi}arc\,tgx$$

$$si\ x>1 \quad \to F(x)=1$$

por tanto:

$$F(x)=\begin{cases}0 & para\ x<0\\ \dfrac{4}{\pi}arc\ tgx & para\ 0\le x\le 1\\ 1 & para\ x>1\end{cases}$$

c) Esperanza matemática:

$$E[x]=\int_0^1 x\frac{4/\pi}{1+x^2}dx=\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2}L(1+x^2)\right]_0^1=\frac{2}{\pi}L2$$