RESOLVIENDO PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 111 (171214)

a) Establecer algun modo de resolver las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden homogeneas con coeficientes variables ($p(x).y'+q(x).y=0$).

b) Aplicarlo a la resolución de la ecuación diferencial $y+(x+3).y'=0$.

RESOLUCIÓN:

a) $p(x).y'+q(x).y=0 \rightarrow y'+\frac{q(x)}{p(x)}y=0 \rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{q(x)}{p(x)}y \rightarrow \frac{dy}{y}=-\frac{q(x)}{p(x)}dx$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{q(x)}{p(x)}dx \rightarrow Ln\left(\frac{y}{C}\right)=-\int\frac{q(x)}{p(x)}dx \rightarrow \frac{y}{C}=e^{-\int\frac{q(x)}{p(x)}dx} \rightarrow y=Ce^{-\int\frac{q(x)}{p(x)}dx}$$

b) Si $y+(x+3).y'=0 \rightarrow p(x)=x+3,\ q(x)=1$

$$y=Ce^{-\int\frac{q(x)}{p(x)}dx}=Ce^{-\int\frac{1}{x+3}dx} \rightarrow y=C.e^{-Ln(x+3)}=\frac{C}{e^{Ln(x+3)}}=\frac{C}{x+3} \rightarrow (x+3).y=C$$

PROBLEMA 110 (191114)

Encontrar la ecuación de la Podaria de la elipse respecto al centro. Pasar la ecuación a polares y representarla.

RESOLUCIÓN:

Elipse: $X^2/a^2 + Y^2/b^2 = 1$

Tangente en un punto *(x,y)* genérico: $\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} y' = 0 \to y' = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$. Por tanto:

$$Y - y = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}(X - x) \to Y.y - y^2 = -\frac{b^2}{a^2}X.x + \frac{b^2}{a^2}x^2 \to Yy = -\left(\frac{b}{a}\right)^2 x.X + y^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2$$

de donde: $Yy = -\left(\frac{b}{a}\right)^2 x.X + b^2 \to \frac{Y.y}{b^2} + \frac{X.x}{a^2} = 1$

$$\text{Tangente: } \frac{Y.y}{b^2} + \frac{X.x}{a^2} = 1$$

Perpendicular a la tangente por (0,0):

$$Y - 0 = \frac{a^2}{b^2}\frac{y}{x}(X - 0) \to Y = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{y}{x} X$$

$$\text{Normal: } Y = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{y}{x} X$$

Eliminación de *(x,y)*:

$$\left.\begin{array}{l} \textit{De la Normal}: \frac{y}{x} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{Y}{X} \\ \textit{De la Tangente}: \frac{Y}{b^2}\frac{y}{x} + \frac{X}{a^2} = \frac{1}{x} \end{array}\right\} \to \frac{Y}{b^2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{Y}{X} + \frac{X}{a^2} = \frac{1}{x} \to \frac{1}{a^2}\frac{Y^2}{X} + \frac{X}{a^2} = \frac{1}{x} \qquad [1]$$

$$\textit{De la elipse: } \left(\frac{y}{x}\right)^2 \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{x^2} \to \left(\frac{b}{a}\right)^4 \frac{Y^2}{X^2}\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{x^2} \to \frac{b^2}{a^4}\frac{Y^2}{X^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{x^2} \qquad [2]$$

Multiplicando [1] por a:

$$\frac{1}{a}\frac{Y^2}{X^2} + \frac{X}{a} = \frac{a}{x} \qquad [3]$$

Multiplicando [2] por a^2:

$$\frac{b^2}{a^2}\frac{Y^2}{X^2} + 1 = \frac{a^2}{x^2} \qquad [4]$$

Sustituyendo [3] en [4]:

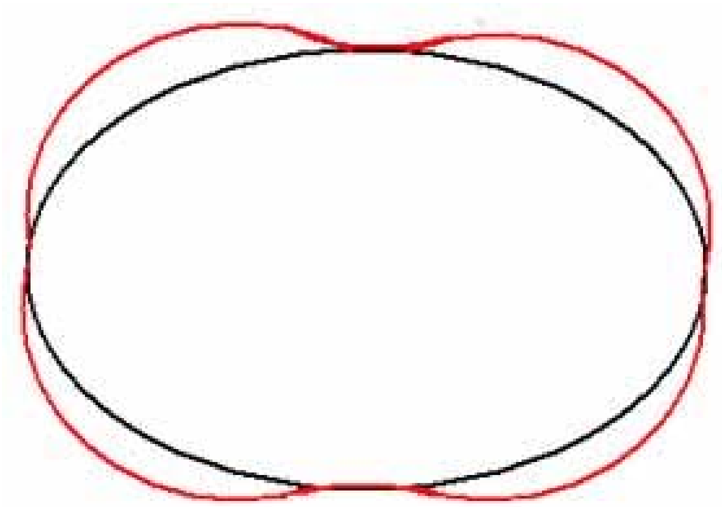
$$\frac{b^2}{a^2}\frac{Y^2}{X^2}+1=\left(\frac{1}{a}\frac{Y^2}{X}+\frac{X}{a}\right)^2$$

o sea:

$$\left(\frac{X^2+Y^2}{aX}\right)^2=\frac{a^2X^2+b^2Y^2}{a^2X^2}\rightarrow\left(X^2+Y^2\right)^2=a^2X^2+b^2Y^2$$

en coordenadas polares:

$$\left.\begin{array}{r}X^2+Y^2=\rho^2\\ X=\rho.\cos\theta\\ Y=\rho.sen\theta\end{array}\right\}\rightarrow\rho^4=a^2\rho^2\cos^2\theta+b^2\rho^2sen^2\theta\rightarrow\rho^2=a^2\cos^2\theta+b^2sen^2\theta$$



PROBLEMA 109 (221014)

Se tiene la ecuación diferencial de primer órden

$$3y'+2y=3x^2+1$$

Se pide su resolución por, al menos, dos métodos diferentes.

RESOLUCIÓN:

a) Resolución por identificación de coeficientes:

$$3y'+2y=3x^2+1$$

Solución de la homogénea: $3y_0'+2y_0=0\rightarrow y_0=C.e^{-\frac{2}{3}x}$

Solución particular de la completa:

$$y^*=Ax^2+Bx+C$$

$$y^{*}{}'=2Ax+B$$

$$3y^{*}{}'+2y^*=2Ax^2+(6A+2B)x+(3B+2C)=3x^2+1$$

identificando:

$$2A=3\rightarrow A=3/2$$

$$6A+2B=0\rightarrow B=-9/2$$

$$3B+2C=1\rightarrow C=29/4$$

$$y=y_0+y^*\rightarrow y(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{2}x+\frac{29}{4}+C.e^{-\frac{2}{3}x}$$

b) Resolución por variación de la constante:

$$3y'+2y=3x^2+1$$

Solución de la homogénea: $3y_0'+2y_0=0\rightarrow y_0=C.e^{-\frac{2}{3}x}$

$$y'=C'.e^{-\frac{2}{3}x}-\frac{2}{3}C.e^{-\frac{2}{3}x}\rightarrow 3y'=3C'.e^{-\frac{2}{3}x}-2C.e^{-\frac{2}{3}x}$$

$$3y'+2y=3C'.e^{-\frac{2}{3}x}-2C.e^{-\frac{2}{3}x}+2C.e^{-\frac{2}{3}x}=3x^2+1$$

por tanto:

$$3C'.e^{-\frac{2}{3}x}=3x^2+1\rightarrow C'=\frac{1}{3}\left(3x^2+1\right)e^{\frac{2}{3}x}$$

finalmente:

$$C=\frac{1}{3}\int\left(3x^2+1\right)e^{-\frac{2}{3}x}dx=\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{2}x+\frac{29}{4}\right)e^{\frac{2}{3}x}+k$$

$$y=C.e^{-\frac{2}{3}x}\rightarrow y=\left[\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{2}x+\frac{29}{4}\right)e^{\frac{2}{3}x}+k\right].e^{-\frac{2}{3}x}=$$

$$= \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{29}{4} + k.e^{-\frac{2}{3}x}$$

PROBLEMA 108 (240914)

Obténgase la ecuación de un cono sabiendo que tiene el vértice en *(7,10,4)* y que su directriz es

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}=1 \\ z=2 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN:

Eliminando las variables x,y,z en el sistema constituido por las generatrices y la directriz:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}=1 \\ z=2 \\ x-7=l(z-4) \\ y-10=m(z-4) \end{cases} \qquad [1]$$

$$\frac{(7-2l)^2}{4}+\frac{(10-2m)^2}{9}+\frac{1}{4}=1$$

$$\frac{(7-2l)^2-3}{4}+\frac{(10-2m)^2}{9}=0 \to 9.(7-2l)^2-27+4.(10-2m)^2=0 \to$$

$$\to 9.(49+4l^2-28l)-27+4.(100+4m^2-40m)=0 \to$$

$$\to 841-252l-160m+36l^2+16m^2=0$$

Finalmente, sustituimos en esta ecuación los valores de los parámetros m y l, despejando en [1]:

$$l=\frac{x-7}{z-4}, \qquad m=\frac{y-10}{z-4}$$

$$\boxed{841-252\left(\frac{x-7}{z-4}\right)-160\left(\frac{y-10}{z-4}\right)+36\left(\frac{x-7}{z-4}\right)^2+16\left(\frac{y-10}{z-4}\right)^2=0}$$

PROBLEMA 107 (270814)

Sea la matriz

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&0&0\\2&2&0&0\\2&2&0&0\end{pmatrix}$$

1. Calcular las sucesivas potencias de A.
2. Sea $B=I+A$ (I es la matriz identidad). Expresar B^n en función de I, A y A^2.
3. Demostrar que la inversa de B es $I-A+A^2$.
4. Expresar B^{-n} en función de I, A y A^2.

RESOLUCIÓN:

1. Se tiene:

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&0&0\\2&2&0&0\\2&2&0&0\end{pmatrix},\ A^2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\4&0&0&0\\4&4&0&0\end{pmatrix},\ \dots\ ,A^n=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ \forall n\geq 3$$

2. Asimismo:

$$B^n=(I+A)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^k=\binom{n}{0}A^0+\binom{n}{1}A^1+\binom{n}{2}A^2=1+nA+\frac{n(n-1)}{2}A$$

3. Veamos que el producto de B por $I-A+A^2$ es la identidad:

$$B.(I-A+A^2)=(I+A)(I-A+A^2)=I+A-A-A^2+A^2+A^3=I$$

Por tanto:

$$B^{-n}=I-A+A^2$$

4. Se tiene:

$$B^{-n}=\left(B^{-1}\right)^n=(I-A+A^2)^n=\left((I-A)+A^2\right)^n=\sum_{j=0}^{n}(I-A)^{n-j}.A^{2j}=$$

$$=\binom{n}{0}(I-A)^n+\binom{n}{1}(I-A)^{n-1}A^2=(I-A)^n+n(I-A)^{n-1}A^2$$

y como es $(I-A)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}I^{n-j}.(-A)^j=\binom{n}{0}(-A)^0+\binom{n}{1}(-A)^1+\binom{n}{2}(-A)^2=$

$$=1-nA+\frac{n(n-1)}{2}A^2$$

y también

$$(I-A)^{n-1}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n-1}{j}I^{n-1-j}.(-A)^j=\binom{n-1}{0}(-A)^0+\binom{n-1}{1}(-A)^1+\binom{n-1}{2}(-A)^2=$$

$$=I-(n-1)A+\frac{(n-1)(n-2)}{2}A^2$$

resulta:

$$B^{-n} = I - nA + \frac{n(n-1)}{2}A^2 + n\left(I - (n-1)A + \frac{(n-1)(n-2)}{2}A^2\right)A^2 =$$

$$= I - nA + \frac{n(n-1)}{2}A^2 + nA^2 = I - nA + \frac{n(n+1)}{2}A^2$$

PROBLEMA 106 (300714)

Integrar la función

$$f(x,y,z)=x.y.z$$

En el tetraedro definido por los planos

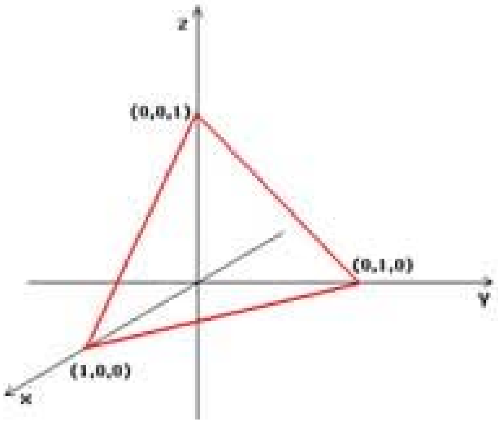
$$x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$$

RESOLUCION: (de Jerónimo Basa, 21 agosto 2014)

Pinche en este link:

http://casanchi.com/PROBLEMAS/jeronimobasa020814.pdf

RESOLUCION: (de casanchi)



$$Integral=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y} f(x,y,z).dz=$$
$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y} x.y.z.dz$$

$$\int_0^{1-x-y} x.y.z.dz=\frac{xy}{2}z^2\Big|_0^{1-x-y}=\frac{xy}{2}(1-x-y)^2=\frac{xy}{2}\left[(1-x)^2-2(1-x)y+y^2\right]=$$
$$=\frac{x(1-x)^2}{2}y-x(1-x)y^2+\frac{x}{2}y^3$$

$$\int_0^{1-x}\left(\frac{x(1-x)^2}{2}y-x(1-x)y^2+\frac{x}{2}y^3\right)dy=\left(\frac{x(1-x)^2}{4}y^2-\frac{x(1-x)y^3}{3}+\frac{x}{8}y^4\right)\Bigg|_0^{1-x}=\frac{x(1-x)^4}{4}-$$
$$-\frac{x(1-x)^4}{3}+\frac{x(1-x)^4}{8}=\frac{1}{24}x(1-x)^4$$

$$\int_0^1\frac{1}{24}x(1-x)^4dx=-\frac{1}{24}\int_1^0(1-w)w^4dw=-\frac{1}{24}\int_1^0 w^4dw+\frac{1}{24}\int_1^0 w^5dw=-\frac{1}{120}w^5\Big|_1^0+\frac{1}{144}w^6\Big|_1^0=$$
$$=\frac{1}{120}-\frac{1}{144}=\frac{1}{720}$$

Resultado:

$$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y} f(x,y,z).dz=\frac{1}{720}$$

PROBLEMA 105 (020714)

El número natural *N* descompuesto en producto de factores es de la forma:

$$N = a^x.b^y.c^z \text{, siendo } x \neq 0,\ y \neq 0,\ z \neq 0$$

El número de divisores de *N, N*^{2} y *N*^{3} es, respectivamente, *60, 315* y *910*. El *MCD* de todos los posibles valores de *N* es *900*. Hallar todos los valores que puede tomar *N*.

RESOLUCION:

Si el MCD es 900, se tiene que $900 = 2^2.3^2.5^2$, lo que nos permite encontrar los valores de a, b y c: $a = 2, b = 3, c = 5$, con lo cual el número que se busca ha de ser de la forma $N = 2^x.3^y.5^z$, $x \geq 2,\ y \geq 2,\ z \geq 2$.

Divisores de N: $(1+x).(1+y).(1+z) = 60$

Divisores de N^2: $(1+2x).(1+2y).(1+2z) = 315$

Divisores de N^3: $(1+3x).(1+3y).(1+3z) = 910$

Como es:

$$\begin{cases} 60 = 2^2.3.5 \\ 315 = 3^2.5.7 \\ 910 = 2.5.7.13 \end{cases}$$

$60 = 2^2.3.5 \to 1+x = 4, 1+y = 3, 1+z = 5$, de donde $x = 3, y = 2, z = 4$.

Con lo cual, al sustituir en las otras dos expresiones vemos que se verifican:

Divisores de N^2: $(1+2x).(1+2y).(1+2z) = 7.5.9 = 315$

Divisores de N^3: $(1+3x).(1+3y).(1+3z) = 10.7.13 = 910$

Luego las soluciones son todas las posibles permutaciones de los números *3, 2* y *4* para las letras *x, y* y *z:*

$$N = 2^3.3^2.5^4 = 45000$$
$$N = 2^3.3^4.5^2 = 16200$$
$$N = 2^2.3^3.5^4 = 67500$$
$$N = 2^2.3^4.5^3 = 81000$$
$$N = 2^4.3^2.5^3 = 18000$$
$$N = 2^4.3^3.5^2 = 10800$$

PROBLEMA 104 (040614)
Sea

$$f(x)=\sum_{1}^{\infty}\frac{sennx}{n^3}$$

Demostrar que

$$\int_{0}^{\pi} f(x).dx = 2\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$$

RESOLUCION: (de Jerónimo Basa, 08 junio 2014)
Pinche en este link:
http://casanchi.com/PROBLEMAS/jeronimobasa070614.pdf

RESOLUCIÓN (de casanchi):

Puesto que $\left|\frac{sennx}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$, la serie $\sum_{1}^{\infty}\frac{sennx}{n^3}$ será uniformemente convergente si es convergente la serie $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ (criterio M de Weierstrass).

La serie $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ es, en efecto, convergente, pues aplicando el criterio integral:

$$\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^3}dx = -\frac{1}{2x^2}\Bigg|_{1}^{\infty} = 0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \text{ (converge)}$$

Luego, por ser uniformemente convergente, es integrable término a término:

$$\int_{0}^{\pi} f(x).dx = \int_{0}^{\pi}\left(\sum_{1}^{\infty}\frac{sennx}{n^3}\right).dx = \sum_{1}^{\infty}\int_{0}^{\pi}\frac{sennx}{n^3}.dx = \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\int_{0}^{\pi} sennx.dx =$$

$$=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\Bigg|_{0}^{\pi} = \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^4}(1-\cos n\pi) = 2\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+...+\right) = 2\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$$

PROBLEMA 103 (070514)

Dado un número entero m, cuya descomposición primaria es

$$m = a^{\alpha}.b^{\beta}.....l^{\gamma}$$

determinar las fórmulas que dan el número total de sus divisores y la suma y el producto de todos ellos.

RESOLUCION: (de Jerónimo Basa, 18 mayo 2014)

Pinche en este link:

http://casanchi.com/PROBLEMAS/jeronimobasa100514.pdf

RESOLUCIÓN: (de casanchi)

Los divisores de m son los siguientes números:

$$\begin{array}{cccc} 1 & a & \ldots & a^{\alpha} \\ b & b^2 & \ldots & b^{\beta} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l & l^2 & \ldots & l^{\gamma} \end{array}$$

y tambien sus productos. En definitiva, los divisores de m serán los términos del desarrollo: $\left(1+a+a^2+\ldots+a^{\alpha}\right)\left(b+b^2+\ldots+b^{\beta}\right)\ldots\left(l+l^2+\ldots+l^{\gamma}\right)$

a) Nº total de divisores: es el número total de productos posibles de la forma anterior, o sea: $n = (1+\alpha)(1+\beta)\ldots(1+\gamma)$

b) La suma es el producto de las sumas de los términos de cada paréntesis (progresiones geométricas de razones a,b,...,l):

$$S = \frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}.\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}.\ldots.\frac{l^{\gamma+1}-1}{l-1}$$

c) El producto:

Puesto que $\forall d \in Z / d|m, m = d.d' \wedge d'|m$, se tiene que los divisores de m pueden ser asociados por pares, d_i, d_i', tales que $d_i.d_i' = m$.

Sean los divisores y sus correspondientes asociados:

$$d_1, d_2, \ldots, d_n$$
$$d_1'.d_2', \ldots, d_n'$$

se tiene:

$$P = d_1.d_2.....d_n$$
$$P = d_1'.d_2'.....d_n'$$

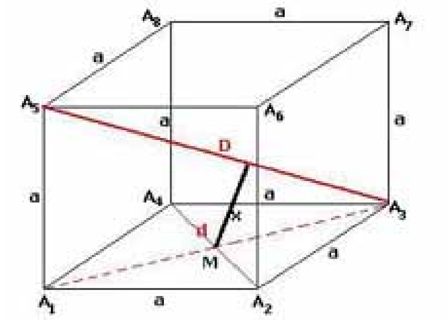
multiplicando ambas expresiones:

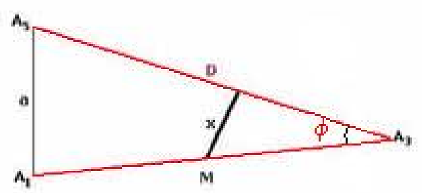
$$P^2 = (d_1.d_1').(d_2.d_2')....(d_n.d_n') = m.m.....m = m^n \rightarrow P = \sqrt{m^n}$$

PROBLEMA 102 (090414)

Se considera la diagonal *D* de un cubo de arista *a* y también la diagonal *d* de una de sus caras, elegida de modo que ambas diagonales, *D* y *d*, se cruzan. Se pide la distancia entre las rectas que contienen a ambas diagonales.

RESOLUCIÓN:





$$|D| = |A_5A_3| = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}\ , \quad |A_1A_3| = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}\ ,$$

$$|MA_3| = \frac{|A_1A_3|}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

$$sen\phi = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x = |MA_3|.sen\phi = a\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{6}\sqrt{6}$$

PROBLEMA 101 (120314)
Demostrar por inducción completa que en la sucesión de Fibonacci:

0,1,1,2,3,5,8,13,21, …

la suma de los n primeros términos más una unidad es igual al término (n+2)-ésimo.

RESOLUCION: (de Jerónimo Basa, 12 marzo 2014)
Comencemos definiendo la sucesión de Fibonacci recursivamente

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 1, \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Ahora, escribiendo el enunciado, tenemos que la suma de los *n* términos más una unidad es el *(n+2)*-término de la sucesión, es decir

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_n\right) + 1 = a_{n+2}.$$

Probemos por inducción que el resultado es cierto para todo *n.*

Paso base de inducción: El resultado es cierto para $n = 1$ pues

$$a_1 + 1 = 1 + 1 = 2 = a_3.$$

Hipótesis de inducción: Supongamos que es cierto para $n = k, k \in N$. Entonces

$$\left(\sum_{i=1}^{k} a_k\right) + 1 = a_{k+2}.$$

Para el término $k + 1$ se tiene

$$\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_k\right) + 1 = \left(\sum_{i=1}^{k} a_k\right) + a_{k+1} + 1.$$

Por hipótesis de inducción

$$\left[\left(\sum_{i=1}^{k} a_k\right) + 1\right] + a_{k+1} = a_{k+2} + a_{k+1} = a_{k+3}.$$

Donde la última igualdad se deduce de la definición recursiva de la sucesión de Fibonacci. Luego, el teorema es válido para $k + 1$ completando la demostración.

RESOLUCION: (de casanchi)
Por definición, cada término, excepto los dos primeros, se obtienen sumando los dos anteriores:

$$a_{k+2} = a_{k+1} + a_k, \qquad k = 1,2,...$$

- Verificamos para k=1:

$$a_{1+2} = 1 + \sum_{i=1}^{1} a_i = 1 + a_1 = 1 + 0 = 1 \rightarrow a_3 = 1$$

- Verificamos para k=2:

$$a_{2+2} = 1 + \sum_{i=1}^{2} a_i = 1 + a_1 + a_2 = 1 + 0 + 1 = 2 \rightarrow a_3 = 2$$

Verificación para k=n+1, al suponer que se verifica para k=n:

Sea cierto para k=n: $a_{n+2} = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i$

Entonces, para k=n+1:

$$a_{(n+1)+1} = a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} = \left(1 + \sum_{i=1}^{n} a_i\right) + a_{n+1} = 1 + \sum_{i=1}^{n+1} a_i$$

PROBLEMA 100 (120214)

Un test de aptitud se compone de cinco preguntas. En cada una de ellas se proponen tres respuestas, entre las cuales se encuentra la correcta. Si un alumno contesta al azar, se pide:

1) Probabilidad de que conteste bien tres preguntas.

2) Probabilidad de que conteste bien a tres preguntas al menos, que es lo que se pide para ser declarado apto.

3) ¿Cuál es la probabilidad de ser declarado apto si el alumno conoce las respuestas correctas a dos de las preguntas, es decir, si solo contesta al azar a tres de ellas?.

RESOLUCION:

Sea p la probabilidad del suceso "respuesta acertada".

Sea q la probabilidad el suceso contrario, "respuesta errónea".

Si se dan n respuestas, la probabilidad de que k de ellas sean correctas y el resto falsas es:

$$p[x=k]=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$

Asimismo, es:

$$p[x\geq k]=\sum_{r=k}^{n}\binom{n}{r}p^r q^{n-r}$$

Se trata, por tanto de la distribución binomial de Bernoulli, que en nuestro caso corresponde a los valores n=5, p=1/3, q=1-1/3=2/3.

Por consiguiente:

1) Probabilidad de contestar bien tres de las cinco preguntas:

$$p[x=3]=\binom{5}{3}p^3q^{5-3}=\binom{5}{3}(1/3)^3(2/3)^{5-3}=10.\frac{4}{243}=\frac{40}{243}$$

2) Probabilidad de contestar bien tres o más:

$$p[x\geq 3]=\sum_{r=3}^{n}\binom{5}{r}(1/3)^r(2/3)^{5-r}=\binom{5}{3}(1/3)^3(2/3)^{5-3}+\binom{5}{4}(1/3)^4(2/3)^{5-4}+$$

$$+\binom{5}{5}(1/3)^5(2/3)^{5-5}=10.\frac{4}{243}+5.\frac{2}{243}+\frac{1}{243}=\frac{51}{243}$$

3) Si se conocen de antemano dos de las respuestas:

$$p[x\geq 1]=\sum_{r=1}^{3}\binom{3}{r}(1/3)^r(2/3)^{3-r}=\binom{3}{1}(1/3)^1(2/3)^{3-1}+\binom{3}{2}(1/3)^2(2/3)^{3-2}+$$

$$+\binom{3}{3}(1/3)^3(2/3)^{3-3}=3.\frac{4}{27}+3.\frac{2}{27}+\frac{1}{27}=\frac{19}{27}$$

PROBLEMA 99 (150114)
Determinar las dimensiones de un rectángulo sabiendo que sus lados miden un número entero de centímetros, pero no un número entero de palmos, y que su área expresada en palmos cuadrados es igual a su perímetro expresado en palmos lineales.
Longitud de un palmo: 20 cms.

RESOLUCION: (enviada por Jerónimo Basa, 18 enero 2014)
Comenzamos planteando el sistema necesario que relaciona los centímetros con los palmos. Sea x, y las medidas del rectángulo en cm. Luego, sean a,b constantes, tal que

$$y_{cm}\frac{1pal}{20cm} = b_{pal}$$

Donde $x,y \in Z$ y, como las medidas en palmos no es un entero, $a,b \notin Z$. Luego, sabemos que el área del rectángulo en palmos cuadrados es igual a su perímetros en palmos lineales, entonces

$$2a + 2b = ab$$

Usando las identidades de a,b podemos reescribirlo como

$$2\frac{x}{20} + 2\frac{y}{20} = \frac{xy}{400}.$$

Multiplicando por 400 la última ecuación, tenemos

$$40x + 40y = xy.$$

Despejemos ahora la variable x para obtener

$$40y = xy - 40x = x(y - 40),$$
$$x = \frac{40y}{y - 40}. \ (1)$$

La última expresión puede escribirse como

$$\frac{40y}{y-40} = 40 + \frac{1600}{y-40}.$$

Ahora bien, $a \notin Z$ por lo tanto, 20 no divide a x, entonces 20 no divide a $\frac{1600}{y-40}$.
Como $(y-40)$ es divisor de 1600 (pues $x \in Z$), 20 tampoco divide a $(y-40)$. Luego, lo que queda por hacer es buscar entre los divisores de 1600, aquellos en donde $y-40$ no sea un múltiplo de 20. Estos números son $32, 64, 2, 50$. Por lo tanto queda el siguiente sistema

$y - 40 = 32 \to y = 72 \Rightarrow x = 90,$
$y - 40 = 64 \to y = 104 \Rightarrow x = 65,$
$y - 40 = 25 \to y = 65 \Rightarrow x = 104,$

$y - 40 = 50 \rightarrow y = 90 \Rightarrow x = 72.$

Donde los valores de x se calcularon usando la identidad (1). Finalmente, las dimensiones buscadas son los pares (104-65) y (90-72) en unidades de centímetros.

RESOLUCION (de casanchi):
Sean x, y las dimensiones en centímetros.

$$\frac{x}{20}.\frac{y}{20} = 2.\left(\frac{x}{20} + \frac{y}{20}\right) \rightarrow x = \frac{40y}{y-40} = 40 + \frac{1600}{y-40}$$

Se tiene que

$$\left.\begin{array}{r} x \neq \dot{20} \\ y \neq \dot{20} \\ \dfrac{1600}{y-40} \neq \dot{20} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x \neq \dot{20} \\ y \neq \dot{20} \\ y-40 \neq \dot{20} \end{array}\right\}$$

puesto que $1600 = 2^6.5^2$ y es $1600/y-40$ un número entero, será $y - 40 = 2^\alpha.5^\beta$, cumpliendo que $0 \leq \alpha \leq 6,\ 0 \leq \beta \leq 2$

Vamos a encontrar los casos en los que el cociente $1600/y-40$ no es múltiplo de 20 cms, y tampoco $y-40$.

En principio tendrá que ser $\frac{1600}{y-40} = 2^z$, o $\frac{1600}{y-40} = 5^w$, o $\frac{1600}{y-40} = 2.5^w$, siendo $0 \leq z \leq 6,\ 0 < w \leq 2$

Si $\frac{1600}{y-40} = 2^6 \rightarrow y - 40 = 5^2 \rightarrow \textit{válido} \rightarrow y = 65 \rightarrow x = 104$

Si $\frac{1600}{y-40} = 2^5 \rightarrow y - 40 = 2.5^2 \rightarrow \textit{válido} \rightarrow y = 90 \rightarrow x = 72$

Si $\frac{1600}{y-40} = 2^4 \rightarrow y - 40 = 2^2.5^2 \rightarrow \textit{multiplo de } 20$

Si $\frac{1600}{y-40} = 2^3 \rightarrow y - 40 = 2^3.5^2 \rightarrow \textit{multiplo de } 20$

Si $\frac{1600}{y-40} = 2^2 \rightarrow y - 40 = 2^4.5^2 \rightarrow \textit{multiplo de } 20$

Si $\frac{1600}{y-40} = 2 \rightarrow y - 40 = 2^5.5^2 \rightarrow \textit{multiplo de } 20$

Si $\frac{1600}{y-40} = 1 \rightarrow y - 40 = 2^6.5^2 \rightarrow \textit{multiplo de } 20$

Si $\frac{1600}{y-40} = 5^2 \rightarrow y - 40 = 2^6 \rightarrow \textit{válido} \rightarrow y = 104 \rightarrow x = 65$

Si $\frac{1600}{y-40} = 5 \to y-40 = 2^6.5 \to \textit{múltiplo de } 20$

Si $\frac{1600}{y-40} = 2.5^2 \to y-40 = 2^5 \to \textit{válido} \to y = 72 \to x = 90$

Si $\frac{1600}{y-40} = 2.5 \to y-40 = 2^5.5 \to \textit{múltiplo de } 20$

Soluciones posibles:

Los cuatro casos válidos nos indican que las dimensiones del rectángulo han de ser:

65 cms y 104 cms,

o bien,

72 cms y 90 cms

Comprobamos que se verifica la condición impuesta en el enunciado del problema en cada una de las dos soluciones:

- Comprobación de la solución 65 cms y 104 cms:

Área en palmos cuadrados: $(65/20).(104/20) = 16.9$

Perímetro en palmos: $2\left[(65/20)+(104/20)\right] = 16.9$

- Comprobación de la solución 72 cms y 90 cms:

Área en palmos cuadrados: $(72/20).(90/20) = 16.2$

Perímetro en palmos: $2\left[(72/20)+(90/20)\right] = 16.2$