

RESOLVIENDO PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 163 (121218)

Calcular el centro, ejes y vértice de la cónica

$$x_1^2 - x_2^2 + 6x_1 - 4 = 0$$

RESOLUCIÓN:

Ecuación matricial de la cónica:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Ecuaciones del centro (b_1, b_2) :

$$\begin{cases} a_{10} + b_1 a_{11} + b_2 a_{12} = 0 \\ a_{20} + b_1 a_{21} + b_2 a_{22} = 0 \end{cases} \text{ o sea: } \begin{cases} 3 + b_1 - b_2 = 0 \\ 0 + b_1 + b_2(-1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b_1 = -3 \\ b_2 = 0 \end{cases} \text{ Centro: } (-3, 0)$$

Ejes (diámetros conjugados perpendiculares):

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12}(m + m') + a_{22}.m.m' = 0 \\ m.m' = -1 \end{cases} \rightarrow a_{12}.m + (a_{11} - a_{22}).m - a_{12} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 0.m^2 + 2m - 0 = 0 \rightarrow m = 0 \rightarrow m' = \infty, \text{ por tanto:}$$

$$\begin{cases} x_2 = mx_1 + b \rightarrow x_2 = 0.(-3) + 0 = 0 \\ x_2 = m'x_1 + b' \rightarrow x_1 = b' \rightarrow x_1 = -3 \end{cases} \text{ Ejes: } x_1 = -3, x_2 = 0$$

Vértices (puntos de corte con los ejes):

$$x_1 = -3 \rightarrow (-3)^2 - x_2^2 + 6(-3) - 4 = 0 \rightarrow -x_2^2 - 13 = 0 \rightarrow x_2 = \pm\sqrt{-13} \text{ (imaginarios)}$$

$$x_2 = 0 \rightarrow x_1^2 + 6x_1 - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 + \sqrt{13} \\ x_1 = -3 - \sqrt{13} \end{cases} \text{ vértices: } (-3 + \sqrt{13}, 0), (-3 - \sqrt{13}, 0)$$

PROBLEMA 162 (141118)

Dados los tres puntos

$$P(3,0,-1), Q(5,-1,0), R(0,0,0)$$

se pide determinar el ángulo z que forman los vectores \vec{PQ} y \vec{PR} .

RESOLUCIÓN:

Utilizando

$$\cos z = \frac{\vec{PQ} \cdot \vec{PR}}{\left| \vec{PQ} \right| \left| \vec{PR} \right|}$$

siendo:

$$\vec{PQ} = (2, -1, 1), \vec{PR} = (-3, 0, 1)$$

se tiene:

$$\cos z = \frac{(5-3, -1-0, 0-(-1)) \cdot (0-3, 0-0, 0-(-1))}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{(2, -1, 1) \cdot (-3, 0, 1)}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{10}} = \frac{-5}{\sqrt{60}} = -\frac{\sqrt{60}}{12} =$$

$$= -1.645497 \rightarrow z = \arccos(-1.645497) = 130,2^\circ$$

PROBLEMA 161 (171018)

Demostrar que

$$H(n) = 3^{2n+3} + f(n) - 27 \text{ es divisible por } 60, \forall n \in \mathcal{N}$$

siendo

$$f(n) = \begin{cases} 60k, & \text{con } k \in \mathcal{N}, \text{ si } n \text{ es par} \\ 60k + 24, & \text{con } k \in \mathcal{N}, \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

RESOLUCIÓN:

Utilizando inducción completa:

$$1) n=0: H(0) = 3^3 + f(0) - 27 = 27 + 60k - 27 = 60k, k \in \mathcal{N} \rightarrow H(0) = 60$$

$$2) n=1: H(1) = 3^{2+3} + f(1) - 27 = 243 + 60k + 24 - 27 = 60(4+k), 4+k \in \mathcal{N} \rightarrow H(1) = 60$$

$$3) \text{ Sea válida para } n=2: H(n) = 3^{2n+3} + f(n) - 27 = 3^{2n+3} + 60k - 27 = 60$$

y comprobemos entonces su validéz para $n+1$:

$$\begin{aligned} H(n+1) &= 3^{2(n+1)+3} + f(n+1) - 27 = 3^{2n+3} \cdot 3^2 + f(n+1) - 27 = \\ &= 3^{2n+3} + 8 \cdot 3^{2n+3} - 27 + f(n+1) = 3^{2n+3} - 27 + 8 \cdot 3^{2n+3} + f(n+1) = \\ &= (3^{2n+3} - 27) + 8(60 + 27) + f(n+1) = 60 + 8 \cdot 60 + 216 + f(n+1) = \\ &= 60 + 216 + 60k + 24 = 60 + 240 = 60 \end{aligned}$$

$$4) \text{ Sea válida para } n \neq 2: H(n) = 3^{2n+3} + f(n) - 27 = 3^{2n+3} + 60k + 24 - 27 = 60$$

y comprobemos entonces su validéz para $n+1$:

$$\begin{aligned} H(n+1) &= 3^{2(n+1)+3} + f(n+1) - 27 = 3^{2n+3} \cdot 3^2 + f(n+1) - 27 = \\ &= 3^{2n+3} + 8 \cdot 3^{2n+3} - 27 + f(n+1) = 3^{2n+3} - 27 + 8 \cdot 3^{2n+3} + f(n+1) = \\ &= 3^{2n+3} + 8 \cdot 3^{2n+3} - 27 + 24 + 60k = (3^{2n+3} - 27) + 8(3^{2n+3} + 3) + 60k = \\ &= (3^{2n+3} - 27) + 8(3^{2n+3} - 27 + 27 + 3) + 60k = (3^{2n+3} - 27) + 8(3^{2n+3} - 27) + 8 \cdot 30 + 60k = \\ &= 60 + 8 \cdot 60 + 60 + 60k = 60 \end{aligned}$$

PROBLEMA 160 (190918)

Hállese la expresión del versor tangente a la curva definida por las ecuaciones:

$$x = \frac{u^4}{4}, \quad y = \frac{\sqrt{2}u^3}{3}, \quad z = \frac{u^2}{2}$$

en un punto cualquiera de la misma.

RESOLUCIÓN:

Sea el vector de posición de un punto cualquiera de la curva

$$\vec{r}(u) = x(u).\vec{i} + y(u).\vec{j} + z(u).\vec{k} = \frac{u^4}{4}.\vec{i} + \frac{\sqrt{2}u^3}{3}.\vec{j} + \frac{u^2}{2}.\vec{k}$$

se tiene:

$$\frac{d\vec{r}}{du} = u^3.\vec{i} + \sqrt{2}u^2.\vec{j} + u.\vec{k}$$

Por tanto:

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (u^6 + 2.u^4 + u^2).du^2 = u^2(u^4 + 2u^2 + 1).du^2 = u^2(u^2 + 1)^2 \cdot du^2$$

de lo cual:

$$ds = u.(u^2 + 1).du$$

En definitiva:

$$\vec{i} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}/du}{ds/du} = \frac{u^3.\vec{i} + \sqrt{2}u^2.\vec{j} + u.\vec{k}}{u.(u^2 + 1)} = \frac{u^2}{(u^2 + 1)}.\vec{i} + \frac{\sqrt{2}u}{(u^2 + 1)}.\vec{j} + \frac{1}{(u^2 + 1)}.\vec{k}$$

PROBLEMA 159 (220818)

Sean 5 segmentos de longitudes a_1, a_2, a_3, a_4 y a_5 tales que con tres cualesquiera de ellos es posible construir un triángulo. Demuestre que al menos uno de esos triángulos tiene todos sus ángulos agudos.

RESOLUCIÓN:

Dado un triángulo cualquiera de lados a, b y c , se tiene que:

- si es rectángulo (por ejemplo en a, b): $a^2 + b^2 = c^2$
- si es acutángulo (todos los ángulos agudos): $a^2 + b^2 > c^2$
- si es obtusángulo (ángulo a, b obtuso): $a^2 + b^2 < c^2$

Es decir, si el triángulo no es acutángulo (si no tiene todos sus ángulos agudos), ha de ser $a^2 + b^2 \leq c^2$. O sea, la suma de los cuadrados de dos cualesquiera de sus lados es menor o igual que el cuadrado del tercer lado.

En nuestro caso, supongamos que el orden de longitud de los segmentos dados sea:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5$$

y veamos que si suponemos que ninguno de los triángulos que se puedan formar es acutángulo se llegaría a una contradicción con el orden de longitud dado para los 5 segmentos.

Se tendría:

$$a_1^2 + a_2^2 \leq a_3^2 \quad (1)$$

$$a_2^2 + a_3^2 \leq a_4^2 \quad (2)$$

$$a_3^2 + a_4^2 \leq a_5^2 \quad (3)$$

Pero, por la desigualdad triangular:

$$a_5 < a_1 + a_2, \text{ luego } a_5^2 < a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \quad (4)$$

Sumando las desigualdades (1), (2), (3) y (4):

$$a_1^2 + 2a_2^2 + 2a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 < a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2$$

es decir,

$$a_2^2 + a_3^2 < 2a_1a_2$$

Como $a_2 \leq a_3$, resulta $2a_2^2 \leq a_2^2 + a_3^2 < 2a_1a_2$, y por tanto $a_2 < a_1$, en contradicción con la ordenación inicial.

PROBLEMA 158 (250718)

Sean las ecuaciones paramétricas de dos curvas alabeadas:

$$a) \begin{cases} x = x_0 + \lambda t \\ y = y_0 + \mu t \\ z = z_0 + \vartheta t \end{cases} \quad b) \begin{cases} x = a \cdot \cos u \\ y = a \cdot \operatorname{sen} u \\ z = k \cdot u \end{cases}$$

- 1) Hállese la ecuación continua de cada curva.
- 2) ¿Qué tipo de curva es en cada caso?

RESOLUCIÓN:

- 1) Ecuación continua de cada curva:

$$a) t = \frac{x - x_0}{\lambda} = \frac{y - y_0}{\mu} = \frac{z - z_0}{\vartheta}$$

$$b) x^2 + y^2 = a^2; z = k \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

- 2) Tipo de curva:

a) Es una recta de V_3 , intersección de dos planos.

b) Es una hélice circular de V_3 , intersección del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ con el elicoide

$$z = k \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

PROBLEMA 157 (270618)

Sea x un elemento nilpotente de un anillo A ($x^n=0$ para algún número natural n). Probar que $1+x$ es una unidad de A (un elemento inversible en A). Deducir que la suma de un elemento nilpotente y una unidad es también una unidad en A .

RESOLUCIÓN:

$$x \in A \text{ nilpotente en } A \rightarrow \exists n \in \mathbb{N} - \{0\} / x^n = 0$$

$$u \in A \text{ unidad en } A \rightarrow \exists u^{-1} \in A / u \cdot u^{-1} = u^{-1} \cdot u = 1$$

a)

$$u = 1 + x \rightarrow x = u - 1 \rightarrow \exists n \in \mathbb{N} - \{0\} / x^n = (u - 1)^n = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow (u - 1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u^{n-k} = 0 \rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^{n-k} + 1 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^{n-k} = -1 \rightarrow -\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^{n-k} = 1 \rightarrow u \left[-\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^{n-k-1} \right] = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[-\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^{n-k-1} \right] = u^{-1} \rightarrow u \text{ inversible} \rightarrow u = 1 + x \text{ es unidad en } A.$$

b)

$$w = u + x \rightarrow x = w - u \rightarrow \exists n \in \mathbb{N} - \{0\} / x^n = (w - u)^n = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \sum_{k=0}^n (-1)^k u^k w^{n-k} = 0 \rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^k w^{n-k} + 1 = 0 \rightarrow -\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^k w^{n-k} = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow w \left[-\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^k w^{n-k-1} \right] = 1 \rightarrow w^{-1} = -\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^k w^{n-k-1} \rightarrow w = u + x \text{ inversible}$$

por tanto, $w = u + x$ es unidad en A

PROBLEMA 156 (300518)

Determinar la tangente, normal principal y binormal a la curva

$$\begin{cases} x = 2t^2 - 1 \\ y = 1 - t \\ z = t^2 \end{cases}$$

en el punto (1,0,1)

RESOLUCIÓN:

Vectores:

$$\text{tangente: } \vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Big/ \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|, \quad \text{normal: } \vec{n} = \frac{d\vec{\tau}}{dt} \Big/ \left| \frac{d\vec{\tau}}{dt} \right|, \quad \text{binormal: } \vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{n}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (4t, -1, 2t), \quad \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = (4, 0, 2), \quad \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \sqrt{16t^2 + 1 + 4t^2}, \quad \left| \frac{d\vec{\tau}}{dt} \right| = \sqrt{4^2 + 0 + 2^2} = \sqrt{20}$$

$$\text{en el punto (1,0,1) es } t=1, \text{ con lo cual } \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \sqrt{16t^2 + 1 + 4t^2} = \sqrt{16 + 1 + 4} = \sqrt{21}$$

por tanto:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Big/ \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \frac{1}{\sqrt{21}} (4, -1, 2) = \left(\frac{4\sqrt{21}}{21}, -\frac{\sqrt{21}}{21}, \frac{2\sqrt{21}}{21} \right),$$

$$\vec{n} = \frac{d\vec{\tau}}{dt} \Big/ \left| \frac{d\vec{\tau}}{dt} \right| = \frac{1}{\sqrt{20}} (4, 0, 2) = \left(\frac{\sqrt{20}}{5}, 0, \frac{\sqrt{20}}{10} \right)$$

$$\vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{4\sqrt{21}}{21} & -\frac{\sqrt{21}}{21} & \frac{2\sqrt{21}}{21} \\ \frac{\sqrt{20}}{5} & 0 & \frac{\sqrt{20}}{10} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\sqrt{410}}{210}, 0, \frac{\sqrt{410}}{105} \right)$$

$$\text{Recta tangente: } \frac{x-1}{\frac{4\sqrt{21}}{21}} = \frac{y-0}{-\frac{\sqrt{21}}{21}} = \frac{z-1}{\frac{2\sqrt{21}}{21}},$$

$$\text{Recta normal: } \frac{x-1}{\frac{\sqrt{20}}{5}} = \frac{z-1}{\frac{\sqrt{20}}{10}}$$

$$\text{Recta binormal: } \frac{x-1}{-\frac{\sqrt{410}}{210}} = \frac{z-1}{\frac{\sqrt{410}}{105}}$$

Simplificando:

$$\text{Recta tangente} \rightarrow \frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

$$\text{Recta normal principal} \rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{z-1}{1}$$

$$\text{Recta binormal} \rightarrow \frac{x-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

PROBLEMA 155 (020518)

Se representa por Z el conjunto de todos los enteros. Hallar todas las funciones

$$f: Z \rightarrow Z$$

tales que para cualesquiera x, y enteros se verifica:

$$f(x + f(y)) = f(x) - y$$

Olimpiada Matemática Española. Fase Nacional 2004 (Ciudad Real). Primera sesión

RESOLUCIÓN:

Por inducción podemos comprobar que $\forall n \in Z, f(x + n \cdot f(y)) = f(x) - n \cdot y$, ya que

$$1) f(x + 0 \cdot f(y)) = f(x) + 0 \cdot y$$

$$2) f(x + 1 \cdot f(y)) = f(x) - 1 \cdot y$$

3) Si suponemos la fórmula cierta para $n = k \geq 0$,

$\forall n \in Z, f(x + k \cdot f(y)) = f(x) - k \cdot y$, vemos que entonces ha de ser cierta para $k + 1$:

$$\begin{aligned} f(x + (k + 1) \cdot f(y)) &= f(x + k \cdot f(y) + f(y)) = f(x + k \cdot f(y)) - y = \\ &= f(x) - k \cdot y - y = f(x) - (k + 1) \cdot y \end{aligned}$$

Para $n = k \leq -1$ se comprueba igual.

Ahora bien, vemos que llamando $A = 1 + f(1) \cdot f(1) = 1 + f(1)^2 > 0$

$$\text{es } f(A) = f(1 + f(1) \cdot f(1)) = f(1) - f(1) \cdot 1 = 0$$

Pero entonces:

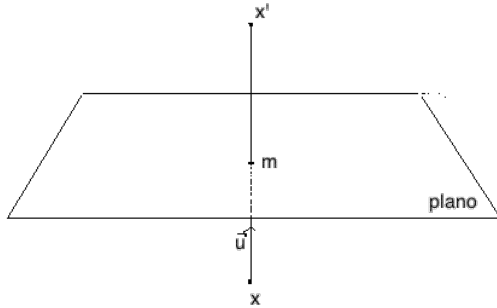
$$f(x) = f(x + f(A)) = f(x) - A \rightarrow A = 0$$

lo que implica contradicción ($A > 0$ y $A = 0$).

Es decir, no existen las funciones que puedan satisfacer la condición pedida.

PROBLEMA 154 (030418)

- a) Obténgase la fórmula vectorial de una simetría especular en el espacio E_3 .
 b) Hállese el punto especularmente simétrico del punto $(3,1,0)$ respecto al plano $4x - 4y + 2z - 1 = 0$.

RESOLUCIÓN:

$$\text{Plano: } 4x - 4y + 2z - 1 = 0$$

\vec{u} : vector unitario normal al plano.

\vec{m} : vector de posición de un punto cualquiera del plano.

Ecuación vectorial del plano:

$$\vec{m} \cdot \vec{u} + \varepsilon = 0$$

- a) Se tiene:

$$\vec{m} = \frac{\vec{x} + \vec{x}'}{2} \in \text{plano} \quad \vec{x}' = \vec{x} + \lambda \vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}$$

sustituyendo en la ecuación vectorial del plano:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{x} + \vec{x}'}{2} \cdot \vec{u} + \varepsilon = 0 &\rightarrow (\vec{x} + \vec{x}') \cdot \vec{u} + 2\varepsilon = 0 \rightarrow (\vec{x} + \vec{x} + \lambda \vec{u}) \cdot \vec{u} + 2\varepsilon = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow (2\vec{x} + \lambda \vec{u}) \cdot \vec{u} + 2\varepsilon = 0 \rightarrow 2\vec{x} \cdot \vec{u} + \lambda + 2\varepsilon = 0 \rightarrow \lambda = -2(\vec{x} \cdot \vec{u} + \varepsilon) \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{x}' = \vec{x} - 2(\vec{x} \cdot \vec{u} + \varepsilon) \cdot \vec{u}}$$

- b) Aplicaremos la fórmula obtenida para la simetría especular. Se tiene:

$$\vec{x} = (3, 1, 0), \quad 4x - 4y + 2z - 1 = 0 \rightarrow (4, -4, 2)(x, y, z) - 1 = 0 \rightarrow \vec{m} = (x, y, z),$$

$$\vec{u} = \frac{(4, -4, 2)}{\sqrt{4^2 + (-4)^2 + 2^2}} = \left(\frac{4}{6}, -\frac{4}{6}, \frac{2}{6}\right) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad \varepsilon = -\frac{1}{6}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{u} = (3, 1, 0) \cdot \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{u} + \varepsilon = \frac{4}{3} - \frac{1}{6} = \frac{7}{6}, \quad 2(\vec{x} \cdot \vec{u} + \varepsilon) \vec{u} = 2 \cdot \frac{7}{6} \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{14}{9}, -\frac{14}{9}, \frac{7}{9}\right)$$

$$\vec{x}' = \vec{x} - 2(\vec{x} \cdot \vec{u} + \varepsilon) \cdot \vec{u} = (3, 1, 0) - \left(\frac{14}{9}, -\frac{14}{9}, \frac{7}{9}\right) = \left(\frac{13}{9}, \frac{23}{9}, -\frac{7}{9}\right)$$

PROBLEMA 153 (070318)

Prueba que la gráfica del polinomio $P(x)$ es simétrica respecto del punto $A(a, b)$ sí y sólo sí existe un polinomio Q tal que: $p(x) = b + (x - a)Q((x - a)^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$

(Olimpiada Matemática Española, 2001. Murcia. Primera sesión)

RESOLUCIÓN:

Supongamos primero que exista el polinomio P que cumple las condiciones requeridas.

Sea $x = a - h$ ó $x = a + h$ Entonces:

$$\begin{cases} P(a - h) = b - hQ(h^2) \\ P(a + h) = b + hQ(h^2) \end{cases} \text{ y } \frac{P(a - h) + P(a + h)}{2} = b, \text{ para todo } h \in \mathbb{R}.$$

Lo que significa que la gráfica de P es simétrica respecto del punto $A(a, b)$.

Sea $P(x) = P(a + h) = R(h)$

La condición $\frac{P(a - h) + P(a + h)}{2} = b$ es equivalente a $R(-h) + R(h) = 2b$ porque

$$P(a - h) = R(-h).$$

Para $R(h) = a_0 + a_1h + \dots + a_nh^n$ la condición anterior se escribe de la forma:

$$a_0 + a_1h + \dots + a_nh^n + a_0 - a_1h + a_2h^2 - \dots + (-1)^n a_nh^n = 2b$$

es decir $a_0 + a_2h^2 + \dots + a_mh^m = b$ para cada $h \in \mathbb{R}$, $m = n$, n par, $m = n - 1$, n impar

Se deduce que $a_2 = a_4 = \dots = a_m = 0$, $a_0 = b$

Por tanto ahora se tiene que

$$R(h) = b + a_1h + a_3h^3 + \dots = b + h(a_1 + a_3h^2 + a_5h^4 + \dots) = b + h.Q(h^2)$$

y así existe un polinomio Q tal que

$$R(h) = b + hQ(h^2)$$

Por último, como es $x = a + h \rightarrow h = x - a$:

$$p(x) = R(h) = b + (x - a)Q((x - a)^2)$$

PROBLEMA 152 (070218)

- a) Demostrar que la propiedad de ser un espacio de Hausdorff es hereditaria, es decir, que todo subespacio de un espacio de Hausdorff es también espacio de Hausdorff.
- b) Sea T_R la topología de la recta real R generada por los intervalos abiertos-cerrados $(a,b]$. Demostrar que (R, T_R) es un espacio de Hausdorff.

RESOLUCIÓN:

- a) La definición de Espacio de Hausdorff es:

$$(H, T_H) \text{ Esp. Hausdorff} \Leftrightarrow \forall a, b \in H, \exists A, B \in T_H / (a \in A, b \in B) \wedge A \cap B = \phi$$

Sea (X, T_X) subespacio topológico de (H, T_H) , y sean $a, b \in X \subseteq H$. La topología relativa en X se obtiene como intersección de X con los abiertos de (H, T_H) :

$$T_X = \{X \cap A / A \in T_H\}$$

Por tanto:

$$(H, T_H) \text{ Esp. Hausdorff} \Leftrightarrow \forall a, b \in X \subseteq H, \exists A, B \in T_H / (a \in A, b \in B) \wedge A \cap B = \phi \rightarrow$$

$$\rightarrow a \in X \cap A, b \in X \cap B \wedge (X \cap A) \cap (X \cap B) = X \cap (A \cap B) = X \cap \phi = \phi \rightarrow$$

$$\rightarrow (X, T_X) \text{ Esp. Hausdorff}$$

- b) La topología considerada en R es $T_R = \{(a,b] / a, b \in R\}$

$$\text{Veamos que } \forall a, b \in R, \exists A, B \in T_R / (a \in A, b \in B) \wedge A \cap B = \phi :$$

Sea, por ejemplo, $a < b$. Basta elegir los abiertos $A = (a-1, a]$, $B = (a, b]$, pues obviamente, $(a \in A, b \in B) \wedge A \cap B = \phi$. Si fuera $b < a$ sería igual, intercambiando ambos elementos, $A = (b, a]$, $B = (b-1, b]$. Luego

$$\forall a, b \in R, \exists A, B \in T_R / (a \in A, b \in B) \wedge A \cap B = \phi \rightarrow (R, T_R) \text{ Esp. Hausdorff}$$

PROBLEMA 151 (100118)

Resuélvase la integral triple

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}}$$

RESOLUCIÓN:

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}} = 2(z+(x+y+1))^{\frac{1}{2}} \Big|_0^1 = 2(\sqrt{x+y+2} - \sqrt{x+y+1})$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 2(\sqrt{x+y+2} - \sqrt{x+y+1}) dy &= 2 \cdot \frac{2}{3} (y+(x+2))^{\frac{3}{2}} - 2 \cdot \frac{2}{3} (y+(x+1))^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \\ &= \frac{4}{3} \left[(x+3)^{\frac{3}{2}} - (x+2)^{\frac{3}{2}} - (x+2)^{\frac{3}{2}} + (x+1)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{4}{3} \left[(x+3)^{\frac{3}{2}} - 2(x+2)^{\frac{3}{2}} + (x+1)^{\frac{3}{2}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{4}{3} \left[(x+3)^{\frac{3}{2}} - 2(x+2)^{\frac{3}{2}} + (x+1)^{\frac{3}{2}} \right] dx &= \frac{8}{15} \left[(x+3)^{\frac{5}{2}} - 2(x+2)^{\frac{5}{2}} + (x+1)^{\frac{5}{2}} \right] \Big|_0^1 = \\ &= \frac{8}{15} \left[(4^{\frac{5}{2}} - 2 \cdot 3^{\frac{5}{2}} + 2^{\frac{5}{2}}) - (3^{\frac{5}{2}} - 2 \cdot 2^{\frac{5}{2}} + 1) \right] = \frac{8}{15} \left[2^5 - 3^3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} + 3 \cdot 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} - 1 \right] = \\ &= \frac{8}{15} [31 - 27\sqrt{3} + 12\sqrt{2}] \end{aligned}$$