

# AXIOMATIZACIÓN DE LA TEORIA DE CONJUNTOS

1. Introducción.
2. Preliminares.
3. El axioma de extensionalidad.
4. El axioma formador de clases.
5. El axioma del par no ordenado.
6. El axioma de regularidad.
7. El axioma de la gran unión.
8. El axioma del conjunto vacío.
9. El axioma de sustitución.
10. El axioma de infinitud.
11. El axioma de elección.
12. El axioma de las partes de un conjunto.
13. Bibliografía.

## 1. Introducción:

Sabemos que un axioma es un principio o postulado básico que es asumido como regla de juego en el proceso de la inferencia lógica, sin ninguna demostración previa.

Fue en la antigua Grecia donde empezó el uso de los axiomas, enunciados o afirmaciones siempre condicionados por su aparente autoevidencia.

### Ejemplos:

"Una proposición no puede ser verdadera y falsa al mismo tiempo".

"El todo es mayor que cualquiera de sus partes".

La base de la construcción de cualquier disciplina matemática es el método axiomático, es decir, el establecimiento de un conjunto de reglas de razonamiento, de enunciados postulados o axiomas a partir de los cuales, y por las reglas de inferencia del sistema, se derivan otros enunciados o proposiciones que llamamos teoremas.

Un axioma es, pues, un principio que permite iniciar un proceso lógico de deducción tomándolo como partida de los pasos de razonamiento.

El conjunto inicial de signos, definiciones, enunciados postulados o axiomas y reglas de derivación desde tales axiomas es el Sistema Axiomático de la disciplina que se construye. Este conjunto inicial de axiomas o reglas no puede ser un conjunto cualquiera de enunciados, sino que debe cumplir los necesarios requisitos que permitan el desarrollo lógico.

Debe ser, en efecto, indecible, consistente y no contradictorio. El objetivo es que sea completo, es decir, que a partir de él pueda derivarse cualquier enunciado de la disciplina a la cuál sirve de fundamento.

1. Indecidibilidad: Ningún axioma del sistema puede ser obtenido como un teorema partiendo de los restantes.

2. Consistente internamente: Nunca podrá ser derivada una contradicción como teorema.

3. No contradictoriedad: Lo afirmado por un axioma no contradice a lo afirmado por cualquiera de los restantes axiomas del sistema.

La Teoría de Conjuntos fue creada en un estadio semiintuitivo. La aparición de algunas paradojas hizo imprescindible su formalización axiomática.

En toda axiomatización de la Teoría de los Conjuntos se necesita, por lo menos, un axioma o regla que nos permita discernir en qué condiciones varios conjuntos son el mismo conjunto, es decir, que nos permita extender, hacer una extensión, del concepto de conjunto, así como otro axioma que nos permita definir tipos de conjuntos, es decir, se necesita también, básicamente, un axioma que podríamos llamar *formador de conjuntos*.

La primera axiomatización apareció ya en el año 1908, con los siete axiomas de Zermelo (Berlín 1871-Friburgo 1953):

- Axioma de extensionalidad
- Axioma de formación de conjuntos.
- Axioma del par
- Axioma de la gran unión
- Axioma del conjunto de las partes.
- Axioma de elección.

**Axioma de infinitud.,**

La existencia de algunos conjuntos no quedaba garantizada con los siete axiomas propuestos por Zermelo, por lo que, en 1922, Fraenkel (Munich 1891-Jerusalén 1965) propuso añadir un octavo axioma: el axioma de sustitución. Es el sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel (sistema Z-F).

En 1925 Von Neumann (Budapest 1903- Washington -1957) presentó un sistema axiomático que representaba un avance sobre el sistema Z-F, pues admitía las clases universales (de todos los conjuntos, de todos los ordinales, de todos los cardinales, ...), no estudiadas en el sistema Z-F.

El concepto primario utilizado por Von Neumann fue el de función y no el de conjunto o clase. La “traducción” del sistema formulado por Neumann de forma que el concepto primario sea el de clase y elemento de clase, y no el de función, se debe a Bernays (Londres 1988- 1980).

Los trabajos de Bernays dieron rigor a la axiomática de la teoría, junto con las puntualizaciones de Gödel (Brünn 1906 – Princeton 1978) y de Quine. Lo que exponemos a continuación se podría denominar algo así como Sistema Axiomático N-B-G-Q (Sistema Axiomático Neumann-Bernays-Gödel-Quine). Exponemos un total de 10 axiomas al mismo tiempo que estudiamos aquellas propiedades de las clases y conjuntos que evidencien la necesidad de formularlos.

**2. Preliminares:**

El concepto primario es el de *clase* y el de *elemento* de una clase.

Llamaremos *conjuntos* a las clases que son elementos de otras clases, y llamaremos *clases últimas* a las clases que no son elementos de otras clases.

**a) Símbolos:**

- **variables:**  
 $x, y, z, \dots$ : son las letras minúsculas del alfabeto castellano.
- **relatores binarios:**  
 $=$ : “es igual a”;  $\hat{I}$ : “es elemento de a” o “pertenece a”,  $\bar{I}$ : “está contenido o es igual a”
- **conectores:**  
 $\sim$ : “no”;  $\bar{U}$ : “y”;  $\bar{O}$ : “o”;  $\textcircled{R}$ : “si... entonces” o “implica”;  $\ll$ : “si y solo si”
- **cuantificadores:**  
 $\forall$ : “para todo”;  $\exists$ : “existe al menos un” o “para algún”;  $\exists!$ : “existe un único”
- **descriptores:**  
 $\lambda$ : “el ... tal que”

**b) Equivalencias:**

Se equivalen las siguientes expresiones de negación:

$$x \neq y \equiv \sim (x = y) \qquad x \notin y \equiv \sim (x \in y)$$

**c) Variables ligadas y variables libres:**

Las variables que siguen a los cuantificadores y al descriptor en una expresión se dicen *variables ligadas*, y las restantes, *variables libres*.

**d) Fórmulas:**

Una fórmula  $f(x)$  indica una expresión en la que la  $x$  es una variable libre.

3. El axioma de extensionalidad:

Establece una sencilla condición para que dos clases sean la misma clase:

“Dos clases,  $a$ ,  $b$ , que tienen los mismos elementos, son la misma clase”

<p>Axioma de extensionalidad: <math>(\forall a, b)(\forall x)(x \in a \leftrightarrow x \in b) \rightarrow a = b</math></p>
---

## 4. El axioma formador de clases:

Este axioma garantiza que para cada fórmula  $f(x)$  existe al menos una formada por todos los conjuntos que satisfacen la fórmula  $f(x)$ .

Axioma formador de clases:  $(\exists y)(\forall x)(x \in y \leftrightarrow Cx \wedge \mathbf{j}(x))$  donde  $y$  no es libre en  $\mathbf{j}(x)$

Con el siguiente teorema se prueba que existe exactamente una clase que satisface la fórmula.

## Teorema 1:

$(\exists! y)(\forall x)(x \in y \leftrightarrow Cx \wedge \mathbf{j}(x))$  donde  $y$  no es libre en  $\mathbf{j}(x)$

## En efecto:

Veamos que la clase  $y$  es única: por axioma 2, existe al menos un  $y/x \in y \leftrightarrow Cx \wedge \mathbf{j}(x)$ . Si hubiera otra clase  $y'$ , con la misma propiedad, es decir, un  $y'/x \in y' \leftrightarrow Cx \wedge \mathbf{j}(x)$  se tendría, aplicando el axioma 1:  $(y, y')(\forall x)(x \in y \leftrightarrow Cx \wedge \mathbf{j}(x) \leftrightarrow x \in y') \rightarrow y = y'$

## Definiciones de clases:

Así, pues, para cada fórmula  $f(x)$  en la que  $y$  no es libre en  $f(x)$  existe una sola clase de los conjuntos que verifican  $f(x)$ . Esta clase se puede representar por  $\{x/\mathbf{f}(x)\}$  ("la clase de los conjuntos  $x$  tales que verifican  $\mathbf{j}(x)$ "), y que puede definirse por:  $\{x/\mathbf{f}(x)\} = (\exists y)(\forall x)(x \in y \leftrightarrow Cx \wedge \mathbf{j}(x))$

El hecho de que para cada fórmula exista una única clase que la verifica, permite definir clases mediante fórmulas. Mostramos un listado de las principales:

1. La clase *unión de clases*:

$$a \cup b = \{x/\mathbf{j}(x) \equiv x \in a \vee x \in b\}$$

2. La clase *intersección de clases*:

$$a \cap b = \{x/\mathbf{j}(x) \equiv x \in a \wedge x \in b\}$$

3. La *clase universal*:

$$U = \{x/x = x\}$$

4. La *clase vacía*:

$$\Phi = \{x/x \neq x\}$$

5. La *clase diferencia de clases*:

$$a - b = \{x/x \in a \wedge x \notin b\}$$

6. La *inclusión de clases*:

$$a \subseteq b \leftrightarrow (\forall x)(x \in a \leftrightarrow x \in b)$$

7. La *clase unitaria*:

$$\{a\} = \{a/a = b \vee \sim Cb\}$$

8. La *clase par ordenado*:

$$\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}$$

9. *Clase Siguiente de otra*:

$$s(a) = a \cup \{a\}$$

10. La clase *par ordenado, o bien, díada*:

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

11. La clase *gran unión*:

$$Ua = \{x / (\exists y)(x \in y \wedge y \in a)\}$$

12. La clase *gran intersección*:

$$\cap a = \{x / (\forall y)(y \in a \rightarrow x \in y)\}$$

13. *Relación*:

$$\text{Re } lr \leftrightarrow (\forall x)(x \in r \rightarrow (\exists a, b)((a, b) = x))$$

14. *Dominio y contradominio de una relación*:

$$D_1 r = \{x / (\exists y) \wedge (x, y) \in r\} \quad D_2 r = \{y / (\exists x) \wedge (x, y) \in r\}$$

15. *Relación inversa de otra relación*:

$$r^{-1} = \{(b, a) / \text{Re } lr \wedge (a, b) \in r\}$$

16. *Función*:

$$\text{Fnr} \leftrightarrow \text{Re } lr \wedge (\forall a, b, c)((a, b) \in r \wedge (a, c) \in r \rightarrow b = c)$$

17. *Función Biyectiva*:

$$\text{Bif} \leftrightarrow \text{Fnf} \wedge (\forall a, b, c)((a, b) \in f \wedge (c, b) \in f \rightarrow a = c)$$

18. *Clases coordinables o equipotentes*:

$$a \sim b \leftrightarrow (\exists f)(\text{Bif} \wedge D_1 f = a \wedge D_2 f = b)$$

19. *Clase de menor o igual potencia que otra*:

$$a \leq b \leftrightarrow (\exists s)(s \subseteq b \wedge a \sim s)$$

20. *Clase de menor potencia que otra estrictamente*:

$$a < b \leftrightarrow (\exists s)(s \subseteq b \wedge \sim b \subseteq s \wedge a \sim s)$$

21. *Clase Infinita*:

$$\text{Infa} \leftrightarrow (\exists x)(x \subseteq a \wedge a \neq x \wedge a \sim x)$$

22. *Clase Finita*:

$$\text{Fina} \leftrightarrow \sim \text{Infa}$$

23. *Clase Inductiva*:

$$\text{Induca} \leftrightarrow \Phi \in a \wedge (\forall x)(x \in a \rightarrow s(x) \in a)$$

24. *Clase inclusiva*:

$$\text{Incla} \leftrightarrow (\forall x)(x \in a \rightarrow x \subseteq a)$$

25. *Clase e-conectada*:

$$\text{Coneca} \leftrightarrow (\forall x, y)(x \in a \wedge y \in a \rightarrow x \in y \vee y \in x \vee x \neq y)$$

26. *Clase ordinal (o número ordinal)*:

$$\text{Orda} \leftrightarrow \text{Incla} \wedge \text{Coneca}$$

De estas y otras definiciones se obtienen diversos resultados que conforman toda la Teoría de Conjuntos. Veamos algunos resultados inmediatos de la definición de unión, intersección e inclusión de clases.

**Teorema 2:**

Se verifican las siguientes propiedades para las clases unión e intersección:

a)  $a \cup a = a, \quad a \cap a = a$

b)  $a \cup b = b \cup a, \quad a \cap b = b \cap a$

c)  $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c, \quad a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$

d)  $a \cap (a \cup b) = a, \quad a \cup (a \cap b) = a$

e)  $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c), \quad a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$

En efecto:

Se prueban trivialmente.

**Teorema 3:**

Se verifican las siguientes propiedades para la clase universal y para la clase vacía:

- a)  $(\forall x)(x \notin \Phi)$
- b)  $(\forall x)(x \cup U = U)$
- c)  $(\forall x)(x \cap \Phi = \Phi)$
- d)  $(\forall x)(x \cup \Phi = x)$
- e)  $(\forall x)(x \cap U = x)$

En efecto:

Se prueban trivialmente.

**Teorema 4:**

Se verifican las siguientes propiedades para la inclusión de clases:

- a)  $(\forall a)(a \subseteq a)$
- b)  $(\forall a, b)(a \subseteq b \wedge b \subseteq a \rightarrow a = b)$
- c)  $(\forall a, b, c)(a \subseteq b \wedge b \subseteq c \rightarrow a \subseteq c)$
- d)  $(\forall a)(a \subseteq U)$
- e)  $(\forall a)(\Phi \subseteq a)$

En efecto:

Trivialmente.

5. El axioma del par no ordenado:

**Teorema 5:**

Se verifican las siguientes propiedades para los pares no ordenados:

- a)  $(\forall a, b)(Ca \rightarrow a \in \{a, b\})$
- b)  $(\forall a, b)(Cb \wedge Cc \rightarrow (\forall a)(a \in \{b, c\} \rightarrow a = b \vee a = c))$
- c)  $(\forall a)(\{a, a\} = \{a\})$
- d)  $(\forall a, b)(\{a, b\} = \{b, a\})$

En efecto:

Son triviales.

Está claro que si al menos uno de los dos elementos del par es una clase última, entonces el par también lo es, por el teorema 5 b):  $\{b\} = U \rightarrow \{a, b\} = \{a\} \cup U = U$

Pero, ¿y si los dos elementos del par son conjuntos, es un conjunto también el par?. Para ello necesitamos un tercer axioma. Es el axioma del par no ordenado: “el par formado por dos conjuntos es también un conjunto”

Axioma del par no ordenado:  $(\forall x, y)(Cx \wedge Cy \rightarrow C\{x, y\})$

La consecuencia inmediata de este axioma es el carácter de conjunto para la clase unitaria.

**Teorema 6:**

La clase unitaria  $\{a\}$  es un conjunto:  $C\{a\}$

En efecto:

$$(\forall a)(\{a\} = \{a, a\} \rightarrow C\{a, a\} \rightarrow C\{a\})$$

## 6. El axioma de regularidad:

El axioma de regularidad o restricción o, también, de buen fundamento, afirma que para cada clase no vacía, siempre hay al menos un elemento que no contiene otros elementos de la clase, esto es, que es disjunto con ella.

<b>Axioma de regularidad:</b> $(\forall a)(a \neq \mathbf{f} \rightarrow (\exists x)(x \in a \wedge x \cap a = \mathbf{f})$
---

## Teorema 7:

Se verifican las propiedades siguientes, como consecuencia del axioma de regularidad:

- a)  $(\forall a)(a \notin a)$   
 b)  $(\forall a, b)(\sim (a \in b \wedge b \in a))$

En efecto:

Aunque también son triviales, vamos a razonarlas desde el axioma de regularidad:

a) Aplicando el axioma de regularidad  $\rightarrow (\exists b \in \{a\}/\{a\} \cap b = \Phi) \wedge a$  único elemento de  $\{a\}$   $\otimes$   
 $\rightarrow \{a\} \cap a = \Phi$ , pero si fuera  $a \in a \rightarrow a \in \{a\} \cap a \rightarrow a \cap \{a\} \neq \Phi$ , luego  $\mathbf{I} a$ .

b)  
 $a \in b \wedge b \in a \rightarrow Ca \wedge Cb \rightarrow C\{a, b\} \rightarrow (a \in b \cap \{a, b\} \wedge b \in a \cap \{a, b\}) \wedge$   
 $\wedge (\forall x \in \{a, b\} \rightarrow x = a \vee x = b) \rightarrow ((\forall x)(x \in \{a, b\} \rightarrow x \cap \{a, b\} \neq \Phi) \rightarrow$   
 $\rightarrow \text{contradiccion\_con\_axioma\_regularidad} \rightarrow \sim (a \in b \wedge b \in a)$

Corolario al teorema 7:

La clase universal no es un conjunto:  $\sim CU$

En efecto: si fuera un conjunto, por definición de conjunto, sería:  $U \hat{I} U$ , pero según el teorema anterior, ha de ser  $U \check{I} U$ , luego  $U$  no es un conjunto:  $\sim CU$

## 7. El axioma de la gran unión:

## Teorema 8:

Se verifican las siguientes propiedades para la gran unión:

$$a) (\forall a, b)(a \in b \rightarrow a \in \cup b)$$

$$b) \cup \Phi = \Phi$$

$$c) \cup U = U$$

En efecto:

$$a) a \in b \rightarrow (\forall x)(x \in a \rightarrow x \in \cup b) \rightarrow a \subseteq \cup b$$

$$b) \cup \Phi = \{x / (\exists y)(x \in y \wedge y \in \Phi)\} \wedge (\forall y)(y \notin \Phi) \rightarrow \cup \Phi = \Phi$$

$$c) x \in \cup U \rightarrow Cx \rightarrow x \in U \rightarrow \cup U \subseteq U \rightarrow \cup U = U$$

La cuestión ahora es establecer si la gran unión es o no un conjunto. Para ello se necesita un quinto axioma. El axioma de la gran unión.

<b>Axioma de la gran unión:</b> $(\forall x)(Cx \rightarrow C \cup x)$
--

Una consecuencia inmediata de este axioma es que la unión de dos conjuntos es, también, un conjunto. Veámoslo mediante un teorema sencillo.

## Teorema 9:

La unión de dos conjuntos es también un conjunto:  $(\forall a, b)(Ca \wedge Cb \rightarrow C a \cup b)$

En efecto:

$$\cup \{a, b\} = \{x / (\exists y)(x \in y \wedge y \in \{a, b\})\} = \{x / x \in a \vee x \in b\} = a \cup b$$

$$Ca \wedge Cb \rightarrow C \{a, b\} \rightarrow C \cup \{a, b\} \rightarrow C a \cup b$$

**8. El axioma del conjunto vacío:****Teorema 10:**

La gran intersección de la clase vacía es la clase universal:  $\bigcap \Phi = U$

**En efecto:**

$$\bigcap \Phi = \{x / (\forall y)(y \in \Phi \rightarrow x \in y)\}; \quad (\forall x)(x \in \bigcap \Phi \rightarrow Cx \wedge (\forall y)(y \in \Phi \rightarrow y \in y)) \rightarrow \\ \rightarrow (\forall x)(x \in \bigcap \Phi \leftrightarrow Cx) \rightarrow \bigcap \Phi = U$$

**Axioma del conjunto vacío:  $C\Phi$**

**Teorema 11:**

La gran intersección de la clase universal es la clase vacía:  $\bigcap U = \Phi$

**En efecto:**

$$\text{Si } \bigcap U \neq \Phi \rightarrow \bigcap U = \{x / (\forall y)(y \in U \rightarrow x \in y)\} \wedge C\Phi \rightarrow \Phi \in U \rightarrow (\exists x)(x \in \Phi) \rightarrow \\ \rightarrow \Phi \text{ no vacío} \rightarrow \sim \bigcap U \neq \Phi \rightarrow \bigcap U = \Phi$$

**Teorema 12:**

- a)  $(\forall a)(Ca \rightarrow Cs(a))$
- b)  $(\forall a, b)(a \in b \rightarrow a \in s(b))$
- c)  $(\forall a, b)(Cb \wedge a \in s(b) \rightarrow a \in b \vee a = b)$
- d)  $(\forall a)(Ca \rightarrow a \in s(a))$

**En efecto:**

- a)  $(\forall a)(Ca \wedge C\{a\} \rightarrow Ca \cup \{a\} \rightarrow Cs(a))$
- b) *Trivial*
- c) *Trivial*
- d) *Trivial*

## 9. El axioma de sustitución:

Teorema 13:

$$(\forall r)(\text{Re } lr \leftrightarrow r \subseteq UxU)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \text{Re } lr \leftrightarrow & (\forall x)(x \in r \rightarrow (\exists a, b)((a, b) = x) \rightarrow x \in r \rightarrow Cx \rightarrow C(a, b) \rightarrow Ca \wedge Cb \rightarrow \\ & \rightarrow (a, b) \in U \rightarrow r \subseteq UxU \end{aligned}$$

Interesa saber si una subclase de un conjunto es, también, un conjunto, y si una función es realmente un conjunto. Para ello es necesario el axioma de sustitución.

**Axioma de sustitución:**  $(\forall f)(Fnf \wedge CD_1f \rightarrow CD_2f)$

Teorema 14:

- a)  $(\forall a, b)(Cb \wedge a \subseteq b \rightarrow Ca)$   
 b)  $(\forall f)(Fnf \wedge CD_1f \rightarrow Cf)$

En efecto:

a) Si  $x = \Phi \rightarrow x = \Phi \wedge C\Phi \rightarrow Cx$

Si  $x \neq \Phi \rightarrow (\exists a)(a \in x)$

Definimos :  $f = \{(m, n) / (m \in x \wedge m = n) \vee (m \in y - x \wedge n = a)\} \rightarrow Fnf \wedge$

$\wedge D_1f = x \cup (y - x) = y \wedge D_2f = x \cup \{a\} = x \rightarrow D_1f = y \wedge D_2f = x \rightarrow$

$\rightarrow D_1f = y \wedge D_2f = x \wedge Cy \wedge (CD_1f \rightarrow CD_2f) \rightarrow CD_2f \rightarrow Cx$

b) Definimos  $g = \{(a, b) / a \in D_1f \wedge b = (a, f(a))\} \rightarrow Fng \wedge (D_1g = D_1f) \wedge D_2g = f \rightarrow$   
 $\rightarrow Fng \wedge (D_1g = D_1f) \wedge (D_2g = f) \wedge CD_1g \wedge (CD_1g \rightarrow CD_2g) \rightarrow Cf$

## 10. El axioma de infinitud:

Sabemos que un conjunto inductivo es tal que contiene al conjunto vacío, y, para todo conjunto  $x$  que le pertenezca, le pertenece también el conjunto siguiente  $s(x)$ . La clase  $a$  de todos los conjuntos que son inductivos, sería:

$$a = \{x / \text{Induc}(x)\}$$

La cuestión que nos planteamos es si existe realmente algún conjunto inductivo, o, si por el contrario, la clase  $a$  de los conjuntos inductivos es vacía. Para resolver esto, formulamos un nuevo axioma, el axioma de infinitud, que nos garantiza la existencia de algún conjunto inductivo.

<b>Axioma de infinitud:</b> $(\exists x)(Cx \wedge \text{Induc}x)$
--

Esto quiere decir que existe al menos un conjunto inductivo de la clase  $a$ , por lo que se podría formar la gran intersección de los elementos de  $a$ .

## Teorema 15:

La clase  $\bigcap a$  existe, es un conjunto y es la clase inductiva mínima.

## En efecto:

- a)  $\bigcap a$  existe, por axioma de infinitud, ya que  $a$  es no vacía.  
 b)  $(\forall x)(x \in a \rightarrow \bigcap a \subseteq x) \rightarrow$  por teorema 14 a)  $\rightarrow C \bigcap a$   
 c) Veamos que  $\bigcap a$  es inductivo:  
 $(\forall y)(y \in a \rightarrow \Phi \in y) \rightarrow \Phi \in \bigcap a$   
 $x \in a \rightarrow (\forall y)(y \in a \rightarrow (x \in y \wedge s(x) \in y)) \rightarrow s(x) \in \bigcap a$   
 d)  $\bigcap a$  es mínimo entre los conjuntos inductivos, por ser su intersección.

Esto nos permite dar la siguiente definición, una de las más importantes en la construcción de la matemática como cuerpo de conocimiento.

## Definición 1:

Se llama *conjunto de los números naturales* al conjunto  $\mathbf{h} = \bigcap a$ , que, por el teorema anterior, es inductivo.

Se utiliza la nomenclatura siguiente:

$$0 \equiv \Phi, \quad 1 \equiv s(0) = \Phi \cup \{\Phi\}, \quad 2 \equiv s(1) = \Phi \cup \{\Phi\} \cup \{\Phi \cup \{\Phi\}\},$$

$$3 = s(2) = \Phi \cup \{\Phi\} \cup \{\Phi \cup \{\Phi\}\} \cup \{\Phi \cup \{\Phi\} \cup \{\Phi \cup \{\Phi\}\}\}, \dots \quad \dots$$

## Teorema 16: (de Peano)

- a)  $0 \in \mathbf{h}$   
 b)  $(\forall n)(n \in \mathbf{h} \rightarrow s(n) \in \mathbf{h})$   
 c)  $(S \subseteq \mathbf{h} \wedge 0 \in S \wedge (\forall n)(n \in S \rightarrow s(n) \in S)) \rightarrow S = \mathbf{h}$   
 d)  $(\forall n)(n \in \mathbf{h} \rightarrow s(n) \neq 0)$   
 e)  $(\forall m, n)(n \in \mathbf{h} \wedge m \in \mathbf{h} \wedge s(n) = s(m)) \rightarrow n = m$

## En efecto:

- a) Por teorema 15.  
 b) Por teorema 15.  
 c)  $C\mathbf{h} \wedge s \subseteq \mathbf{h} \rightarrow Cs$  (Por teorema 14 a).  
 $C\mathbf{h} \wedge \text{induc} \wedge s \subseteq \mathbf{h} \wedge \mathbf{h}$  inductivo mínimo  $\rightarrow s = \mathbf{h}$   
 d)  $(\forall n)(n \in n \cup \{n\} \rightarrow n \in s(n) \rightarrow s(n) \neq 0$   
 e) Bastará aplicar estos dos resultados:  
 - ningún número natural está contenido en alguno de sus elementos:  
 $(\forall n)(n \in \mathbf{h} \rightarrow \sim (\exists x)(x \in n \rightarrow n \subseteq x))$   
 - todo número natural es una clase inclusiva:  
 $(\forall n)(n \in \mathbf{h} \rightarrow \text{Incl } n)$

Se tiene:

$$\begin{aligned}
 & n \in \mathbf{h} \wedge m \in \mathbf{h} \rightarrow n \in n \cup \{n\} \wedge m \in m \cup \{m\} \rightarrow n \in s(n) \wedge m \in s(m) \rightarrow \\
 & \rightarrow n \in s(n) \wedge m \in s(m) \wedge s(n) = s(m) \rightarrow n \in s(m) \wedge m \in s(n) \rightarrow \\
 & \rightarrow n \in m \cup \{m\} \wedge m \in n \cup \{n\} \rightarrow (n = m \vee n \in m) \wedge (m = n \vee m \in n) \rightarrow \\
 & \rightarrow (n = m) \vee (n \in m \wedge m \in n) \\
 & \text{si } m \in n \wedge n \in m \rightarrow m \in n \wedge n \in m \wedge \text{Incl } \mathbf{h} \rightarrow m \subseteq n \wedge n \subseteq m \rightarrow \\
 & \rightarrow m \subseteq n \wedge n \subseteq m \wedge \sim s(n) \in m \wedge \sim s(m) \in n \rightarrow \sim \text{Induc } \mathbf{h} \rightarrow \text{absurdo} \rightarrow m = m
 \end{aligned}$$

## 11. El axioma de elección:

## Definición 2:

Se llama *clase ordinal* a la clase de los números ordinales:

$$\Theta = \{x / \text{Ord}x\} \equiv \{x / \text{Incl}x \wedge \text{Conex}x\}$$

## Teorema 17:

- a)  $\text{Ord}\Theta$
- b)  $\mathbf{h} \subseteq \Theta \wedge \mathbf{h} \in \Theta$
- c)  $\Phi \in \Theta$
- d)  $\sim C\Theta$

## En efecto:

Trivialmente.

El axioma de elección es uno de los enunciados más famosos, a la par que controvertidos, de toda la matemática. Representable en modos diversos, fue ya utilizado implícitamente por Cantor en la demostración de algunos de sus resultados.

Axioma de elección:  $(\forall y)(\exists f)(F_n f \wedge D_1 f = y \wedge (\forall x)(x \in y \wedge x \neq \mathbf{f} \rightarrow f(x) \in x)$

Otras formas de enunciarlo podrían ser, por ejemplo:

- *Para cada clase hay una función que elige o selecciona un elemento de esa clase.*
- *Todo conjunto es coordinable con algún número ordinal.*

Las controversias originadas por este axioma se deben, principalmente, a que garantiza la existencia de ciertas clases (las funciones de elección) sin establecer procedimiento alguno para su construcción. Es por esto que el axioma de elección fue investigado con gran interés, hasta que se pudo probar su consistencia en 1940 (Kurt Gödel), y su indecidibilidad en 1963 (Paul Cohen).

12. El axioma de las partes de un conjunto:

Se define la clase de las partes de un conjunto, o clase potencia de un conjunto, del modo siguiente:

$$P(a) = \{x / x \subseteq a\}$$

Axioma de las partes: $(\forall x)(Cx \rightarrow CP(x))$
---

Este axioma es necesario para probar algunos resultados básicos de la teoría de conjuntos, como son, por ejemplo, los teoremas:

$$(\forall a, b)(Ca \wedge a \leq b \wedge b \leq a \rightarrow a \sim b) \quad \text{(Bernstein)}$$

$$(\forall a)(Ca \rightarrow a < P(a)) \quad \text{(Cantor)}$$

**13. Bibliografía:**

- CARNAP, Rudolf. "Metalógica" ("Metalogik"). *Mathesis*, 11(2), 137-192, Mayo 1995.
- DE LONG, Howard. *A Profile of Mathematical Logic*. Reading: Addison-Wesley, 1970. (Cap. 4.)
- DE LORENZO, Iniciación a la teoría de conjuntos, Tecnos: Madrid, 1972.
- ENDERTON, *Elements of set Theory*, Academic Press: Nueva York, 1977.
- FIELD, Hartry. "Metalogic and Modality". *Philosophical Studies*, páginas 1-22, Abril de 1991.
- FRAENKEL, Abraham A., BAR-HILLEL, Yekoshua, LEVY, Azriel Yvan dalen, Dirk. *Foundations of set theory*. Segunda edición aumentada. North-Holland, 1973.
- HALMOS, Paul Richard. *Teoría intuitiva de los conjuntos*. 3ra edición. México: Editorial Continental; 1966. (Naive set theory, Princeton, New Jersey : D. Van Nostrand, 1960.)
- HOFSTADTER, Douglas R. *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*. Basic Books, 1979.
- LIPSCHUTZ, *Teoría y problemas de teoría de conjuntos y temas afines*, Mc Graw-Hill: México, 1985.
- QUINE, Willard van Orman. *Set theory and its logic*. Harvard U. Press, 1963 (revised edition 1969).
- SUPPES, Patrick. *Teoría axiomática de conjuntos*, Cali, Norma 1968. México: Centro Regional de Ayuda Técnica. (Axiomatic Set Theory. Revised Edition. Dover, 1972.)