Una estrategia didáctica en función de la resolución de una integral triple

Antonio Mazón Ávila
Madelén C Garófalo Novo

Introducción

Este trabajo surge por la necesidad de proporcionar en los estudiantes de la carrera de Mecánica de la Universidad de Pinar del Río, Cuba, las habilidades necesarias para resolver integrales triples. En este proceso está implícita la representación gráfica de un sólido.

A partir de un conjunto de tareas en forma de sistema las cuales están incluidas en la estrategia se proporcionan las habilidades básicas para la construcción y proyección del sólido, contribuyendo esto a la solución adecuada de un integral triple

<u>Desarrollo</u>

Fundamentos teóricos en los que se fundamenta la estrategia

Las integrales triples son muy importantes, pues son usadas para calcular de un cuerpo, el volumen y su masa, los momentos de 1er orden con respecto a los planos coordenados, los momentos de inercia con respecto a los ejes coordenados, las coordenadas de su centro de gravedad, así como para calcular el flujo que atraviesa la frontera del mismo

En el Plan de Estudio D elaborado por el Ministerio de Educación Superior de Cuba para la carrera de Ingeniería Mecánica en el curso regular diurno, la disciplina matemática contiene las asignaturas: Algebra Lineal y Geometría Analítica, Matemática I, Matemática II, Matemática III, Probabilidades y Estadística, además de un curso introductorio. En la primera se estudian las ecuaciones de las rectas, planos, cuádricas centradas y no centradas, así como la representación de curvas y sus proyecciones en los diferentes planos coordenados. En la misma no está concebida la construcción de sólidos, que se estudia en la Matemática II donde el profesor la retoma en el momento que se imparten las integrales triples. El tiempo empleado no es suficiente para que el alumno desarrolle habilidades en la construcción de sólidos.

A través del proceso de enseñanza de la Matemática II hemos constatado las dificultades que presentan los estudiantes para representar el sólido, lo cual influye de forma negativa en el proceso de solución de una integral triple.

A continuación, expondremos algunas características generales relacionadas con la formación de concepto, donde el concepto de integral triple está incluido en las mismas

El proceso de elaboración de un concepto consta de tres fases:

- La primera está caracterizada por consideraciones y ejercicios preparatorios que comienzan, a veces, mucho antes de la introducción del concepto.
  Mediante ellos los alumnos se familiarizan con fenómeno y formas de trabajo correspondientes, para más tarde poder relacionar inmediatamente con el concepto, las ideas adquiridas sobre el contenido. Los alumnos conocen parcialmente el concepto mucho antes de su tratamiento en la clase, porque se ha trabajado de forma implícita en la preparación del concepto.

- La segunda consiste en la formación del concepto. Se entiende por esto, a la parte del proceso que conduce desde la creación del nivel de partida, la motivación y la orientación hacia el objetivo, y que pasa por la separación de las características comunes y no comunes, hasta llegar a la definición o explicación del concepto.

- La tercera consiste en la asimilación del concepto, a ella pertenecen las ejercitaciones, profundizaciones, asimilaciones y las aplicaciones. En esta fase el alumno asimila el contenido del concepto, ante todo a través de acciones mentales y prácticas dirigidas hacia ese objetivo.

En nuestro trabajo están presentes las tres fases.

Definición de sólido: Es la porción del espacio limitado por una o más superficie.

Si el sólido está limitado por una sola superficie tal como la esfera o un elipsoide, el mismo puede representarse geométricamente por la construcción de dicha superficie. Si el sólido está limitado por más de dos superficies la construcción del mismo requiere de varios pasos, por ejemplo, sea el sólido dado por el conjunto

E = $\left\{(x, y, z) \in R^3 \colon 0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}\ ;\ x^2+y^2+z^2 \leq 4; x \leq y \leq \sqrt{3}x\right\}$

Los pasos para trazar este sólido son los siguientes:

1- El trazado de cada una de las superficies.
2- La determinación de las curvas de intersección de las superficies tomadas dos a dos.
3- Interpretación de las desigualdades:
   - $0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}$ (Puntos que se encuentran en la región que está sobre el plano x y, incluyendo al mismo y por fuera del semi- cono)
   - $x^2+y^2+z^2 \leq 4$ (Puntos que se encuentran en el interior y sobre la esfera)
   - $x \leq y \leq \sqrt{3}x$ (Puntos que se encuentran en la región comprendida entre los semiplanos)
4- El sólido está constituido por la intersección de cada uno de los conjuntos de puntos determinados por las desigualdades

El sólido está asociado a una integral triple, a continuación, veremos la definición del mismo

Definición

Sea f(x, y, z) acotada en $E \subset R^3$, E cerrado, acotado. Dividamos E en un número finito de regiones elementales $\Delta E_1, \Delta E_2, \ldots, \Delta E_n$ y en cada una de ellas elijamos un punto M_i (x_i, y_i, z_i) $\in \Delta E_i$, i =1, 2, 3, … , n ; a la suma

$$Sn = \sum_{i=0}^{n} f\left(x_{i}, y_{i}, z_{i}\right) \Delta E_i$$

donde ΔE_i , es el volumen de la i- ésima región, se le llama suma integral tridimensional y d es el diámetro mayor de las regiones ΔE_i (su dimensión lineal más grande)

Si cuando d $\rightarrow 0$, el límite existe y no depende de las formas de las regiones elementales, ni de la elección de los puntos M_i, entonces

$$\lim_{d \to 0} \sum_{i=0}^{n} f\left(x_{i}, y_{i}, z_{i}\right) \Delta E_i = \iiint_E f(x, y, z) dxdydz).$$

La función f(x, y, z) es integrable en E.

Teorema : Si f(x, y, z) es continua en E $\subset R^3$ cerrada y acotada, entonces es integrable en E

Para f(x, y, z) = 1,

$$V_E = \iiint_E dxdydz$$

Dos propiedades importantes de las integrales triples.

Si f (x, y, z) y G (x, y, z) son integrables en E, se cumple

Propiedad 1:

$$\iiint_E \left(\propto f(x,y,z) + Bg(x,y,z)\right) dxdydz = \propto \iiint_E f(x,y,z)dxdydz + B \iiint_E g(x,y,z)dxdydz$$

Propiedad 2:

$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{E_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint_{E_2} f(x,y,z)dxdydz \; ; \;\; si\ E = E_1 \cup E_2$$

Estas dos no tienen puntos interiores comunes

Superficies y curvas coordenadas.

Al igual que en las integrales dobles, las curvas coordenadas resultan un recurso muy valioso para determinar los límites de integración de una integral triple, sin embargo, para definir las curvas coordenadas en un sistema de coordenadas de R^3, es necesario definir primero las llamadas superficies coordenadas.

Las superficies coordenadas se obtienen igualando las variables del sistema a constantes, por ejemplo x = k_1, y = k_2 y z = k_3 constituyen planos paralelos a los planos coordenados y z , x z y x y respectivamente

Curvas coordenadas: son las curvas que resultan de la intersección de las superficies coordenadas, por ejemplo (x = k_1, y = k_2) es una z-curva, la cual constituye una recta paralela al eje z que se desplaza en el sentido positivo de z

(y = k_2, z = k_3) es una x-curva, la cual constituye una recta paralela al eje x que se desplaza en sentido positivo de x

(x = k_1, z = k_3) es una y-curva, la cual constituye una recta paralela al eje y que se desplaza en sentido positivo de y

Integrales iteradas o sucesivas

Al igual que en la integral doble, en integrales triples las integrales sucesivas constituyen el procedimiento para calcular su valor

En este caso se nos pueden presentar tres tipos distintos de regiones, cada una de ellas con su correspondiente integral sucesiva, de acuerdo con el orden de integración que se tome para las variables x, y, z. Los tres casos mencionados son los siguientes:

Consideremos una región E definida como:

E = $\{(x, y, z) \in R^3 : (x, y) \in D;\ z_1\ (x, y) \leq z_2\ (x, y)\}$ esta región es regular en dirección de z, porque para cualquiera z-curva los puntos de la misma varían de de z_1 a z_2 , siendo proy $_{XY}$ E =D , esta región está asociada a la integral sucesiva

$$\iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz$$

aquí se resuelve primero la integral interior, reduciéndose la integral triple a una doble, veamos la segunda región:

E = $\{(x, y, z) \in R^3 : (x, z) \in D;\ y_1\ (x, z) \leq\ y_2(x, z)\}$ esta región es regular en dirección de y, porque para cualquier y-curva los puntos de la misma varían de y_1 a y_2 , siendo proy $_{XZ}$ E = D , esta región está asociada a la integral sucesiva

$$\iint_D dxdz \int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x, y, z)dy$$

La tercera región es la siguiente: E= $\{(x, y, z) \in R^3:\ (y, z) \in D\ ;\ x_1\ (y, z) \leq x_2\ (y, z)\}$ esta región es regular en dirección de x, porque para cualquier x-curva los puntos de la misma varían de de x_1 a x_2 , siendo proy $_{yz}$ E= D, esta integral está asociada a la integral sucesiva

$$\iint_D dydzf(x, y, z)dx$$

Observe que en una integral triple la primera integración es de superficie a superficie, la segunda de curva a curva y la tercera de punto a punto, además si la región de integración no es regular en las direcciones de x, y , z, se puede descomponer la misma en regiones regulares para usar la propiedad 2 de las integrales triples

Todo lo explicado anteriormente se refiere a la integración triple en coordenadas cartesianas. Existen un conjunto de integrales triples cuyo cálculo en coordenadas cartesianas pude ser complicado, sin embargo, al transformarlas al sistema de coordenadas cilíndricas o al sistema de coordenadas esféricas, se pueden calcular de una forma muy simple, a partir de sus fórmulas de transformación respectivamente

En los tres sistemas de coordenadas, generalmente el alumno debe construir el sólido para plantear la integral sucesiva y posteriormente resolverla. Un gran porciento de los estudiantes no aprueba esta pregunta en el examen final de la asignatura, pues no posee las habilidades necesarias para la construcción del sólido.

Es por esta razón que elaboramos una estrategia didáctica con el objetivo de aplicarla en la Disciplina de Matemática para la Carrera de Mecánica en particular en el Curso Introductorio, la Matemática I y la matemática II con el objetivo que el alumno se apropie de la habilidad para representar el sólido

Una estrategia didáctica en función de la resolución de una integral triple

1-En la impartición del curso introductorio resolver sistemas de inecuaciones lineales y no lineales, por ejemplo: Representar gráficamente la solución del sistema(y $\geq o$,y $\leq 4 + x$, y $\geq 4 - x^2$, x≥ 0, x $\leq 4)$

La representación de esta región en el plano va preparando a los alumnos para trabajar en el espacio, pues aquí tiene que interpretar las desigualdades y determinar la intersección de todos los conjuntos de puntos dados por las desigualdades

2-Dado una región del plano con sus curvas fronteras escribir el sistema de inecuaciones que la representa

Aquí se invierte el problema, del gráfico se pasa a obtener las desigualdades lo que requiere de una interpretación por parte de los alumnos de las desigualdades

3-En la Matemática I en el contenido de funciones vectoriales de una variable, se propone a los estudiantes que representen gráficamente una curva en forma implícita y que la proyecten en los diferentes planos coordenados

Esto aproxima parcialmente a los alumnos a la proyección del sólido sobre los distintos planos coordenados

4-Dado la representación de una curva del espacio, escribir su ecuación en forma implícita

5-En la matemática II proponer ejercicios tales como: Determine y represente el gráfico del dominio de la funciones escalares de dos y tres variables siguientes:

f (x, y) = $\sqrt{x}$ - $\sqrt{-x+y+1}$ +$\sqrt{y} - \sqrt{1-y}$

$g(x, y, z) = (\sqrt{-x+y-z} + \sqrt{-y+4} + \sqrt{2-z}$ +$\sqrt{z}$ +$\sqrt{x}$)

h (x, y, z) =($\sqrt{1-z}$ + $\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}\ -z\right)}+\sqrt{4-x^2-y^2}$+$\sqrt[4]{z}$)

p (x, y, z)= ($\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}$ + $\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}y-x}$ + $\sqrt{x}$ + $\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}-z\right)}$ + $\sqrt{z}$)

En el caso de las funciones de tres variables el grafico es la representación de un sólido.

Es notorio destacar que en ningún libro de texto aparece la determinación de un dominio de una función que desencadene la representación de un sólido

6 – Determinar la proyección sobre los tres planos coordenados de los gráficos de los dominios de las funciones g(x, y, z), h(x, y, z) y p(x, y, z)

7- Dado la representación gráfica del dominio de una función de tres variables, escribirlo en forma analítica

Aquí se invierte el problema, del gráfico se pasa a obtener las desigualdades lo que requiere de una interpretación por parte de los alumnos

8-Determine y represente el gráfico del dominio de funciones vectoriales de varias variables, por ejemplo:

$\vec{f}$(x, y, z) = $\left(\sqrt{z}, \sqrt{\left(\frac{2-x}{2}-z\right)}, \sqrt{\left(-\frac{x^2}{4}+y\right)}, \sqrt{1-y}, \sqrt{x}\right)$

También aquí el dominio de la función vectorial constituye un sólido

9- Dado la integral doble $\int_{-6}^{2}dy\int_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y}f(x,y)dx$, determine la región del plano D asociada al mismo e invierta el orden de integración

En la función f (x, y) los estudiantes tienen que interpretar las desigualdades en el plano, lo cual los va preparando para interpretar las desigualdades en el espacio

10-La solución de los sistemas de inecuaciones lineales y no lineales, se evaluarán en clases y en el examen final del curso introductorio

11- Evaluar los problemas correspondientes a 3 y 4 en clases y en un trabajo extra case correspondiente a la matemática I

12- Evaluar en clases y en el trabajo extra clase 1 de la matemática II los problemas correspondientes a 5,6,7,8

13-Evaluar en clases y en el trabajo extra clase 2 el problema correspondiente a 9.

La evaluación del aprendizaje le permite al profesor indagar sobre el grado de aprendizaje y desarrollo de los estudiantes en su proceso de formación, así como la capacidad que poseen para aplicar los contenidos en la resolución de problemas. Le brindará información oportuna y confiable para descubrir aquellos elementos de su práctica, que interfieren en los procesos de enseñanza y aprendizaje, de tal manera que pueda reflexionar en torno a estos para mejorarlos y reorientarlos permanentemente.

Sin el uso de la estrategia didáctica los resultados alcanzados por los estudiantes eran pésimos, la cantidad de estudiantes aprobados en la pregunta de integrales triples en el examen final de la asignatura matemática II estaba en el rango del 30 al 40%

La estrategia se aplicó en los cursos 2014-2015 y 2015-2016, obteniéndose 60,3% y 65,7% de aprobados en la pregunta relacionada con las integrales triples

Conclusiones

- La aplicación de la estrategia didáctica contribuye a que los alumnos se apropien de la habilidad para la construcción del sólido, así como para efectuar su proyección en los diferentes planos coordenados, lo que constituye una condición necesaria para resolver una integral triple
- La construcción del sólido proporciona un medio de visualización, esto facilita una relación activa entre el mismo y los alumnos, lo cual permite que la enseñanza sea más significativa y duradera
- Esta estrategia puede ser aplicada en las diferentes carreras de ciencias técnicas

Bibliografía:

A Efimov y otros. 1981.Problemas Matemáticos Superiores.
B.P, Demidóvich. 1989. Análisis Matemático.
M. Krasnov y otros. Matemáticas Superiores para Ingenieros II.
Ya. S. Bugrov, S.M, Nikolski 1981.. Matemáticas Superiores.
Werner Jungk. 1989. Conferencias sobre Metodología de la enseñanza de Matemática 2, Primera parte.

Antonio Mazón Ávila
Master en ciencias de la Educación, Universidad de Pinar del Río, Cuba.
an@mat.upr.edu.cu

Madelén C. Garófalo Novo,
Máster en Matemática Avanzada para la Ingeniería.
madelen@upr.edu.cu