# RESOLVIENDO PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

## RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

### PROBLEMA 137 (141216)

Hallar el número $N=2^x.5^y$, sabiendo que la suma de sus divisores es 961.

### RESOLUCIÓN:

Sabemos que los divisores de N han de ser cada uno de los términos del producto

$$\left(1+2+2^2+...+2^x\right).\left(1+5+5^2+...+5^y\right)$$

y siendo la suma 961, se cumple:

$$\left(1+2+2^2+...+2^x\right).\left(1+5+5^2+...+5^y\right)=961$$

como las sumas indicadas corresponden a sumas de progresiones geométricas de razones respectivas 2 y 5, se tiene:

$$\frac{2^x.2-1}{2-1}.\frac{5^y.5-1}{5-1}=\frac{2^{x+1}-1}{1}.\frac{5^{y+1}-1}{4}=961$$

La descomposición en dos únicos factores del número 961 solo puede mostrarse de alguna de las tres formas siguientes:

$$\begin{cases} 961=1.31^2 \\ 961=31^2.1 \\ 961=31.31 \end{cases}$$

- Si es $961=1.31^2 \rightarrow \frac{2^{x+1}-1}{1}=1,\ \frac{5^{y+1}-1}{4}=31^2 \rightarrow 2^{x+1}=2,\ 5^{y+1}=3845 \rightarrow$
  $\rightarrow 2^x=1,\ 5^y=769 \rightarrow x=0,\ y\notin Z \rightarrow caso\ invalido$
- Si es $961=31^2.1 \rightarrow \frac{2^{x+1}-1}{1}=31^2,\ \frac{5^{y+1}-1}{4}=1 \rightarrow 2^{x+1}=962,\ 5^{y+1}=5 \rightarrow$
  $\rightarrow 2^x=481,\ 5^y=1 \rightarrow y=0,\ x\notin Z \rightarrow caso\ invalido$
- Si es $961=31.31 \rightarrow \frac{2^{x+1}-1}{1}=31,\ \frac{5^{y+1}-1}{4}=31 \rightarrow 2^{x+1}=32,\ 5^{y+1}=125 \rightarrow$
  $\rightarrow 2^x=16,\ 5^y=25 \rightarrow x=4,\ y=2 \rightarrow N=2^4.5^2=400$

Resultado:

**N=400**

## PROBLEMA 136 (161116)

Dada la función

$$f=\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

demuéstrese que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$$

## RESOLUCIÓN:

Llamando $\varphi=1/f$ , será:

$$\varphi=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}\rightarrow\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}=\frac{x-a}{\varphi}$$

Análogamente:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{y-b}{\varphi},\qquad\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{z-c}{\varphi}$$

Entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varphi}\right)=-\frac{1}{\varphi^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{x-a}{\varphi^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varphi}\right)=-\frac{1}{\varphi^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{y-b}{\varphi^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varphi}\right)=-\frac{1}{\varphi^2}\frac{\partial\varphi}{\partial z}=-\frac{z-c}{\varphi^3}$$

Veamos ahora la segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x-a}{\varphi^3}\right)=-\frac{\varphi^3-3\varphi^2(x-a)\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\varphi^6}=-\frac{\varphi^3-3\varphi^2(x-a)\frac{x-a}{\varphi}}{\varphi^6}=\frac{-\varphi^2+3(x-a)^2}{\varphi^5}$$

Análogamente:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{-\varphi^2+3(y-b)^2}{\varphi^5}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{-\varphi^2+3(z-c)^2}{\varphi^5}$$

por tanto la suma es:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{-\varphi^2+3(x-a)^2}{\varphi^5}+\frac{-\varphi^2+3(y-b)^2}{\varphi^5}+\frac{-\varphi^2+3(z-c)^2}{\varphi^5}=$$

$$=\frac{-3\varphi^2+3\left[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\right]}{\varphi^5}=\frac{-3\varphi^2+3\varphi^2}{\varphi^5}=0$$

## PROBLEMA 135 (191016)

Hallar un número de cinco cifras diferentes que sea igual a la suma de todos los de tres cifras que se puedan obtener formando todas las variaciones ordinarias de dichas cifras tomadas de tres en tres.

## RESOLUCIÓN:

Sea el número X=abcde =a.$10^4$+b.$10^3$+c.$10^2$+d.10+e

Variaciones: $V_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60 \rightarrow$ en la suma aparecerá cada dígito $60/5 = 12$ veces.

$S = (a+b+c+d+e).12.10^2 + (a+b+c+d+e).12.10 + (a+b+c+d+e).12 = 1332(a+b+c+d+e)$

O sea:

$$X = 1332(a+b+c+d+e)$$

y siendo $1332 = 2^2.3^2.37$ sigue que es múltiplo de 4 y de 9:

$X = \overset{\circ}{4} \rightarrow 10.d + e = \overset{\circ}{4}$

$X = \overset{\circ}{9} \rightarrow a+b+c+d+e = \overset{\circ}{9}$

Pero la suma de todos los cinco dígtos del número no puede ser inferior a 15 ni superior a 35. Y como ha de ser un múltiplo de 9, solo puede igualarse a uno de los dos únicos multiplos de 9 que hay en tal intervalo numérico, el 18 y el 27:

$$\left.\begin{array}{l} 1+2+3+4+5=15 \\ 5+6+7+8+9=35 \end{array}\right\} \rightarrow 15 < a+b+c+d+e < 35 \rightarrow a+b+c+d+e = 18 \; o \; 27$$

- Si es a+b+c+d+e=18: $X = 1332.18 = 23976$

Pero en este caso la suma de sus cifras es distinta de 18. Luego este no es el número válido.

- Si es a+b+c+d+e=27: $X = 1332.27 = 35964$

Ahora la suma de sus cifras es precisamente 27. Luego, este número verifica todas las hipótesis del problema.

Resultado: **35964**

## PROBLEMA 134 (210916)

Hallar la ecuación diferencial de la familia de superficies

$$\Phi\left(\frac{x+y}{xy},\frac{z}{xy}\right)=0$$

## RESOLUCIÓN:

$$\Phi\left(\frac{x+y}{xy},\frac{z}{xy}\right)=0\rightarrow\frac{z}{xy}=\varphi\left(\frac{x+y}{xy}\right)=\varphi\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

Derivamos respecto de x:

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}xy-yz}{x^2y^2}=\varphi'.\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

Derivamos respecto de y:

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial y}xy-xz}{x^2y^2}=\varphi'.\left(-\frac{1}{x^2}\right)\rightarrow\frac{\frac{\partial z}{\partial y}y-z}{xy^2}=\varphi'.\left(-\frac{1}{y^2}\right)$$

Eliminamos $\varphi'$ entre ambas:

$$-\varphi'=\frac{\frac{\partial z}{\partial x}xy-yz}{x^2y^2}x^2=\frac{\frac{\partial z}{\partial y}y-z}{xy^2}y^2\rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}\frac{x}{y}-\frac{1}{y}z=\frac{\partial z}{\partial y}\frac{y}{x}-\frac{1}{x}z\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}x^2-xz=\frac{\partial z}{\partial y}y^2-yz$$

Finalmente:

$$\frac{\partial z}{\partial x}x^2-\frac{\partial z}{\partial y}y^2=(x-y)z$$

**PROBLEMA 133 (240816)**

En el cuerpo $Q$ de los números racionales se define la relación binaria $R$ por:

$$xRy \leftrightarrow \exists n \in Z / x = \frac{3y+n}{3}$$

( $Z$ es el anillo de los números enteros)

a) Probar que $R$ es de equivalencia.

b) Determinar el conjunto cociente.

c) Razonar si los elementos 2/3 y 4/5 pertenecen a una misma clase.

**RESOLUCIÓN:**

a)

Es reflexiva:

$$0 \in Z / x = \frac{3x+0}{3} = x, \forall x \in Q \to \forall x \in Q, xRx$$

Es simétrica:

$$xRy \to \exists n \in Z / x = \frac{3y+n}{3} \to y = \frac{3x-n}{3} \to \exists (-n) \in Z / y = \frac{3x+(-n)}{3} \to yRx$$

Es transitiva:

$$xRy \wedge yRz \to \exists n,m \in Z / \begin{cases} x = \dfrac{3y+n}{3} \\ y = \dfrac{3z+m}{3} \end{cases} \to x = \frac{3\left(\dfrac{3z+m}{3}\right)+n}{3} = \frac{3z+m+n}{3} =$$

$$= \frac{3z+(m+n)}{3} \to xRz$$

Luego, R es relación de equivalencia.

b) Conjunto cociente:

$$Q / R = \{cl(q_1), cl(q_2), ..., cl(q_r), ...\}, \ q_1, q_2, ..., q_r, ... \text{ racionales}$$

siendo $cl(q_i) = \left\{ q_i^n / q_i^n = q_i + \frac{1}{3}n, n \in Z \right\}$. Por tanto, hay tantas clases como elementos racionales en el intervalo $\left[0, \frac{1}{3}\right)$, y cada clase tiene un solo representante en este intervalo. Si denominamos $q_i$ a la clase $cl(q_i)$ será $Q / R = \{q_i \in Q / q_i \in [0,3)\}$

c) Estudio de los elementos 2/3 y 4/5

$\frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{2}{15} = \frac{1}{3}n \to n = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} \notin Z$ (no es un número entero)

luego estos elementos no pertenecen a la misma clase: $cl(2/3) \neq cl(4/5)$

## PROBLEMA 132 (270716)

Calcular

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-senx}}\,dx$$

## RESOLUCIÓN:

Es una integral impropia de 1ª especie, pues $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-senx}} = \infty$

Resolvemos la integral indefinida:

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1-senx}}\,dx = \int \frac{d(senx)}{\sqrt{1-senx}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = -\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\int u^{-\frac{1}{2}}\,du =$$

$$= -\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = -\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -2u^{\frac{1}{2}} + C = -2(1-t)^{\frac{1}{2}} + C = -2(1-senx)^{\frac{1}{2}} + C$$

Por tanto:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-senx}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to\frac{\pi}{2}} \int_0^{\varepsilon} \frac{\cos x}{\sqrt{1-senx}}\,dx = -2\lim_{\varepsilon\to\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-senx}\Big|_0^{\varepsilon} =$$

$$= -2\lim_{\varepsilon\to\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{1-sen\varepsilon} - \sqrt{1-0}\right) = -2\lim_{\varepsilon\to\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{1-sen\varepsilon} - 1\right) = -2\left(\sqrt{1-sen\frac{\pi}{2}} - 1\right) =$$

$$= -2\left(\sqrt{1-1} - 1\right) = -2(-1) = 2$$

Resultado:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-senx}}\,dx = 2$$

**PROBLEMA 131 (290616)**

Encontrar, caso de existir, el valor del parámetro *a* tal que los cuatro puntos siguientes son coplanarios.

*A(1,0,-2), B(0,a,3), C(1,-1,1), D(1,1,1*)

Determinar, usando el valor de *a*, la ecuación general de un plano que contiene a los puntos *A, B* y *C.*

**RESOLUCIÓN:**

$$\begin{vmatrix} 0-1 & 1-1 & 1-1 \\ a+0 & -1+0 & 1+0 \\ 3+2 & 1+2 & 1+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ a & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Por tanto, los puntos dados, *A, B, C, D*, nunca pueden ser coplanarios, cualquiera que sea el valor del parámetro *a*.

Determinemos el plano que contiene a los puntos A, B y C, cualquiera que sea el valor de *a*:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0-1 & 1-1 \\ y-0 & a-0 & -1-0 \\ z+2 & 3+2 & 1+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ y & a & -1 \\ z+2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = (3a-5)x+3y+z-3(a+1)=0$$

Ecuación del plano que pasa por los puntos A, B, C:

$$(3a-5)x+3y+z-3(a+1)=0$$

Este problema elemental está ya resuelto, sin embargo, para aquellos lectores que tengan dificultad en el uso de las ecuaciones lineales, damos una explicación más detallada a continuación:

Si los puntos A,B,C,D están en un mismo plano, consideremos los vectores que definen al tomarse uno de los puntos, A por ejemplo, como origen:

AB, AC y AD

Se tiene:

AB=(1-0, 0-a,-2-3)=(1,-a,-5)
AC=(1-1,0+1,-2-1)=(0,1,-3)
AD=(1-1,0-1,-2-1)=(0,-1,-3)

De la regla de suma de vectores, siempre hay parámetros t, s, tales que

AB=AC.t+AD.s

O sea:

(1,-a,-5) = (0,1,-3).t+(0,-1,-3).s

por tanto:

1=0.t+0.s
-a=1.t-1.s (*)

-5=3.t-3.s

que es un sistema que tiene por matrices de los coeficientes y ampliada las siguientes:

m. coeficientes: $M=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow rang\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}=1$

m. ampliada: $M'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -3 \end{pmatrix}=2$

al tener ambas matrices diferente rango, el teorema de Rouche-Fröbenius nos indica que el sistema (*) no tiene solución, esto es, no es posible que los cuatro puntos A, B, C y D estén en un mismo plano, cualquiera que fuere el valor del parámetro a del enunciado.

Para determinar el plano que contiene A, B y C, se cumplirá, para un punto X genérico del mismo:

$AX = AB.t + AC.s \rightarrow (x,y,z)-(1,0,-2) = \left[(0,a,3)-(1,0,-2)\right].t + \left[(1,-1,1)-(1,0,-2)\right].s \rightarrow$

$\rightarrow \left(x-1, y-0, z+2\right) = \left(-1,a,5\right).t + (0,-1,3).s$

resultando el sistema de ecuaciones lineales:

$$x-1=-t$$
$$y-0=at-s$$
$$z+2=5t+3s$$

Matriz de coeficientes: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, Matriz ampliada: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & x-1 \\ a & -1 & y-0 \\ 5 & 3 & z+2 \end{pmatrix}$

Puesto que la primera matriz tiene rango 2, para que el sistema tenga solución la segunda ha de tener también rango 2. Luego su determinante ha de ser nulo:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & x-1 \\ a & -1 & y-0 \\ 5 & 3 & z+2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (3a-5)x+3y+z-3(a+1)=0$$

## PROBLEMA 130 (010616)

Calcular

$$\iiint\limits_{(V)} z.dx.dy.dz$$

donde (V) es el volumen limitado por el plano z=0 y la mitad superior del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

## RESOLUCIÓN:

Como es $\iiint\limits_{(V)} z.dx.dy.dz = \int_0^{+a} dx \int_0^{+b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} dy \int_0^{+c\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}} z\,dz$, resolvemos:

$$\int_0^{+c\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}} z\,dz = \frac{1}{2}z^2\Big|_0^{+c\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}} = \frac{1}{2}c^2\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2\right)$$

$$\int_0^{+b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \frac{1}{2}c^2\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2\right)dy = \frac{1}{2}c^2\left[\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)y-\frac{y^3}{3b^2}\right]_0^{+b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} =$$

$$=\frac{c^2b}{2}\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{c^2b}{6}\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{c^2b}{3}\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$I=\int_0^{+a}\frac{c^2b}{3}\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{c^2b}{3}\int_0^{+a}\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}dx$$

Haciendo $\frac{x}{a}=sent \to dx = a\cos t dt$, será $1-\left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1-sen^2 t=\cos^2 t$, con lo que

$$I=\frac{abc^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}\cos t.dt=\frac{abc^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t.dt$$

y como es $\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2} \to \cos^4 t=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2t+\cos^2 2t\right)=$

$$=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2t+\frac{1}{2}+\frac{\cos 4t}{2}\right)=\frac{3}{4}+\frac{\cos 2t}{2}+\frac{\cos 4t}{8}$$

se tiene finalmente:

$$I=\frac{abc^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{4}+\frac{\cos 2t}{2}+\frac{\cos 4t}{8}\right).dt=\frac{abc^2}{3}\left(\frac{3}{4}t+\frac{sen2t}{4}+\frac{sen4t}{32}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{abc^2}{3}\frac{3}{4}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{8}abc^2$$

En definitiva:

$$\iiint\limits_{(V)} z.dx.dy.dz = \frac{\pi}{8}abc^2$$

**PROBLEMA 129 (040516)**

Sea $X=\{a,b,c,d,e\}$. Determinar si cada una de las siguientes clases de subconjuntos de X es una topología de X o no lo es.

$$\Gamma_1=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c\}\}$$
$$\Gamma_2=\{X,\phi,\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,b,c,d\}\}$$
$$\Gamma_3=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\}\}$$

**RESOLUCIÓN:**

1) $\Gamma_1$ no es topología, porque existen dos elementos de $\Gamma_1$ cuya unión no es elemeneto de $\Gamma_1$:

$$\{a,b\}\cup\{a,c\}=\{a,b,c\}\notin\Gamma_1$$

2) $\Gamma_2$ no es topología, porque existen dos elementos de $\Gamma_2$ cuya intersección no es elemento de $\Gamma_2$:

$$\{a,b,c\}\cap\{a,b,d\}=\{a,b\}\notin\Gamma_2$$

3) $\Gamma_3$ es una topología sobre X, porque se verifican las tres condiciones de definición:

1- $X,\phi\in\Gamma_3$
2- $\forall A,B\in\Gamma_3, A\cap B\in\Gamma_3$
3- $\forall A,...\in\Gamma_3, A\cup...\in\Gamma_3$

## PROBLEMA 128 (060416)

Probar que son convergentes las series

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\ldots=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\ldots=\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Y que sus sumas respectivas son $1/2$ y $2$.

## RESOLUCIÓN:

1) $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\ldots=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$, por tanto:

$u_1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right),\ u_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right),\ u_3=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right),\ldots,\ u_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$, y al sumar y cancelar términos:

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

O sea:

$S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2n+1}\right)$. El límite es inmediato: $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$

Por tanto, al existir límite la serie converge y su suma es $1/2$.

2) $\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\ldots=\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Se tiene: $u_1=\frac{2}{3},\ u_2=\left(\frac{2}{3}\right)^2,\ u_3=\left(\frac{2}{3}\right)^3,\ldots,\ u_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n$

y la suma de los n primeros términos:

$S_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n=\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\ldots+\left(\frac{2}{3}\right)^n$, de donde: $\frac{2}{3}S_n-S_n=-\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ y despejando:

$S_n=2-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=2\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$. El límite es también inmediato:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)=2$$

## PROBLEMA 127 (090316)

Usando variable compleja y el método de los residuos, obtenga el valor de la integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b.sen\theta}$$

sabiendo que

$$\begin{cases} a^2 > b^2 > 0 \\ a.b > 0 \end{cases}$$

## RESOLUCIÓN:

Expresamos en variable compleja:

$$z = e^{i\theta},\ dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta \to d\theta = \frac{1}{iz}dz\,, \qquad sen\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2i}\frac{z^2-1}{z}$$

asimismo es:

$$a + b.sen\theta = a + \frac{b}{2i}\frac{z^2-1}{z} = \frac{2aiz + bz^2 - b}{2iz} = \frac{bz^2 + 2aiz - b}{2iz} = \frac{b}{2}\frac{z^2 + 2\left(\frac{a}{b}\right)iz - 1}{iz}$$

por tanto, tomando la circunferencia C de centro el origen y radio unidad:

polos:

$$z^2 + 2\left(\frac{a}{b}\right)iz - 1 = 0 \to z = \frac{-2\left(\frac{a}{b}\right)i \pm \sqrt{-4\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 4}}{2} = -\frac{a}{b} \pm \sqrt{-\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1} =$$

$$= -i\frac{a}{b} \pm i\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1} \to \begin{cases} z_1 = -i\left(\frac{a}{b} - \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1}\right) \\ z_2 = -i\left(\frac{a}{b} + \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1}\right) \end{cases}$$

por ser $\frac{a}{b} > 1$: $z_2$ queda fuera del recinto que delimita *C*, y $z_1$ queda dentro.

Calculamos, por tanto, el residuo en $z_1$ de la función $f(z) = \dfrac{\frac{2}{b}}{z^2 + 2\left(\frac{a}{b}\right)iz - 1}$:

$$r_1 = \lim_{z\to z_1}\frac{2}{b}(z - z_1)\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{2}{b}\frac{1}{z_1 - z_2} = \frac{1}{i\sqrt{a^2-b^2}}$$

de lo cual:

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b.sen\theta} = \oint_{C} \frac{\frac{2}{b}dz}{z^2+2\left(\frac{a}{b}\right)iz-1} = \oint_{C} f(z)dz = 2\pi i.r_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

## PROBLEMA 126 (100216)

Demostrar que $\forall p \in Q$ se verifica el isomorfismo

$$Q[x]\big/_{x-p} \approx Q$$

siendo Q el cuerpo de los números racionales y *Q[x]* el anillo de los polinomios en una indeterminada sobre Q.

## RESOLUCIÓN:

Del teorema de descomposición canónica de un homomorfismo f, cuyo núcleo sea *x-p* se tiene:

$$\begin{tikzcd}
Q[x] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "n"] & Q \\
Q[x]\big/_{x-p} \arrow[r, phantom, "\approx"] & f(Q) \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

se tiene, por tanto, que $Q[x]\big/_{x-p} \approx f(Q)$, y la proposición se cumpliría si $f(Q) = Q$, es decir, si *f* fuera suprayectiva.

Por tanto, la demostración consiste en probar que existe una aplicación suprayectiva $f : Q[x] \to Q$, tal que su núcleo es $\ker f = x - p,\ \forall p \in Q$.

En efecto, sea la aplicación $f : Q[x] \to Q$ tal que $\forall r(x) \in Q[x], f(r(x)) = r(p)$ y veamos que cumple las condiciones exigidas:

a) es suprayectiva:

$$\forall q \in Q, \exists r(x) \in Q[x] \wedge \exists a \in Q \,/\, f(r(x)) = r(a) = q$$

Bastaría para comprobarlo hacer $r(x) = x + q$, pues sería $r(0) = q$.

b) Su núcleo es x-p:

$$r(x) \in Kerf \to f(r(x)) = 0 \to r(p) = 0 \to r(x) = x - p \to \ker f = x - p$$

**PROBLEMA 125 (130116)**
Clasificar la cónica

$$f \equiv x^2 + 2xy + y^2 + x - 2y + 1 = 0$$

y hallar su ecuación reducida.

**RESOLUCIÓN:**

a) Clasificación:

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -5/2$$

$$A_{00} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

Por ser $|A| \neq 0$ se trata de una cónica irreducible.

Por ser $A_{00} = 0$ la cónica es una parábola.

b) Ecuación reducida:

$$a''_{22} y^2 + 2a''_{01} x = 0$$

$$a''_{22} = a_{11} + a_{22} = 1 + 1 = 2$$

$$a''_{01} = \pm\sqrt{\frac{-|A|}{a_{11} + a_{22}}} = \sqrt{\frac{-(-5/2)}{2}} = \pm\sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$2y^2 - 2\sqrt{\frac{5}{4}}x = 0 \rightarrow 2y^2 = \sqrt{5}x$$

Ecuación: $y^2 = \frac{1}{2}\sqrt{5}x$