

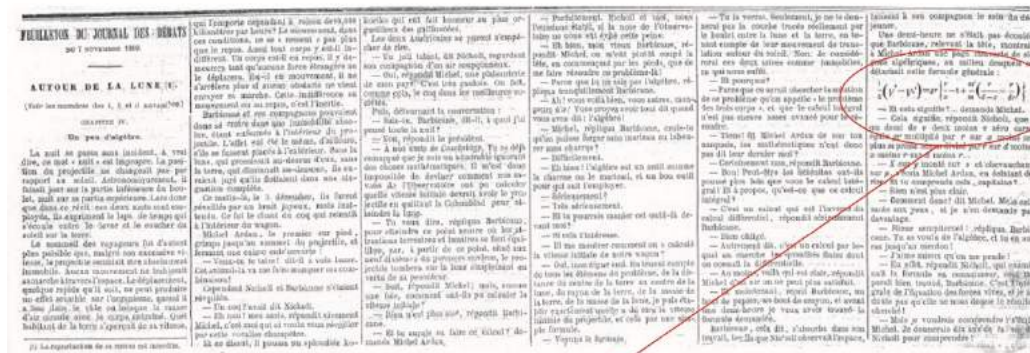
LA MECÁNICA CELESTE EN VIAJE ALREDEDOR DE LA LUNA (1869) DE JULIO VERNE. ¿QUÉ SON LOS PUNTOS DE LAGRANGE?

JUAN MIGUEL SUAY BELENGUER
jm_suay@hotmail.com

INTRODUCCIÓN

Los lectores de la edición del 7 de noviembre de 1869 del periódico francés *Journal des Débats*¹ observaron con cierto asombro la portada en donde se publicaba el inicio del capítulo IV de la novela por entregas *Alrededor de la Luna*, continuación de la publicada en 1865 con el título *De la Tierra a la Luna*, ambas obras del famoso escritor francés Jules Verne (1828-1905). El capítulo titulado *Un poco de álgebra* era un buen prólogo para que la aparición de una fórmula matemática en un periódico de gran tirada! (Fig. 1). Verne no explica el significado de esta fórmula, no era su cometido, era una forma de impresionar al lector y dar veracidad científica a su relato.

Fig. 1 Portada del *Journal des Débats* del 7 de noviembre de 1869



$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = g \cdot r \cdot \left[\frac{r}{x} - 1 + \frac{m'}{m} \cdot \left(\frac{r}{d-x} - \frac{r}{d-r} \right) \right]$$

El argumento de las novelas es conocido, un grupo de artilleros tras la guerra de secesión americana, están ociosos, y deciden embarcarse en un proyecto de construcción de un enorme cañón, para lanzar un proyectil a la Luna. En un principio el proyectil iba a ser lanzado sin tripulación, pero al final un periodista francés y dos de los artilleros se embarcan en el proyectil. En este capítulo el periodista intenta entender, sin mucho éxito, las explicaciones de como se ha calculado la velocidad necesaria para llevar al proyectil cerca del punto de equilibrio existente entre la Tierra y la Luna, (lo que hoy se conoce como punto de Lagrange L_1), es decir donde una masa dejaría de ser atraída por la tierra y empezaría a ser atraída por la Luna.

En primer lugar, mostraré cómo se deduce esa expresión, a la que Verne llevo gracias a la ayuda de dos matemáticos franceses: Henri Garcet (1815-1871), un primo suyo, y de Joseph Bertrand (1822-1900), que le asesoraron en la redacción de su novela.

¹ <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k457410h/f1.image>

A continuación, veremos, como surgen los puntos de libración o de Lagrange, como consecuencia del problema simplificado de los tres cuerpos y su tremenda utilidad en la exploración espacial actual como sitio de “aparcamiento” de sondas y observatorios espaciales.

DEDUCCIÓN Y SIGNIFICADO DE LA ECUACIÓN DE LAS “FUERZAS VIVAS”

Tenemos que deducir de donde sale esta expresión que Verne nombra como de las “fuerzas vivas” es decir ecuación de la energía cinética:

$$\frac{1}{2} \cdot (v^2 - v_0^2) = g \cdot r \cdot \left[\frac{r}{x} - 1 + \frac{m'}{m} \cdot \left(\frac{r}{d-x} - \frac{r}{d-r} \right) \right]$$

Expresión con la que podemos calcular la velocidad v_0 que tiene que abandonar un proyectil la superficie de la Tierra con dirección a la Luna, para alcanzar una distancia x , comprendida entre la Tierra y la Luna, poseyendo una velocidad v . Donde d es la distancia entre el centro de la Tierra y la Luna, r es el radio de la Tierra, m la masa de la Tierra y m' la masa de la Luna (Fig. 2).

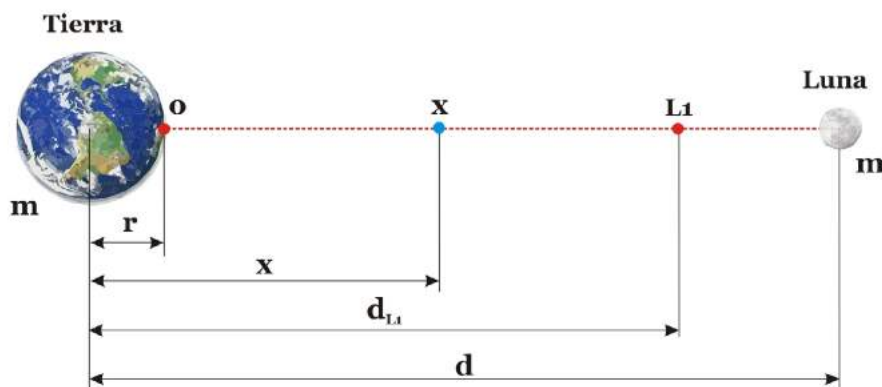


Fig. 2 Sistema Tierra-Luna

Luego el proyectil de masa m_1 situado a una distancia x del centro de la Tierra que posee una velocidad v , cuando estaba sobre la superficie de la tierra, es decir a una distancia r del centro de la Tierra, poseía una velocidad v_0 .

El proyectil en cualquier punto de la trayectoria tiene posee dos tipos de energía: una cinética, debida a la velocidad, y otra potencial gravitatoria, debido a la masa de la Tierra y a la de la Luna.

Sobre la superficie de la tierra, la energía cinética del proyectil a la salida del cañón es:

$$T_0 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_0^2$$

La energía potencial gravitatoria de la Tierra sobre el proyectil es:

$$U_{T_0} = -\frac{G \cdot m}{r} \cdot m_1$$

La energía potencial gravitatoria de la Luna sobre el proyectil es:

$$U_{L_0} = -\frac{G \cdot m'}{d-r} \cdot m_1$$

La energía cinética del proyectil en el punto x de la trayectoria entre la Tierra y la Luna es:

$$T_x = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v^2$$

La energía potencial gravitatoria de la Tierra sobre el proyectil en x es:

$$U_{T_x} = -\frac{G \cdot m}{x} \cdot m_1$$

La energía potencial gravitatoria de la Luna sobre el proyectil en x es:

$$U_{L_x} = -\frac{G \cdot m'}{d-x} \cdot m_1$$

Por el principio de conservación de la energía se cumple ($E_0 = E_x$):

$$\begin{aligned} E_0 = E_x &\Rightarrow T_0 + U_{T_0} + U_{L_0} = T_x + U_{T_x} + U_{L_x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_0^2 - \frac{G \cdot m}{r} \cdot m_1 - \frac{G \cdot m'}{d-r} \cdot m_1 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v^2 - \frac{G \cdot m}{x} \cdot m_1 - \frac{G \cdot m'}{d-x} \cdot m_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot v_0^2 - \frac{G \cdot m}{r} - \frac{G \cdot m'}{d-r} = \frac{1}{2} \cdot v^2 - \frac{G \cdot m}{x} - \frac{G \cdot m'}{d-x} \end{aligned}$$

Agrupando tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot v^2 - \frac{1}{2} \cdot v_0^2 &= \frac{G \cdot m}{x} + \frac{G \cdot m'}{d-x} - \frac{G \cdot m}{r} - \frac{G \cdot m'}{d-r} = \frac{G \cdot m}{x} - \frac{G \cdot m}{r} + \frac{G \cdot m'}{d-x} - \frac{G \cdot m'}{d-r} = \\ &= \frac{r}{r} \cdot \left[\frac{G \cdot m}{x} - \frac{G \cdot m}{r} \right] + \frac{m'}{m} \cdot \frac{m \cdot r^2}{r^2} \cdot \left[\frac{G}{d-x} - \frac{G}{d-r} \right] = \\ &= r \cdot \left[\frac{G \cdot m}{r^2} \cdot \frac{r}{x} - \frac{G \cdot m}{r^2} \right] + \frac{m'}{m} \cdot r^2 \cdot \left[\frac{G \cdot m}{r^2} \cdot \frac{1}{d-x} - \frac{G \cdot m}{r^2} \cdot \frac{1}{d-r} \right] \end{aligned}$$

Si definimos la aceleración de la gravedad g como:

$$g = \frac{G \cdot m}{r^2} = 9,81 \text{ m/s}^2$$

Tenemos:

$$\frac{1}{2} \cdot v^2 - \frac{1}{2} \cdot v_0^2 = r \cdot \left[g \cdot \frac{r}{x} - g \right] + \frac{m'}{m} \cdot r^2 \cdot \left[g \cdot \frac{1}{d-x} - g \cdot \frac{1}{d-r} \right] = r \cdot g \cdot \left[\frac{r}{x} - 1 \right] + \frac{m'}{m} \cdot g \cdot r \cdot \left[\frac{r}{d-x} - \frac{r}{d-r} \right]$$

Agrupando llegamos a la ecuación que aparece en la novela de Jules Verne:

$$\frac{1}{2} \cdot (v^2 - v_0^2) = g \cdot r \cdot \left[\frac{r}{x} - 1 + \frac{m'}{m} \cdot \left(\frac{r}{d-x} - \frac{r}{d-r} \right) \right]$$

A partir de la misma se puede calcular la velocidad de escape (v_0) necesaria para llegar al punto de libración L_1 , en donde la velocidad del proyectil será nula ($v_x = 0$). Sabiendo que este punto (d_{L_1}) se encuentra a 9/10 de la distancia entre la Tierra y la Luna (d) y el valor de la relación (m'/m) es igual 1/81. El radio de la Tierra r es igual a 6.000 Km y la distancia entre la Tierra y la Luna d es igual a 380.000 Km.

Se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot (v_x^2 - v_0^2) &= g \cdot r \cdot \left[\frac{r}{x} - 1 + \frac{m'}{m} \cdot \left(\frac{r}{d-x} - \frac{r}{d-r} \right) \right] \Rightarrow \\ &\quad \begin{matrix} v_x^2 = 0 \\ \frac{m'}{m} = \frac{1}{81} \\ x = d_{L_1} = \frac{9}{10} \cdot d \end{matrix} \\ \Rightarrow v_0^2 &= 2 \cdot g \cdot r \cdot \left[1 - \frac{10 \cdot r}{9 \cdot d} - \frac{1}{81} \cdot \left(\frac{10 \cdot r}{d} - \frac{r}{d-r} \right) \right] \Rightarrow \\ &\quad \begin{matrix} r = 6.371 \text{ km} \\ d = 380.000 \text{ km} \\ g = 0,00981 \text{ km/s} \end{matrix} \\ &= 125 \cdot [1 - 0,0186 - 0,0123 \times (0,168 - 0,0170)] = 122,45 \Rightarrow \\ \Rightarrow v_0 &= \sqrt{122,45} \approx 11,1 \text{ Km/s} \end{aligned}$$

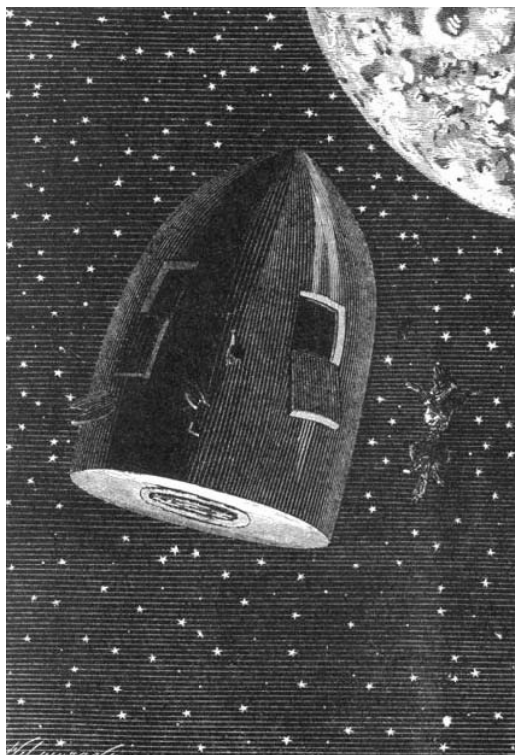


Fig. 3 El proyectil en el punto de Lagrange (L_1)

Hemos hallado la velocidad para llegar al punto de libración L_1 , pero, ¿Qué son estos los puntos? ¿y qué pasa en ellos? Para responder a estas preguntas tenemos que entender la mecánica del denominado problema de los dos cuerpos y el problema de los tres cuerpos restringido.

EL PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS. ORBITAS ELÍPTICAS

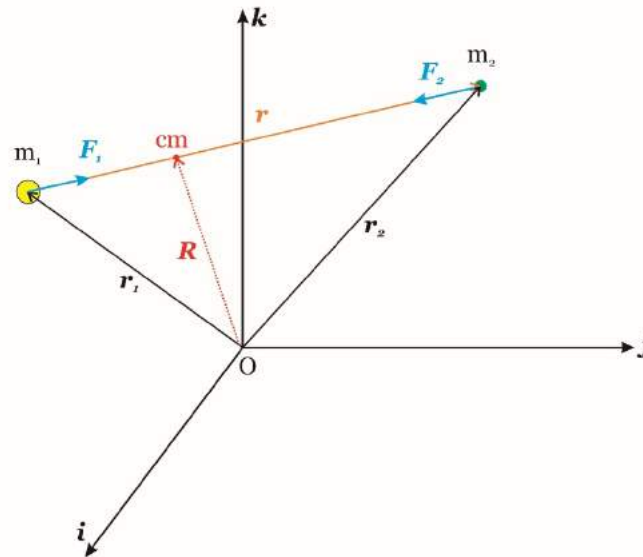


Fig. 4 Problema de los dos cuerpos

El problema consiste en determinar el movimiento de dos masas puntuales m_1 y m_2 , que se atraen mutuamente siguiendo la Ley de Newton:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

Sea un sistema de referencia inercial $Oijk$ (Fig. 4), y \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 los vectores de posición de las masas m_1 y m_2 respectivamente, y $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ el vector posición relativa. Según la segunda ley de Newton de la mecánica (fuerza = masa x aceleración):

$$\left. \begin{aligned} m_1 \cdot \ddot{\mathbf{r}}_1 &= G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \\ m_2 \cdot \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \end{aligned} \right\} \Rightarrow m_1 \cdot \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \cdot \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{0}$$

Luego:

$$m_1 \cdot \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \cdot \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow m \cdot \ddot{\mathbf{R}} = m_1 \cdot \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \cdot \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{0}$$

Donde \mathbf{R} es la posición del centro de masas cm (Fig. 4) y $m = m_1 + m_2$ es la masa total. Esto nos indica que en un sistema formado por dos cuerpos que se atraen por la ley gravitación de Newton, el centro de masas se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme. Si $\mathbf{R}=\mathbf{0}$ entonces el sistema se refiere respecto al centro de masas.

Luego:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \cdot \ddot{\mathbf{r}}_1 &= G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \Rightarrow \ddot{\mathbf{r}}_1 = G \cdot \frac{m_2}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \\ m_2 \cdot \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \Rightarrow \ddot{\mathbf{r}}_2 = -G \cdot \frac{m_1}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 = -G \cdot \frac{m_1}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} - G \cdot \frac{m_2}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{\mathbf{r}} = -G \cdot \frac{m}{r^3} \cdot \mathbf{r}$$

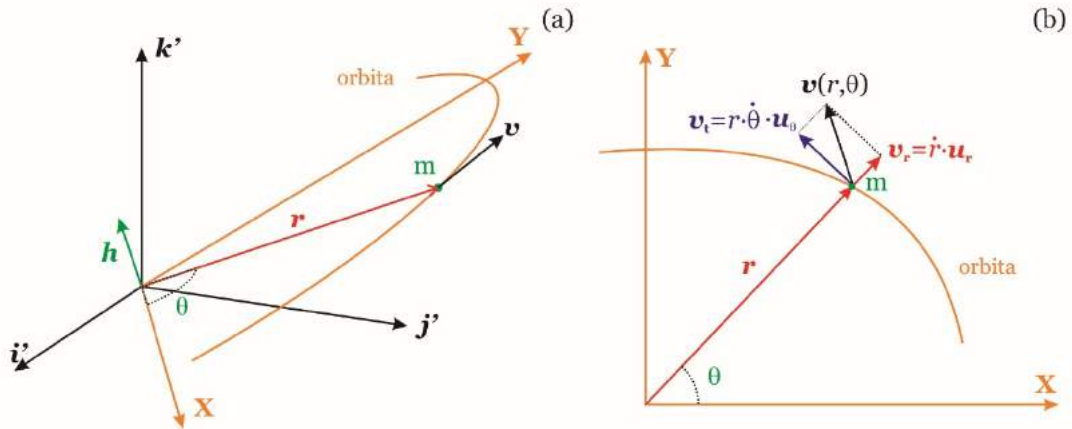


Fig. 5 Movimiento de una masa respecto a una fuerza central

La ecuación de movimiento:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -G \cdot \frac{m}{r^3} \cdot \mathbf{r}$$

$$\mathbf{m} = m_1 + m_2$$

Es equivalente al movimiento de una partícula de masa m sometida a una fuerza central (campo newtoniano) en la dirección radial $-\mathbf{r}$ (Fig. 5.a).

Si definimos el momento angular (\mathbf{h}) por unidad de masa de la fuerza radial como:

$$\tilde{\mathbf{h}} = \mathbf{r} \times \tilde{\mathbf{v}}$$

Es una *constante* del movimiento, luego el movimiento es plano y siempre ocurre en un plano perpendicular a \mathbf{h} , por lo que podemos definir unas coordenadas polares (r, θ) y descomponer la velocidad en una *componente radial* (\mathbf{v}_r) y en otra *tangencial* (\mathbf{v}_t) (Fig. 5.b):

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}_r &= \dot{r} \cdot \mathbf{u}_r \\ \tilde{\mathbf{v}}_t &= r \cdot \dot{\theta} \cdot \mathbf{u}_\theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tilde{\mathbf{v}}(r, \theta) = \dot{r} \cdot \mathbf{u}_r + r \cdot \dot{\theta} \cdot \mathbf{u}_\theta$$

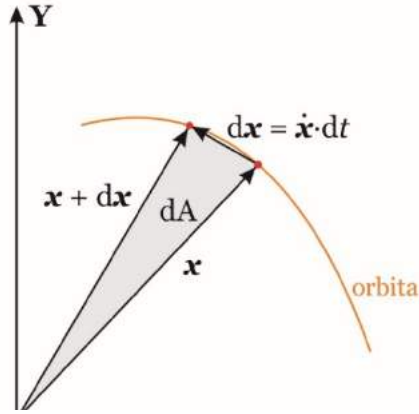


Fig. 6 diferencial de área

Se define la *velocidad areolar* (v_A), es decir el área barrida por radio vector por unidad de tiempo: $v_A = dA/dt$. Donde dA (Fig. 6) es el diferencial de área formada por dos posiciones de la masa en un diferencial de tiempo dt .

En un diferencial de tiempo dt , la masa se desplaza $d\vec{x} = \vec{\dot{x}} \cdot dt$. Ya que se trata de un diferencial podemos considerar que $d\vec{x}$ es una línea recta, luego como puede verse en la Fig. 6 los vectores \vec{x} y $d\vec{x}$, determinan un paralelogramo cuya área es justo el doble que dA . Recordando que el módulo del producto

vectorial de dos vectores es el área del paralelogramo que forman, queda:

$$\left. \begin{aligned} v_A = \frac{dA}{dt} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \|\vec{x} \times d\vec{x}\|}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \|\vec{x} \times \vec{\dot{x}}\| \\ \vec{\dot{x}} &= \vec{u} \cdot \dot{r} + \vec{v} \cdot r \cdot \dot{\theta} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_A = r^2 \cdot \frac{\dot{\theta}}{2}$$

Luego, en nuestro caso (Fig. 5.b):

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} \Rightarrow h = r \cdot v_t \cdot \text{sen}(\pi/2) = r \cdot v_t = r^2 \cdot \dot{\theta} \Rightarrow h = r^2 \cdot \dot{\theta}$$

Es decir que la h es el doble de la velocidad areolar, y como es constante se cumple la segunda ley de Kepler.

Definimos la *energía relativa por unidad de masa* E por medio de la expresión:

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{G \cdot m}{r}$$

Donde $\vec{r} \cdot \vec{r} = v^2 = v_r^2 + v_t^2$. La energía total del sistema:

$$\left. \begin{aligned} E_{\text{tot}} &= \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_2 - \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r} \\ E &= \frac{1}{2} \cdot \vec{r} \cdot \vec{r} - \frac{G \cdot m}{r} \\ \vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\ m &= m_1 + m_2 \\ m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 &= m \cdot \vec{R} \\ \mu &= \frac{m_1 \cdot m_2}{m} = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \vec{R} \cdot \vec{R} + \mu \cdot E$$

Luego la energía total es igual a la energía cinética del centro de masas más la energía relativa de la masa reducida μr .

Las componentes del vector aceleración valen:

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_r &= (\ddot{r} - r \cdot \dot{\theta}^2) \cdot \bar{u}_r \\ \bar{a}_t &= (2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\theta} + r \cdot \ddot{\theta}) \cdot \bar{u}_\theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{v}(r, \theta) = (\dot{r} - r \cdot \dot{\theta}^2) \cdot \bar{u}_r + (2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\theta} + r \cdot \ddot{\theta}) \cdot \bar{u}_\theta$$

Luego, la ecuación del movimiento queda:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -G \cdot \frac{m}{r^3} \cdot \mathbf{r} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \bar{a}_r &= \left(-G \cdot \frac{m}{r^3} \cdot r \right) \cdot \bar{u}_r \Rightarrow \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \cdot \bar{u}_r = \left(-G \cdot \frac{m}{r^3} \cdot r \right) \cdot \bar{u}_r \\ \bar{a}_\theta &= 0 \end{aligned} \right.$$

La componente radial, se puede expresar en función del momento angular:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} &= r \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - G \cdot \frac{m}{r^3} \cdot r \\ h &= r^2 \cdot \dot{\theta} \Rightarrow h = r^2 \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{h^2}{r^3} - \frac{G \cdot m}{r^2}$$

Haciendo el cambio de variable, tenemos:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} &= \frac{h^2}{r^3} - \frac{G \cdot m}{r^2} \\ u &= \frac{1}{r} \\ h &= r^2 \cdot \dot{\theta} \Rightarrow u^2 = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \\ \frac{du}{d\theta} &= -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dt}{d\theta} = -\frac{1}{h} \cdot \frac{dr}{dt} \\ \frac{d^2 u}{d\theta^2} &= \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{1}{h} \cdot \frac{dr}{dt} \right) = -\frac{1}{h} \cdot \frac{dt}{d\theta} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right) = -\frac{1}{h} \cdot \left(\frac{dt}{d\theta} \right) \cdot \frac{d^2 r}{dt^2} \\ \Rightarrow -h \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \cdot \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) &= h \cdot u \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right) - \frac{G \cdot m}{h} \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \Rightarrow \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{G \cdot m}{h^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} -\frac{G \cdot m}{r^2} &\Rightarrow -\frac{G \cdot m}{h} \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \\ \frac{h^2}{r^3} &\Rightarrow \frac{h^2}{r} \cdot \frac{1}{r^2} = h \cdot u \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \\ \frac{d^2 r}{dt^2} &= -h \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \cdot \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) \end{aligned} \right.$$

Luego queda la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{G \cdot m}{h^2}$$

Esta ecuación tiene como solución general:

$$u = \frac{G \cdot m}{h^2} + A \cdot \cos(\theta - \omega)$$

Donde A y ω son constantes de integración. Deshaciendo el cambio de variable $u=1/r$, tenemos:

$$r = \frac{h^2/G \cdot m}{1 + e \cdot \cos(\theta - \omega)}$$

$$e = A \cdot \frac{h^2}{G \cdot m}$$

Donde e se denomina *excentricidad*. Esta ecuación pertenece a una cónica, Así la órbita es *elíptica* ($e < 1$), *parabólica* ($e = 1$) y *hiperbólica* ($e > 1$). Para $e = 0$, la elipse degenera en un *círculo* (Fig. 7).

El valor mínimo de r se denomina *distancia del periastro* (r_p) y ocurre cuando $\theta = \omega$:

$$r_p = \frac{h^2}{G \cdot m \cdot (1 + e)}$$

Y la velocidad a esta distancia será tangencial y su valor vendrá dado por:

$$v_p = \frac{h}{r_p} = \frac{G \cdot m \cdot (1 + e)}{h}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación de la energía:

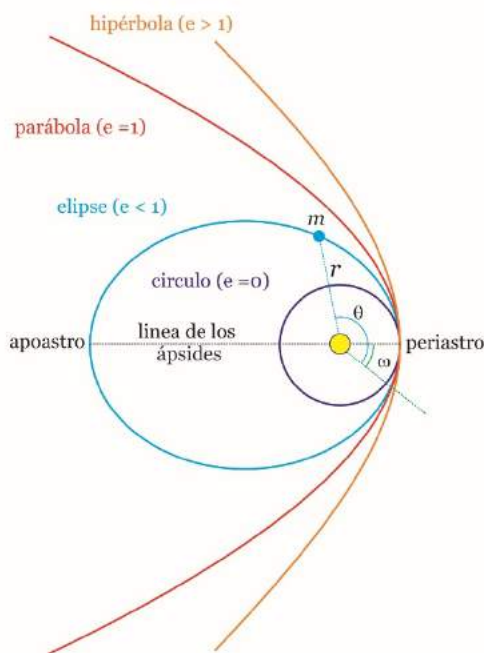


Fig. 7 Tipos de órbitas

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{v^2}{2} - \frac{G \cdot m}{r} \\ r_p &= \frac{h^2}{G \cdot m \cdot (1 + e)} \\ v_p &= \frac{G \cdot m \cdot (1 + e)}{h} \end{aligned} \right\} \Rightarrow E = \frac{1}{2} \cdot \frac{(G \cdot m)^2 \cdot (1 + e)^2}{h^2} - \frac{(G \cdot m)^2 \cdot (1 + e)}{h^2} \Rightarrow$$

$$E = \frac{1}{2} \cdot \frac{(G \cdot m)^2 \cdot (1 + e)^2}{h^2} - \frac{(G \cdot m)^2 \cdot (1 + e)}{h^2} = \frac{(G \cdot m)^2 \cdot (1 + e)}{h^2} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (1 + e) - 1 \right] \Rightarrow$$

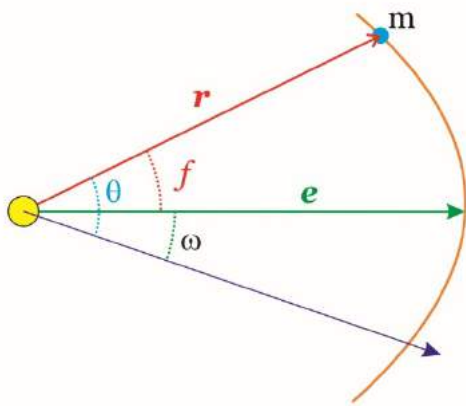
$$\Rightarrow \frac{2 \cdot E \cdot h^2}{(G \cdot m)^2} = (1+e) \cdot (1-e) \Rightarrow \frac{2 \cdot E \cdot h^2}{(G \cdot m)^2} = 1 - e^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^2 = 1 + \frac{2 \cdot E \cdot h^2}{(G \cdot m)^2}$$

Luego la energía es negativa, cero y positiva para las órbitas elípticas, parabólicas e hiperbólicas respectivamente.

Si definimos el vector:

$$\vec{e} = \frac{\vec{r} \times \vec{h}}{G \cdot m} - \frac{\vec{r}}{r}$$



Que denominamos *vector de Laplace* o de *Runge-Lenz*. Este vector es una constante del movimiento, cuyo módulo es la excentricidad (e) y su dirección define lo que se conoce como *línea de los ápsides* (Fig. 7). Si consideramos el ángulo f que forma el vector e y el vector r (Fig. 8), es decir:

$$\left. \begin{aligned} \vec{e} \cdot \vec{r} &= e \cdot r \cdot \cos f \\ \vec{e} \cdot \vec{r} &= \frac{h^2}{G \cdot m} - r \end{aligned} \right\} \Rightarrow r = \frac{h^2 / G \cdot m}{1 + e \cdot \cos f}$$

Fig. 8 Vector de Laplace y anomalía verdadera

Al ángulo f se le conoce como *anomalía verdadera*, que es igual a $f = \theta - \omega$.

Órbitas elípticas

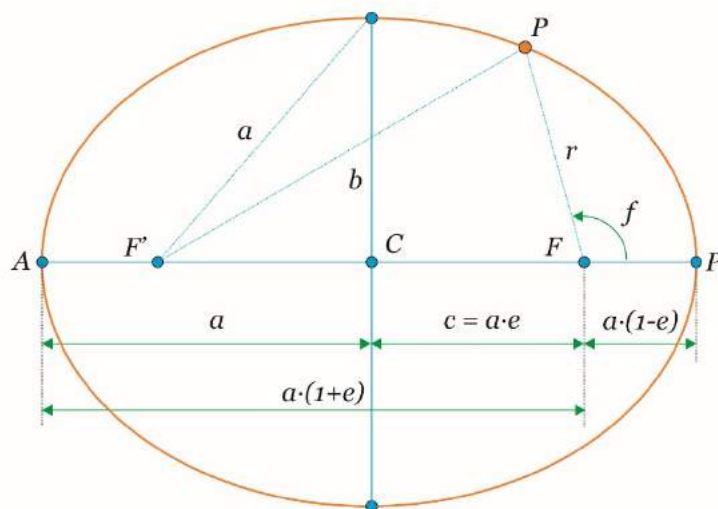


Fig. 9 Geometría de una órbita elíptica

Consideremos para una *órbita elíptica* (Fig. 9), donde C es el centro de la elipse, F y F' son los focos, a es el semieje mayor, b es el semieje menor y c es la distancia focal. P es el periastro ($r = r_p; f = 0$) y A el apoastro ($r = r_a; f = \pi$). Luego tenemos las siguientes relaciones geométricas:

$$\begin{aligned} a &= \frac{r_p + r_a}{2} = \frac{h^2}{G \cdot m \cdot (1 - e^2)} & b &= a \cdot \eta = a \cdot \sqrt{1 - e^2} \\ r_p &= q = a \cdot (1 - e) \\ r_a &= Q = a \cdot (1 + e) \end{aligned}$$

El área de una elipse es igual a $\pi \cdot a \cdot b$ que es barrida por el radiovector en un periodo T , según la segunda ley de Kepler es dos veces la *velocidad areolar* que vimos que era igual a h , luego:

$$\left. \begin{aligned} h &= 2 \cdot v_A = \frac{2 \cdot A}{T} = \frac{2 \cdot (\pi \cdot a \cdot b)}{T} = \frac{2\pi \cdot a \cdot a \cdot \sqrt{1 - e^2}}{T} \\ a &= \frac{h^2}{G \cdot m \cdot (1 - e^2)} \Rightarrow \sqrt{1 - e^2} = \sqrt{\frac{h^2}{G \cdot m \cdot a}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot a^2}{h} \cdot \sqrt{\frac{h^2}{G \cdot m \cdot a}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{a^3}{G \cdot m}}$$

El periodo no depende de la excentricidad, además en el sistema solar la masa m es aproximadamente igual a la masa solar, por lo que se cumple:

$$\frac{T^2}{a^3} = k$$

Que es la denominada tercera ley de Kepler del movimiento planetario. Si denominamos velocidad media a $n = 2\pi/T$, entonces:

$$n^2 \cdot a^3 = G \cdot m$$

El semieje a está relacionado con la energía, a partir de la relación entre la excentricidad de la órbita y la energía:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{h^2}{G \cdot m \cdot (1 - e^2)} = -\frac{h^2/G \cdot m}{(e^2 - 1)} \\ e^2 &= 1 + \frac{2 \cdot E \cdot h^2}{(G \cdot m)^2} \Rightarrow e^2 - 1 = \frac{2 \cdot E \cdot h^2}{(G \cdot m)^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = \frac{h^2/G \cdot m}{2 \cdot E \cdot h^2 / (G \cdot m)^2} = -\frac{G \cdot m}{2 \cdot E}$$

Luego el semieje depende de la energía, pero no de h . Podemos poner la velocidad en función de r y a de la siguiente forma.

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{v^2}{2} - \frac{G \cdot m}{r} \\ a &= -\frac{G \cdot m}{2 \cdot E} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v^2 = G \cdot m \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

Las componentes radiales y tangenciales del vector velocidad se hallan en función de la anomalía verdadera:

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{h^2/G \cdot m}{1 + e \cdot \cos f} \Rightarrow \dot{r} = \frac{h^2}{G \cdot m} \cdot \frac{e \cdot \sin f}{(1 + e \cdot \cos f)^2} \cdot \dot{f} \\ h &= r^2 \cdot \dot{\theta} = r^2 \cdot \dot{f} \Rightarrow \dot{f} = \frac{h}{r^2} \\ \Rightarrow \dot{r} &= \frac{h^2/G \cdot m}{1 + e \cdot \cos f} \cdot \frac{(h^2/G \cdot m) \cdot e \cdot \sin f}{(h^2/G \cdot m) \cdot (1 + e \cdot \cos f)} \cdot \frac{h}{r^2} = \frac{G \cdot m}{h} \cdot e \cdot \sin f \\ r \cdot \dot{\theta} &= r \cdot \dot{f} = \frac{h}{r} \\ r &= \frac{h^2/G \cdot m}{1 + e \cdot \cos f} \end{aligned} \right\} \Rightarrow r \cdot \dot{\theta} = \frac{G \cdot m}{h} \cdot (1 + e \cdot \cos f)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_r = \dot{r} = \frac{G \cdot m}{h} \cdot e \cdot \sin f \\ v_t = r \cdot \dot{\theta} = \frac{G \cdot m}{h} \cdot (1 + e \cdot \cos f) \end{cases}$$

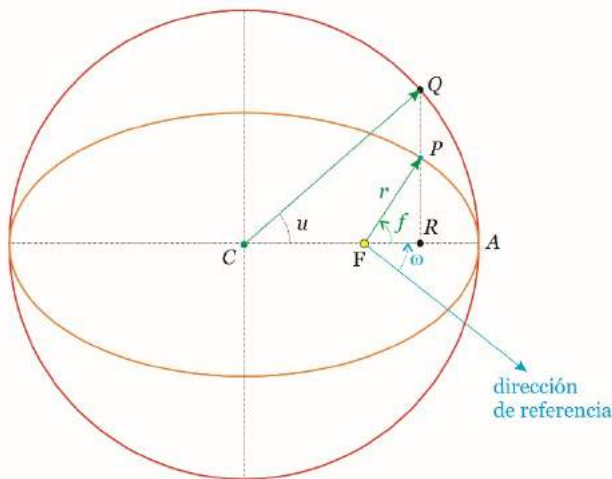


Fig. 10 Interpretación geométrica de la anomalía excéntrica

Para hallar la ley horaria del movimiento se introduce la denominada anomalía excéntrica (u) definida como:

$$r = a \cdot (1 - e \cdot \cos u)$$

La interpretación geométrica se muestra en la Fig. 10:

$$\begin{aligned} FR &= r \cdot \cos f = \\ &= CR - CF = a \cdot \cos u - a \cdot e \\ PR &= r \cdot \sin f = \frac{b}{a} \cdot QR = \\ &= \sqrt{1 - e^2} \cdot a \cdot \sin u \end{aligned}$$

Luego la relación entre anomalía verdadera (f) y excéntrica (u) es igual a:

$$r \cdot \text{sen } f = a \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot \text{sen } u$$

Su significado geométrico descrito en la Fig. 10, es que un punto Q en una circunferencia de radio a , cuya coordenada RQ coincide con la de la masa P en su órbita, forma un ángulo u con el eje de la elipse, medido éste desde el centro C de la elipse y del círculo.

A partir de las relaciones trigonométricas del ángulo mitad:

$$\left. \begin{aligned} 2 \cdot \text{sen}^2 \frac{f}{2} = 1 - \cos f &= \frac{(1+e) \cdot (1 - \cos u)}{1 - e \cdot \cos u} = \frac{(1+e)}{1 - e \cdot \cos u} \cdot 2 \cdot \text{sen}^2 \frac{u}{2} \\ 2 \cdot \text{cos}^2 \frac{f}{2} = 1 + \cos f &= \frac{(1-e) \cdot (1 + \cos u)}{1 - e \cdot \cos u} = \frac{(1-e)}{1 - e \cdot \cos u} \cdot 2 \cdot \text{cos}^2 \frac{u}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \tan \frac{u}{2}$$

Si partimos de la ecuación del momento:

$$\left. \begin{aligned} h = r^2 \cdot \frac{df}{dt} \Rightarrow h \cdot dt = r^2 \cdot df \Rightarrow h \cdot (t - t_0) &= \int_0^f r^2(f') \cdot df' \\ \tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \tan \frac{u}{2} \Rightarrow df = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e \cdot \cos u} \cdot du \end{aligned} \right\} \Rightarrow h \cdot (t - t_0) = \int_0^f r^2(f') \cdot df' =$$

$$= h \cdot (t - t_0) = a^2 \cdot \sqrt{1-e^2} \cdot \int_0^u (1 - e \cdot \cos u') \cdot du' \xrightarrow{h=2 \cdot v_A} M = n \cdot (t - t_0) = u - e \cdot \text{sen } u$$

Donde $M = u - e \cdot \text{sen } u$ se conoce como *ecuación de Kepler*, y M se denomina *anomalía media*.

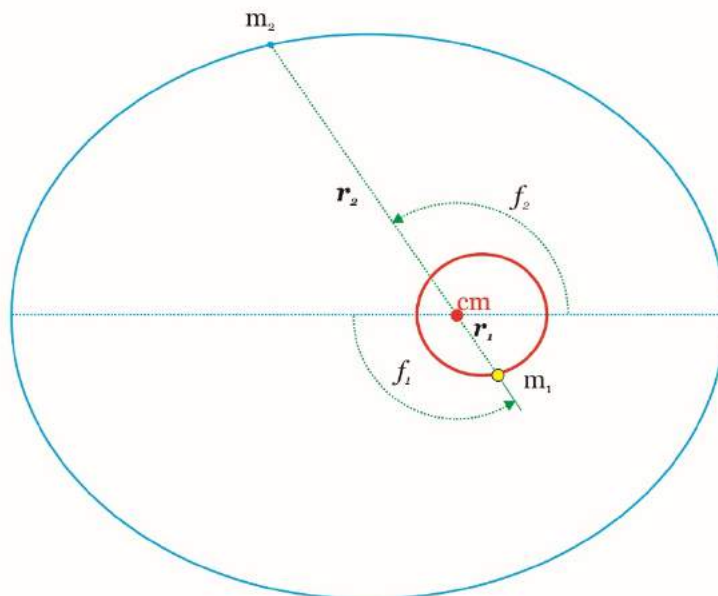


Fig. 11 Órbita elíptica alrededor del centro de masas

Para terminar con el problema de los dos cuerpos, podemos considerar el movimiento de las dos masas alrededor del centro de masas del sistema (cm), es decir que hacemos $\mathbf{R}=0$ en la Fig. 4. Ahora el sistema se puede describir como si ambas masas orbitaran alrededor de su centro de masas, en el caso de una órbita elíptica será el foco común de ambas tal como se muestra en la Fig. 11, donde cada masa sigue una órbita elíptica. Se puede comprobar que las excentricidades de la *órbita relativa* (e) y e_1, e_2 , que son las descritas por m_1 y m_2 alrededor de cm coinciden, Además el periastro de la órbita descrita por r_1 , está en la dirección opuesta al de las órbitas de r_2 y la órbita relativa vista anteriormente. También se cumple que el semieje de la órbita relativa es igual a la suma de los semiejes a_1 y a_2 .

EL PROBLEMA RESTRINGIDO DE LOS TRES CUERPOS. PUNTOS DE LAGRANGE

Una de las hipótesis fundamentales en el estudio del problema de los dos cuerpos era la consideración de sistema aislado sin más fuerzas externas. No obstante, esta aproximación no es válida cuando se está en una zona intermedia entre estos cuerpos, ya que ningún cuerpo tendrá una influencia dominante. Ya desde los tiempos de Newton, se observó que el problema con n cuerpos para $n \geq 3$ era mucho más difícil que el de los dos cuerpos, para el caso $n = 3$, si se realizan algunas hipótesis para simplificar el problema. Es lo que se conoce como el *problema de los tres cuerpos restringido*.

Así tenemos que, de los tres cuerpos, dos son masivos, por ejemplo, el Sol, planetas, lunas, de masa M y m , y el tercer cuerpo es poco masivo (por ejemplo, una sonda espacial, un pequeño asteroide, etc.) y se supone que no tiene ninguna influencia sobre los otros dos. Por tanto, los dos cuerpos masivos orbitan respecto a su centro de masas (cm) siguiendo una órbita kepleriana, que se supondremos circular. Ambas masas están separadas una distancia a entre si y a una distancia a_M y a_m respecto a cm , cumpliéndose que:

$$M \cdot a_M = m \cdot a_m = \frac{M \cdot m}{M + m} \cdot a \Rightarrow \begin{cases} a_M = \frac{m}{M + m} \cdot a \\ a_m = \frac{M}{M + m} \cdot a \end{cases}$$

Según la tercera ley de Kepler, el sistema gira con velocidad constante:

$$n = \sqrt{\frac{G \cdot (M + m)}{a^3}}$$

Si hacemos un cambio de unidades para facilitar los cálculos, de forma que elegimos las unidades de masa y de tiempo de forma que $G \cdot (M + m)$, a y la constante de gravitación universal G sean igual a la unidad. Tenemos que n es igual a la unidad ($n = 1$) y el periodo de revolución será 2π . En estas unidades m es iguala $\mu = m/(m+M)$; el tiempo se cuenta por medio de la variable $\tau = nt$. Y las distancias $a_M = \mu$ y $a_m = (1-\mu)$, que son constantes con el tiempo. Consideremos un sistema plano inercial de referencia XY con respecto al cual se mueve el sistema de las dos masas.

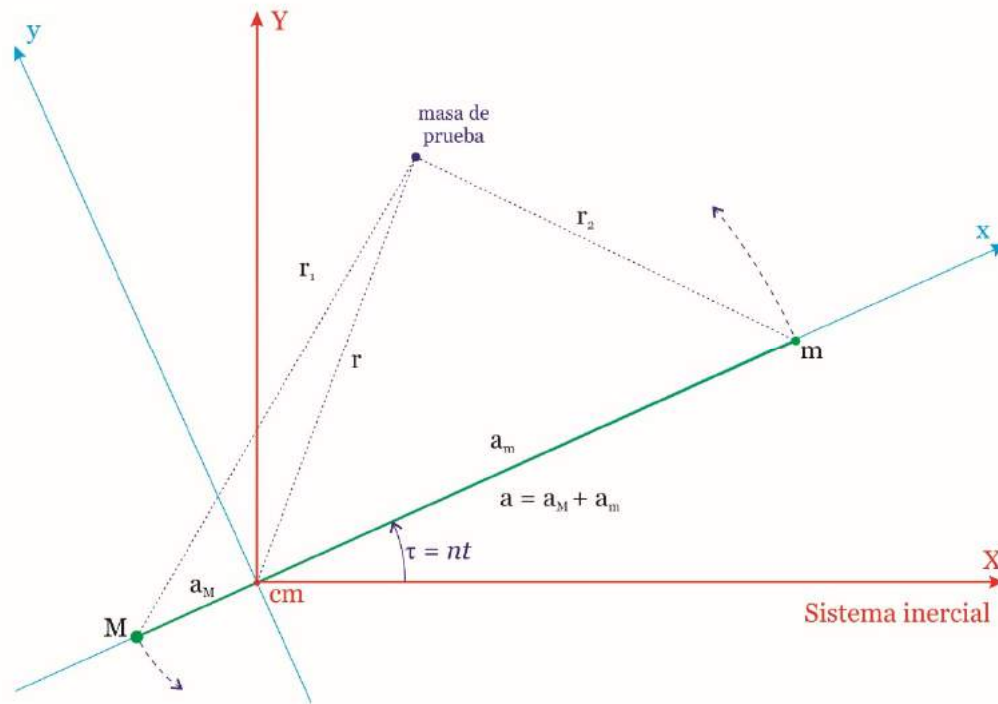


Fig. 12 Sistema plano de referencia inercial (XY) y en rotación (xy) de las dos masas

Consideremos que con el sistema se mueve en un sistema de referencia (xy) que gira alrededor del centro de masas con velocidad $n = 1$ normal al plano orbital con m y M fijas en el eje x (Fig. 12). Si (x, y, z) son las coordenadas de una *masa de prueba* respecto al sistema móvil. Tenemos que:

$$r_1 = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2 + z^2} \quad r_2 = \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2 + z^2}$$

Para la cinemática del movimiento relativo de rotación uniforme² se cumple para el sistema de referencia inercial:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_1 &= (1 - \mu) \cdot \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} \\ \ddot{\vec{r}}_2 &= -\mu \cdot \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \ddot{\vec{r}}|_{\text{inercial}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = -\mu \cdot \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} - (1 - \mu) \cdot \frac{\vec{r}_1}{r_1^3}$$

Para el sistema de referencia no inercial se cumple:

$$\ddot{\vec{r}}|_{\text{inercial}} = \ddot{\vec{r}}|_{\text{rotacional}} + \left(2 \cdot \vec{n} \times \dot{\vec{r}}|_{\text{inercial}} \right)_{\text{coriolis}} + \vec{n} \times \vec{n} \times \vec{r}$$

² Ver: <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/cinemática/coriolis1/coriolis1.htm> (visitado 15/05/5018)

$$\vec{r}|_{\text{inercial}} = -\frac{(1-\mu)}{r_1^3} \cdot \vec{r}_1 - \frac{\mu}{r_2^3} \cdot \vec{r}_2 = -\frac{(1-\mu)}{r_1^3} \cdot \begin{bmatrix} x+\mu \\ y \\ z \end{bmatrix} - \frac{\mu}{r_2^3} \cdot \begin{bmatrix} x-1+\mu \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{r}|_{\text{rotacional}} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} \quad 2 \cdot \vec{n} \times \vec{r}|_{\text{inercial}} = \begin{bmatrix} -2 \cdot \dot{x} \\ 2 \cdot \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{n} \times \vec{n} \times \vec{r} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo:

$$\vec{r}|_{\text{inercial}} = \vec{r}|_{\text{rotacional}} + 2 \cdot \vec{n} \times \vec{r}|_{\text{inercial}} + \vec{n} \times \vec{n} \times \vec{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{(1-\mu)}{r_1^3} \cdot \begin{bmatrix} x+\mu \\ y \\ z \end{bmatrix} - \frac{\mu}{r_2^3} \cdot \begin{bmatrix} x-1+\mu \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \cdot \dot{x} \\ 2 \cdot \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Llegamos a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2 \cdot \dot{x} = x - \frac{(1-\mu) \cdot (x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu \cdot (x-1+\mu)}{r_2^3} \\ \ddot{y} + 2 \cdot \dot{y} = y - \frac{(1-\mu) \cdot y}{r_1^3} - \frac{\mu \cdot y}{r_2^3} \\ \ddot{z} = -\frac{(1-\mu) \cdot z}{r_1^3} - \frac{\mu \cdot z}{r_2^3} \end{cases}$$

Ahora vamos hallar los puntos de equilibrio es decir aquellos en que se anulan las fuerzas en la *masa de prueba* y, por lo tanto, una masa situada en ese punto permanecerá en reposo respecto al sistema en rotación. Así que hacemos nulas las derivadas:

$$\left. \begin{cases} 0 = x - \frac{(1-\mu) \cdot (x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu \cdot (x-1+\mu)}{r_2^3} \\ 0 = y - \frac{(1-\mu) \cdot y}{r_1^3} - \frac{\mu \cdot y}{r_2^3} \\ 0 = -\frac{(1-\mu) \cdot z}{r_1^3} - \frac{\mu \cdot z}{r_2^3} \Rightarrow \frac{(1-\mu)}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} > 0 \end{cases} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \left(1 - \frac{(1-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3}\right) \cdot y = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y \neq 0 \end{cases} \\ \frac{(1-\mu)}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} > 0 \Rightarrow z = 0 \end{cases}$$

Por lo que tenemos dos posibilidades $y = 0$ e $y \neq 0$.

Puntos de equilibrio para $y = 0$

$$r_1 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2 + z^2} \quad r_2 = \sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2 + z^2} \xrightarrow[y=0]{z=0} r_1 = x+\mu \quad r_2 = x-1+\mu$$

Luego sustituyendo en:

$$-x = -\frac{(1-\mu) \cdot (x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu \cdot (x-1+\mu)}{r_2^3} \xrightarrow[r_2=x-1+\mu]{r_1=x+\mu} x = \frac{(1-\mu)}{(x+\mu)^2} + \frac{\mu}{(x-1+\mu)^2}$$

Luego, podemos definir la siguiente función de x :

$$F(x) = \frac{(1-\mu)}{(x+\mu)^2} + \frac{\mu}{(x-1+\mu)^2} - x$$

Se puede demostrar que la función tiene tres soluciones, analizando la gráfica de la función (Fig. 13)

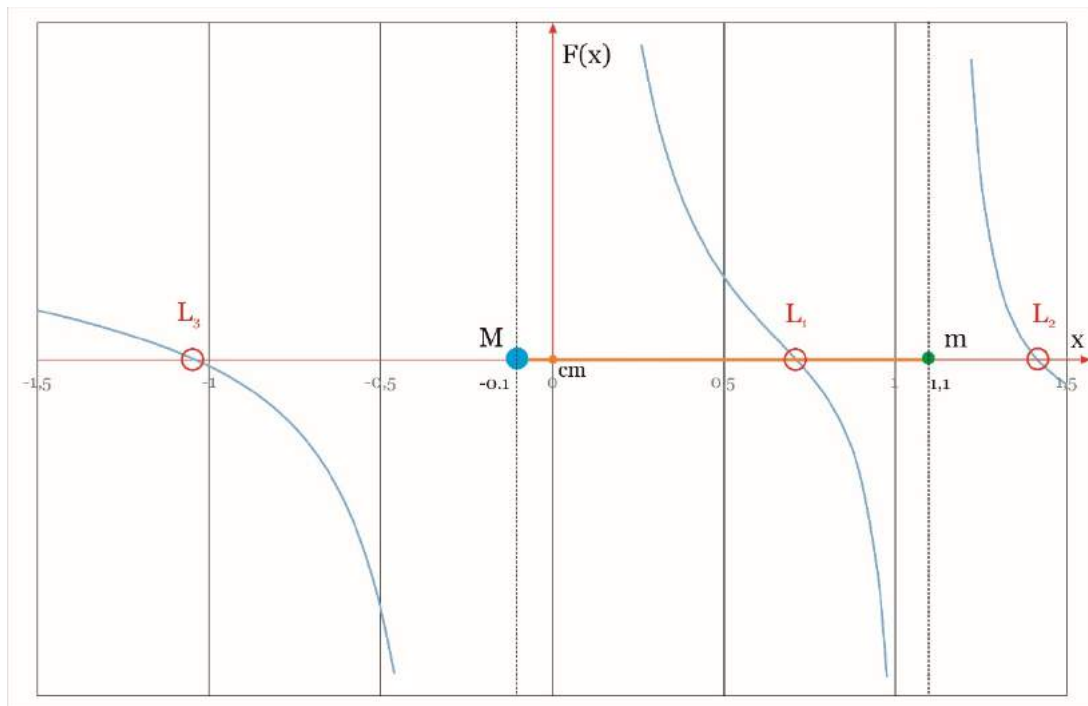


Fig. 13 Gráfica de $F(x)$ para $\mu = 0,1$

Se observa que para $x = -\mu$ y para $x = 1 + \mu$, es decir donde se encuentran las masas, la función se hace infinito, cumpliéndose que:

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow \mu^+} F(x) = +\infty & \lim_{x \rightarrow \mu^-} F(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow (1+\mu)^+} F(x) = +\infty & \lim_{x \rightarrow (1+\mu)^-} F(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = +\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = -\infty \end{array}$$

Luego, $F(x)$ cambia de signo entre $-\infty$ y $-\mu$, luego debe cruzar el eje al menos una vez, si calculamos la derivada:

$$F'(x) = 2 \cdot \frac{(1-\mu)}{(x+\mu)^3} + 2 \cdot \frac{\mu}{(x-1+\mu)^3} - 1 \xrightarrow{x \in [-\infty, -\mu]} F'(x) < 0$$

Luego es monótona decreciente, solo puede cortar una sola vez en un punto, que denominaremos L_3 . Lo mismo ocurre entre $-\mu$ y $1+\mu$, que corta en L_1 , y entre $1+\mu$ y $+\infty$, que corta en L_2 .

Estos puntos fueron hallados por el matemático suizo Leonard Euler (1707 -1783) en 1763, y publicados en 1765, en su obra *De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium*.

Puntos equilibrio para $y \neq 0$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= x - \frac{(1-\mu) \cdot (x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu \cdot (x-1+\mu)}{r_2^3} \\ \left(1 - \frac{(1-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 = -\frac{(1-\mu) \cdot \mu}{r_1^3} - \frac{\mu \cdot (-1+\mu)}{r_2^3} \Rightarrow r_1 = r_2$$

Por lo tanto:

$$0 = 1 - \frac{(1-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \xrightarrow{r_1=r_2} 1 - \frac{(1-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_1^3} = \frac{1}{r_1^3} - 1 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 1$$

$$r_1 = r_2 \Rightarrow \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2} = \sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2} \Rightarrow x = \frac{1-2 \cdot \mu}{2}$$

$$r_1 = 1 = \sqrt{\left(\frac{1-2 \cdot \mu}{2} + \mu\right)^2 + y^2} \Rightarrow y = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{1-2 \cdot \mu + 2 \cdot \mu}{2}\right)^2} = y = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Tenemos dos puntos de equilibrio que denominaremos L_4 y L_5 en las siguientes coordenadas:

$$L_4 = \left(\frac{1-2 \cdot \mu}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right) \quad L_5 = \left(\frac{1-2 \cdot \mu}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right)$$

Que fueron publicados en 1772 por matemático italiano nacionalizado francés Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813), en su *Essai sur le problème des trois corps*.

Estos puntos forman dos triángulos equiláteros, con base las dos masas M y m y en sus vértices opuestos los puntos L_4 y L_5 (Fig. 14).

Al conjunto de todos los puntos de equilibrio (L_1, L_2, L_3, L_4, L_5) se les denomina **puntos de libración** o por extensión **puntos de Lagrange**. En la Fig. 15 tenemos el ejemplo de situación de los puntos de Lagrange para el sistema Tierra-Luna.

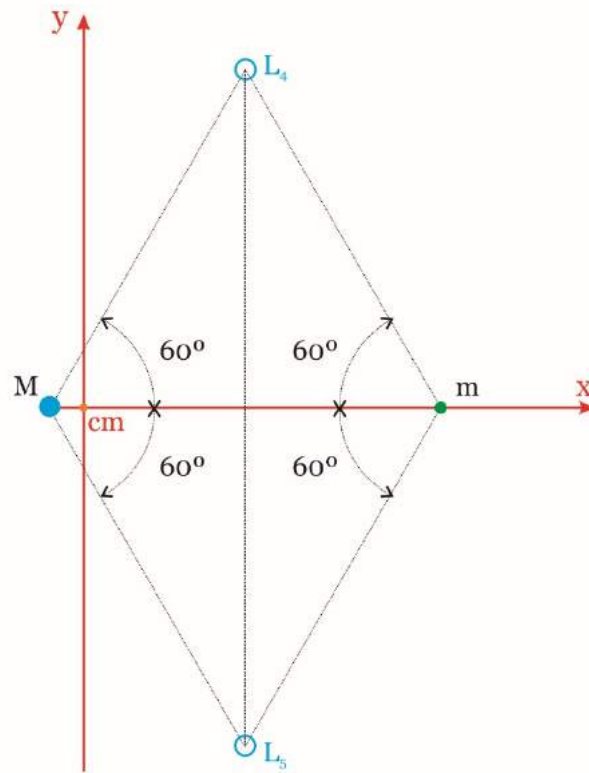


Fig. 14 Puntos de Lagrange L_4 y L_5

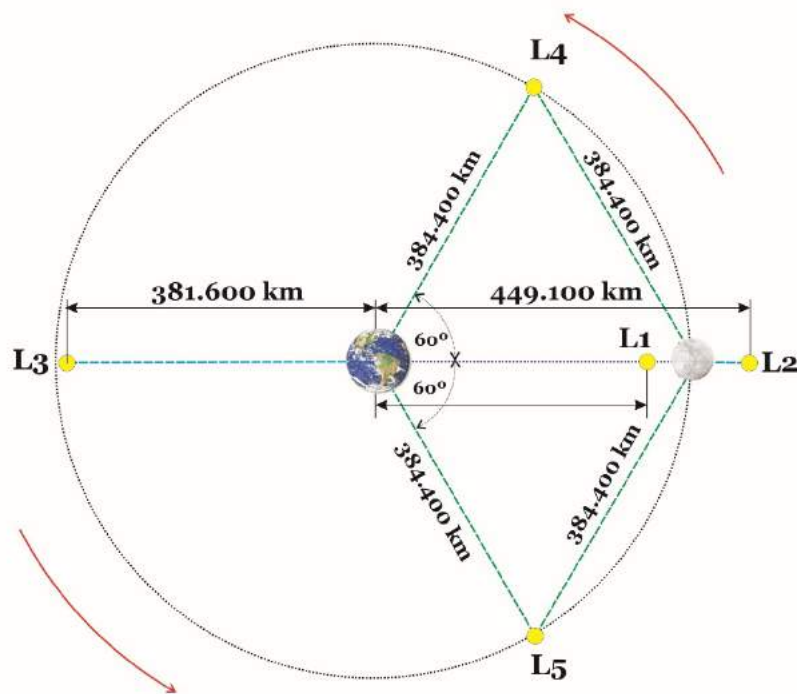


Fig. 15 Situación de los puntos de Lagrange en el Sistema Tierra-Luna

Si consideramos todo el sistema girando alrededor de su centro de masas, los puntos giraran manteniendo su posición relativa respecto a la Tierra y La Luna (Fig. 16). Existen puntos similares en los sistemas Tierra-Sol, Sol –Júpiter, etc.

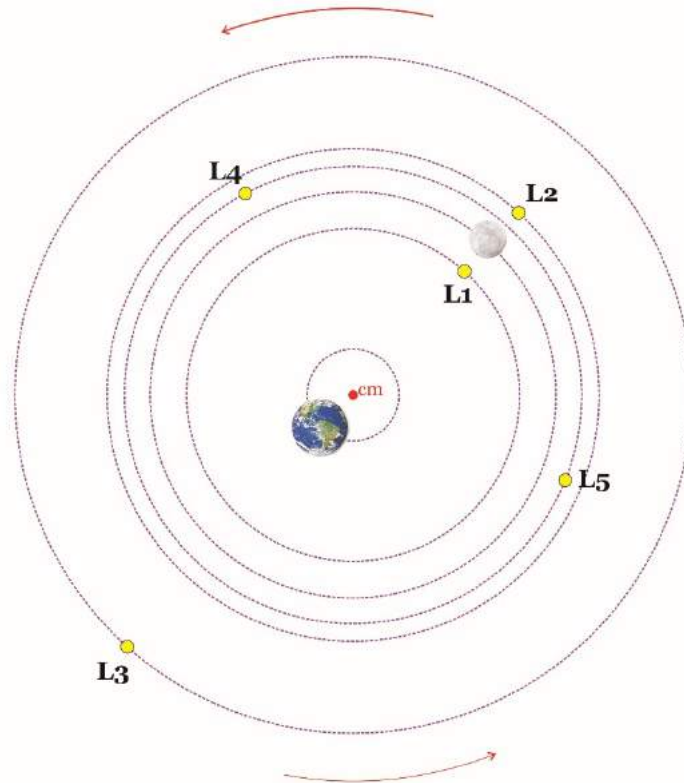


Fig. 16 Sistema Tierra-Luna girando alrededor del centro de masa

Por lo tanto, si demostráramos que estos puntos son estables, podríamos colocar un objeto de masa muy pequeña comparada con M y m , como por ejemplo una sonda espacial, para la observación de la Tierra, la Luna, el Sol, los planetas o las estrellas.

El estudio de la estabilidad de los puntos de Lagrange, si bien no es complejo es laborioso, además de necesitar algunos conceptos de algebra lineal, por lo que se omiten, se puede encontrar detallado en las referencias al final de este trabajo. Lo interesante es que se llegan a las siguientes conclusiones:

Los puntos de Lagrange lineales (L_1 , L_2 y L_3) son siempre inestables. Los puntos no lineales (L_4 y L_5) pueden ser estables o inestables, dependiendo de la condición:

$$\mu \leq \mu_{cr} = \frac{1 - \sqrt{23/27}}{2} \approx 0,03852$$

Para el caso Tierra-Sol y Tierra-Luna se cumple. No obstante, las perturbaciones introducidas por la Luna (en el primer caso) y el Sol (en el segundo) hacen que en la práctica sean inestables.

Para el caso Júpiter-Sol también se cumple la condición, y en este caso son realmente estables. De hecho, se pueden encontrar asteroides (los llamados troyanos) rotando de

manera sincronizada con Júpiter en estos puntos. Para el caso Plutón-Caronte, al ser sus masas relativamente parecidas, no se cumple la condición.

APLICACIONES DE LOS PUNTOS DE LAGRANGE. ORBITAS HALO Y LISSAJOUS

Los puntos L_1 , L_2 y L_3 son nominalmente inestables por lo que cualquier sonda espacial colocada en ese punto necesitará gastar combustible para su recolocación. Para optimizar este consumo se emplean lo que se conocen como *órbitas halo*, que son orbitas periódicas alrededor de dichos puntos. Por ejemplo, varias misiones han estado o están en una órbita halo en torno al L_1 Sol-Tierra, que se encuentra a 1,5 millones de kilómetros de la Tierra (Fig. 17). Estas orbitas también son inestables por lo que necesitan gastar combustible por lo que el tiempo de misión está limitado.

Existe otra solución es lo que se conoce como *órbita de Lissajous*³, al contrario que las orbitas halo, es una trayectoria orbital cuasi-periódica por lo que un objeto puede seguir alrededor de un punto de Lagrange sin requerir ninguna propulsión. Las *órbitas de Lissajous* incluyen componentes en este plano y perpendiculares a él, las órbitas Halo también incluyen componentes perpendiculares al plano, pero son periódicas, mientras las *órbitas de Lissajous* no lo son.

La Fig. 17 muestra un esquema de los puntos de Lagrange cercanos a la Tierra. Su proximidad los hace más atractivos para posibles aplicaciones de misiones espaciales.

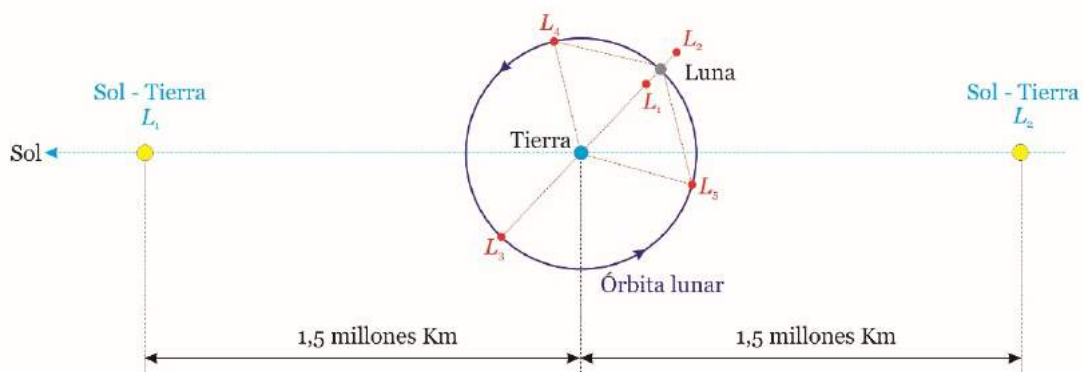


Fig. 17 Puntos de Lagrange cerca de la Tierra

El punto L_1 del sistema Sol-Tierra es ideal para hacer observaciones del Sol. Los objetos aquí situados nunca son eclipsados por la Tierra o la Luna. El *Observatorio Solar y de la Helioesfera* (SOHO) está estacionada en una *órbita de halo* (Fig. 18) alrededor del punto L_1 desde 1996, y el satélite *Advanced Composition Explorer* (ACE) está desde 1997 en una órbita Lissajous alrededor también del punto L_1 . El punto L_1 del sistema Tierra-Luna permite un acceso fácil a la órbita lunar y de la Tierra con un mínimo

³ En honor al físico francés Jules Antoine Lissajous (1822-1880), que estudio lo que hoy se conoce como curvas de Lissajous o figuras de Lissajous, que es la gráfica del sistema de ecuaciones paramétricas correspondiente a la superposición de dos movimientos armónicos simples en direcciones perpendiculares. Las orbitas se llaman de Lissajous porque se forma es similar a dichas figuras.

cambio de velocidad, y sería ideal para una estación espacial tripulada situada a medio camino pensada para ayudar al transporte de carga y personal hacia y desde la Luna.

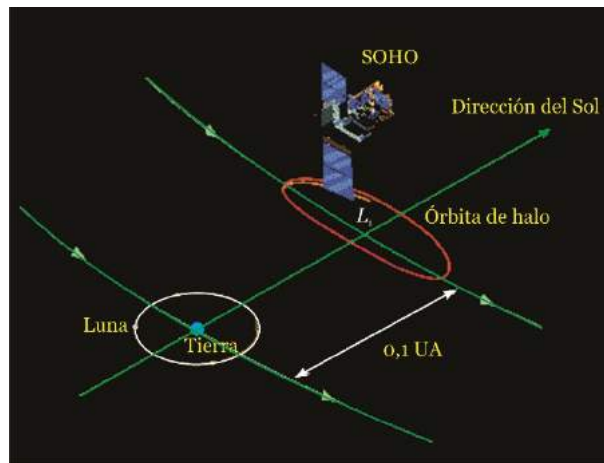


Fig. 18 Órbita halo del Observatorio Solar y de la Heliosfera (SOHO)

El punto L_2 del sistema Sol-Tierra es un punto ideal para observatorios espaciales, porque un objeto alrededor de L_2 mantendrá la misma orientación con respecto al Sol y la Tierra. El *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (WMAP), activo desde 2001, así como el *Observatorio Espacial Herschel* desde 2009, orbitan (Fig. 19) el punto L_2 del sistema Sol-Tierra. El futuro *telescopio espacial James Webb*, fecha posible de lanzamiento 2020, también se situará en el punto L_2 del sistema Sol-Tierra. El punto L_2 del sistema Tierra-Luna sería una buena localización para un satélite de comunicaciones que cubriera la cara oculta de la Luna.

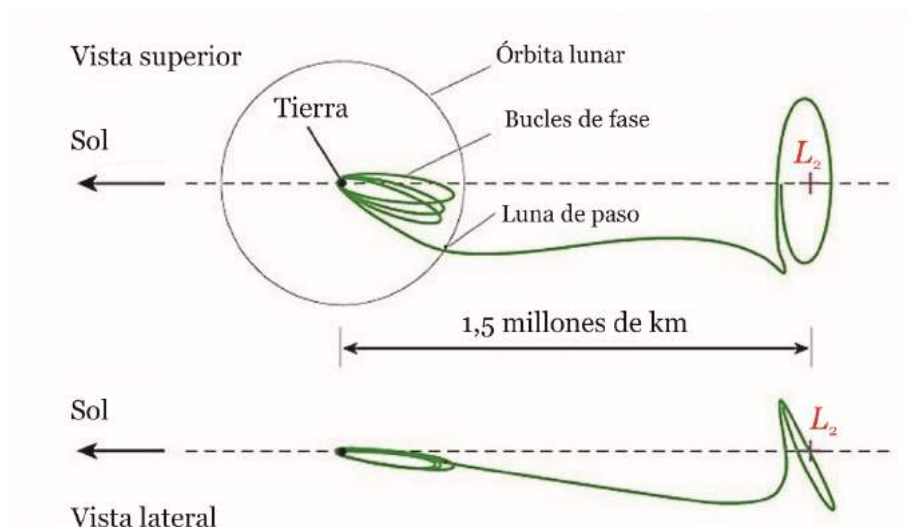


Fig. 19 Transición a una órbita de Lissajous alrededor de L_2 seguida por el observatorio WMAP

CONCLUSIONES

Hemos iniciado este viaje lanzando desde la Tierra, con la imaginación de Julio Verne, un proyectil hacia el punto de libración L_1 del sistema Tierra-Luna. Esta ha sido la excusa para adentrarnos en el problema de los dos cuerpos como preludeo al problema

de los tres cuerpos restringido, que nos ha dado el significado físico de los puntos de libración, estos que fueron hallados en el siglo XVII como meras soluciones matemáticas a unas ecuaciones diferenciales. La moderna exploración espacial ha sabido aprovechar las propiedades gravitatorias de los puntos existentes en las cercanías de la Tierra para situar observatorios o emplearlos como lanzaderas para encuentros con objetos menores del sistema solar.

La compleja dinámica orbital que existe en torno a estos puntos es muy diversa y es de una vital importancia para la exploración espacial, los trabajos sobre *orbitas halo* y *Lissajous* son abundantes en la bibliografía, y por tanto se cierra el círculo con el que habíamos iniciado este trabajo, la mecánica celeste aplicada a la exploración espacial es compleja para el gran público, pero su utilidad merece el esfuerzo por su desarrollo teniendo en cuenta los resultados que se consiguen. Por lo que mostrar una ecuación en la portada de un periódico fue la impactante manera con la que Julio Verne dio seriedad y veracidad a su *Viaje Extraordinario*, tal y como hoy una vez hechos realidad los tienen.

REFERENCIAS

BERTOTTI, BRUNO, FARINELLA, PAOLO, VOKROUHLICKY, DAVID (2003), *Physics of the Solar System. Dynamics and Evolution, Space Physics, and Spacetime Structure*. Kluswer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 294-312, 345-59.

DUNHAM, DAVID W., FARQUHAR ROBERT W. (2003). Libration Point Missions, 1978 – 2002. EN: Gómez, G, Wen-Yu Lo, Martin, Masdemont, Josep J., *Libration Point Orbits and Applications: Proceedings of the Conference, Aiguablava, Spain, 10-14 June 2002*, World Scientific Publishers, Singapore, p. 45-73. <http://www.ieec.cat/hosted/web-libpoint/presentacions/folta-beckman.pdf>

EULER, LEONARD (1767) *De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium*. Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 11, pp. 144-151. <http://eulerarchive.maa.org/docs/originals/E327.pdf>

LAGRANGE, JOSEPH LOUIS De (1772), *Essai sur le problème des trois corps*, Prix de l'Académie royale des sciences de Paris, tome IX. <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k229225j/f231>

VERNE, JULES (1870), *Viaje alrededor de la Luna, Capitulo IV. Un poco de álgebra*, edición del 2008, RBA, Madrid, pp. 42-50.

ZOTESA, F. ALONSO, PEÑAS, M. SANTOS (2011), Modelado, Simulación y Control de Satélites en los Puntos de Lagrange del Sistema Tierra – Luna. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial* 8, pp. 204–215. <https://polipapers.upv.es/index.php/RIAI/article/download/9683/9594>