

Material didáctico de apoyo al trabajo del docente para el tratamiento del cálculo en los alumnos.

**Alberto Moreira Fontes
Yordanis Valdés Llanes**

Introducción.

Muchos han sido los esfuerzos de los docentes en función de resolver las insuficiencias que presentan los alumnos en la asignatura Matemática, sin embargo todavía no se ha logrado que aprendan todo lo que deben aprender.

Entre los elementos matemáticos que resultan más afectados tenemos los referidos a las habilidades del cálculo numérico, que por su reconocida importancia práctica debe constituir objeto de seguimiento en las diferentes educaciones. Como fruto del intercambio profesional con directivos del sector educacional, las comisiones de asignaturas y docentes llegamos a la conclusión de que se tienen identificados los principales problemas en el tema, las causas que lo determinan, pero necesitan mayor información acerca de cómo deben proceder para erradicarlas.

Con el objetivo de brindar marcados niveles de orientación, en ese sentido un grupo de profesores de matemática en coordinación con la comisión provincial de la asignatura matemática nos dimos a la tarea de elaborar un material docente que le permita a los docentes lograr mayor efectividad para la dirección del aprendizaje en el cálculo.

Desarrollo.

Como se conoce para enfrentar con éxito la enseñanza, hay que tener dominio de los contenidos que se enseñan. Por esa razón lo primero que debe garantizarse es que los docentes dominen todos los contenidos relativos al cálculo; para lo cual proponemos que es suficiente el dominio de las categorías e indicadores del núcleo conceptual **NÚMERO**. Ellas son:

CATEGORÍAS E INDICADORES DEL CÁLCULO.

A. Adición y sustracción.

1. Adicionar números naturales sin sobrepaso.
2. Adicionar números naturales con sobrepaso.
3. Sustracción de números naturales sin sobrepaso.
4. Sustracción de números naturales con sobrepaso.
5. Dominar la sustracción de números racionales como la operación inversa de la adición.
6. Dominio de $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ ó $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$.
7. Determinar el denominador común a dos fracciones.
8. Realización del procedimiento completo de la sustracción o adición de fracciones de diferentes denominadores.
9. Colocación de las expresiones.
10. Colocación de la coma.
11. Dominar el concepto de suma algebraica.
12. Dominio de que en la suma algebraica cuando los signos de los sumandos son iguales se suma.
13. Dominar que el signo de la suma algebraica cuando los signos son iguales es el mismo de los sumandos.
14. Dominar que en la suma algebraica cuando los signos son diferentes se resta.
15. Dominar que el signo de la suma cuando los signos son diferentes es el del mayor módulo.
16. Dominar que la suma de dos números racionales opuestos es cero.
17. Calcular la suma de números racionales con signos iguales.
18. Calcular la sustracción de números racionales con signo iguales.
19. Calcular la suma de números racionales con signos diferentes.
20. Calcular la sustracción de números racionales con signos diferentes.

B. Multiplicación.

1. Dominio del concepto de producto de dos números.
2. Dominio de los productos básicos.
3. Dominio del procedimiento escrito para el producto de dos números sin sobrepaso.
4. Dominio del procedimiento escrito para multiplicar dos números naturales con sobrepaso.
5. Dominio del concepto de número primo.
6. Dominio del concepto de MCM.
7. Dominio del procedimiento para determinar MCM.
8. Descomponer números en factores primos.
9. Dominio de la relación $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.
10. Dominio del trabajo con los lugares decimales.
11. Dominio de la relación que plantea que la coma en el producto de dos expresiones decimales se coloca adicionando los lugares decimales después de la coma de ambos números.
12. Multiplicar expresiones por potencias de 10.
13. Multiplicar expresiones decimales por números naturales.
14. Multiplicar una expresión decimal por una fracción.
15. Dominar el concepto de multiplicación números racionales.
16. Recíproco de un número racional.
17. El producto de dos números racionales con signo iguales es siempre positivo.
18. El producto de dos números racionales con signos diferentes es siempre negativo.
19. Calcular el producto de dos números racionales con signos diferentes.
20. Calcular el producto de dos números racionales con signos iguales.

C. División.

1. Dominio del concepto división de dos números.
2. Dominio del concepto cociente.
3. Dominio de la división como operación inversa de la multiplicación.
4. Procedimiento escrito para dividir dos números naturales.
5. Dominio de la división por potencias de 10.
6. Dominar el concepto de recíproco de una fracción.
7. Dominio de la relación $a/b: c/d = a/b. d/c$.
8. Calcular el cociente de dos números fraccionarios.
9. División de una expresión decimal por un número natural
10. División por la unidad seguida de ceros.
11. Multiplicar por la unidad seguida de ceros para correr la coma en la división de dos expresiones decimales.
12. Colocación de la coma en el cociente.
13. Calcular el cociente de dos expresiones decimales.
14. Dominar que el cociente de dos números racionales con signos iguales es siempre positivo.
15. Dominar que el cociente de dos números racionales con signos diferentes es siempre negativo.
16. Dominar propiedades de la multiplicación de números racionales.
17. Dominar la división como operación inversa de la multiplicación.
18. Dominar que el recíproco de un número racional conserva el signo del número.
19. Calcular el cociente de dos números racionales con signo iguales.
20. Calcular el cociente de dos números racionales con signos diferentes.
21. Dividir expresiones decimales por la unidad seguida de ceros.
22. Dividir números naturales por la unidad seguida de ceros.

D. Determinación de valores aproximados.

1. Dominio del concepto de expresión decimal finita.
2. Dominio del concepto de expresión decimal infinita periódica.
3. Dominio del concepto de expresión decimal infinita no periódica.
4. Dominio del concepto de cifras significativas.
5. Dominio de que a toda expresión decimal se le puede hacer corresponder una expresión decimal finita o infinita.
6. Dominio de que cuando se redondea un número lo que se obtiene es el valor aproximado del mismo.
7. Dominio de que cuando el valor aproximado se ha obtenido por redondeo de un valor exacto se dice que el mismo tiene todas sus cifras correctas.
8. Determinar cantidad de cifras significativas.
9. Escribir fracciones como expresión decimal con una cantidad de cifras significativas.
10. Expresar resultados con tantas cifras significativas como el dato que menor cantidad de cifras significativas tiene.
11. Realizar cálculos intermedios con una cifra más de la que debe tener el resultado.

E. Cálculo con potencias.

1. Dominar el concepto de potencia.
2. Dominar el concepto de exponente.
3. Dominar el concepto de base.
4. Calcular potencia de base 10.
5. Expresar como potencias de base 10.
6. Calcular potencia de un número natural con exponente natural.
7. Memorización los cuadrados de los números naturales de 1 al 15.
8. Dominio que la potencia de exponente cero es siempre 1.

9. Dominio de la relación $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$.

10. Dominio de que la potencia de base positiva es siempre positiva.
11. Dominio de que una potencia de base negativa es positiva si el exponente es par.
12. Dominio de que una potencia de base negativa si el exponente es impar.
13. Cálculo del producto de dos números racionales con signos iguales.
14. Dominio de la propiedad de la potencia de potencia.
15. Dominio de la propiedad del producto de potencias de igual base.
16. Dominio del cociente de potencias de igual base.
17. Cálculo de potencias utilizando tablas.
18. Cálculo de raíces utilizando tablas.
19. Dominar el concepto de notación científica.
20. Expresar múltiplos de 10 como potencias de base 10.
21. Expresar números, dados en notación decimal, en notación científica.
22. Expresar números, dados en notación científica, en notación decimal.

F. Operaciones combinadas.

1. Dominio del orden de las operaciones.
2. Cálculo combinado de adición y sustracción de números naturales.
 1. Calcular con la combinación de la multiplicación y la división con números naturales.
 2. Cálculo con la combinación de la multiplicación y la división de números naturales.
 3. Cálculo con la combinación de las cuatro operaciones trabajando con números naturales.
 4. Cálculo combinado de adición y sustracción de números fraccionarios.
 5. Calcular con la combinación de la multiplicación y la división con números fraccionarios.
 6. Cálculo con la combinación de las cuatro operaciones trabajando con números fraccionarios.
 7. Calcular con la combinación de la multiplicación y la división con números racionales.
 8. Cálculo con la combinación de la suma algebraica con la multiplicación y la división trabajando con números racionales.
 9. Orden de las operaciones incluyendo la potenciación.
 10. Cálculo combinado de adición y sustracción de potencias.
 11. Calcular con la combinación de la multiplicación y la división con potencias.
 12. Cálculo con la combinación de las cuatro operaciones trabajando con potencias.

El cálculo, como toda la materia de enseñanza de la matemática incluye el tratamiento de **CONCEPTOS**, de **PROCEDIMIENTOS** y de **RELACIONES**. Además del dominio de los contenidos que encierran los elementos declarados anteriormente, el docente debe saber cuáles son los elementos didácticos sobre los que se sustentan la **FIJACIÓN** de conceptos, procedimientos y relaciones. (Véase Metodología de la enseñanza de la Matemática. Tomo I Sergio Ballester y otros. Pág. 265, 303 y 356)

Ahora bien, ¿cómo debe procederse metodológicamente para el correcto tratamiento del cálculo?

- Primeramente debe tenerse un diagnóstico fino del desempeño del alumno sobre dos aspectos básicos:
¿Qué sabe?, es decir: ¿Cuáles conceptos, procedimientos y relaciones?
¿Cómo lo sabe?, o sea, ¿En qué etapa del proceso de formación de la acción está?
De esta manera el diagnóstico no se constituye en una mera tabla llena de datos sino que aspira al descubrimiento, análisis, interpretación y comprensión de

posibles causas que hacen que algunos alumnos no respondan a las influencias educativas de la manera prevista, mientras otros rebasan toda expectativa. Para reunir toda la información imprescindible se requiere emplear procedimientos de indagación e instrumentos que sean eficaces.

La dinámica del proceso de diagnóstico en la asignatura Matemática puede describirse a través de un conjunto de acciones encaminada a determinar de cada alumno entre otros aspectos: qué conoce, qué sabe hacer con lo que conoce, cómo aprende, cómo se comporta, qué metas tiene, cómo opina, cómo se relaciona con otros y cómo se autorregula.

Las acciones agrupadas convencionalmente en cuatro bloques (sin pretensiones de mencionarlas todas) son las siguientes:

- Acciones para conocer a cada alumno, saber cuáles afrontan dificultades en la asignatura y localizar los que tienen más aptitudes y talento para las matemáticas.
 - Acciones para analizar en detalle, cuantificar y clasificar las dificultades de aprendizaje, además de meditar sobre la naturaleza de las causas que las provocan.
 - Acciones para caracterizar el comportamiento general de cada alumno, determinar las barreras y potencialidades que tiene para alcanzar mejores resultados, precisar cómo su conducta, sus relaciones en el grupo y su estilo de aprendizaje deben ser modificados para eliminar las deficiencias detectadas.
 - Acciones para trazar con la participación activa de los alumnos un plan encaminado a aumentar el interés por el estudio de la Matemática y alcanzar mejores resultados en la asignatura, remitir a otros especialistas los casos que lo ameriten, tomar medidas que propicien la ayuda mutua y la atención del colectivo a cada uno de sus miembros.
- A partir del diagnóstico debe determinarse la estrategia de aprendizaje a seguir con el alumno. Para ello hay que tener en cuenta las direcciones que debe seguir en función de resolver los problemas:

- **Dirección paralela.**

Consiste en trabajar con el cálculo a la par de la marcha del programa de matemática.

Tiene dos variantes: El cálculo oral y el cálculo escrito.

- ❖ El cálculo oral debe tener implícito que el alumno opere con los conceptos fundamentales.

Ejemplo No.1. En la adición de fracciones comunes puede preguntarse: calcula $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, donde el alumno solo deba operar con el concepto de fracciones equivalentes ampliando la fracción $\frac{1}{2}$ a otra fracción que tenga igual denominador que $\frac{1}{4}$, es decir a la fracción $\frac{2}{4}$. De esta manera $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Claro está que para ello debe dominar la ampliación de fracciones a igual denominador y el procedimiento para adicionar fracciones con igual denominador, pero estas dos acciones se fijan con mucha facilidad.

También debe tenerse en cuenta el trabajo en los diferentes dominios numéricos.

Ejemplo No.2. En la sustracción de fracciones puede preguntarse: calcula $10 - \frac{1}{2}$, en este caso se procede de modo análogo al ejemplo anterior solo que debe dominar el concepto de número fraccionario para expresar un número natural como una fracción común con igual denominador que la segunda fracción. Es decir $10 = \frac{20}{2}$ por lo que $10 - \frac{1}{2} = \frac{19}{2}$.

Hay que buscar métodos que racionalicen las acciones en los cálculos orales de manera que el alumno pueda efectuarlos cómodamente con rapidez y precisión.

Ejemplo No.3. En la adición de números naturales sin sobrepaso, se puede preguntar: calcula $325 + 210$. Aquí la idea es descomponer los números en múltiplos de diez y adicionar los números convenientemente, o sea, $325 = 300 + 25$ y $210 = 200 + 10$, de donde calcular $325 + 210$ se reduce a adicionar $300 + 200$ con $25 + 10$, resultando por un lado 500 y por otro 35. Luego se tiene que: $325 + 210 = 535$.

- ❖ El cálculo escrito debe concebirse mediante la estructuración de sistemas de ejercicios en bloques graduándolos desde niveles inferiores hasta superiores de complejidad.

Lo esencial es que el alumno vaya pasando por todas las operaciones de cálculo de manera simple y posteriormente de forma combinada, presentando los números en sus diversas formas de representación según los dominios numéricos a los que pertenecen. La ventaja del cálculo escrito está en que a través del conjunto de acciones que el alumno describe en su hoja de trabajo pueden determinarse con facilidad las causas de los errores cometidos.

El cálculo escrito debe acompañarse de una dinámica de trabajo que posibilite establecer plazos de cumplimiento del desarrollo de las tareas. Es decir proponérselas a los alumnos como actividad independiente de manera que el pueda decir hasta dónde va a llegar en determinada fecha, prevista para evaluar su desempeño y que logre descifrar las dificultades que le quedan en esa parte.

Ejemplo No.4. Calcula y deja por escrito los cálculos auxiliares que realizaste.

Sugerencia: En la elaboración de los sistemas de ejercicios debe seguirse como lógica el desarrollo de habilidades en una operación, después pasar a otra operación y luego combinarlas.

- a) $5\ 323 + 262$
- c) $67,48 + 5,89$
- e) $6304 \cdot 21$
- g) $7380 : 90$
- i) $82 - 64 : 4^2 + 12,7$

- b) $2\ 405 - 538$
- d) $988,62 - 35,1$
- f) $26,8 \cdot 6,3$
- h) $9\ 625 : 7,7$

- **Dirección intradisciplinar.**

Consiste en aprovechar todas las relaciones del cálculo con cada una de las áreas de la matemática para desde la estructuración metodológica de la tarea contribuir a la fijación de los procedimientos del cálculo (planificar los impulsos que el profesor va a dar a los alumnos para potenciar el acercamiento a la zona de desarrollo próximo).

A todo lo largo del trabajo con las tres áreas restantes de la matemática escolar, a saber el Álgebra, la Geometría y el Análisis Matemático, existen muchos momentos donde puede tratarse el cálculo, incluso de forma directa.

En Álgebra.

Entre los elementos donde puede hacerse el trabajo al que nos referíamos anteriormente tenemos, entre otros:

- ❖ Cuando se calcula el valor numérico de una expresión algebraica.
- ❖ Cuando se efectúan las operaciones básicas de cálculo o se realizan transformaciones algebraicas con polinomios.
- ❖ Cuando se resuelven ecuaciones, inecuaciones o sistemas de ecuaciones.

Ejemplo No.5. Determine el valor numérico de $A = 3B^2: (2C - 0,25)$ para $B = 1/6$ y $C = 5/4$.

Aquí después de sustituir los valores de las variables que intervienen en la expresión algebraica el ejercicio se reduce a un cálculo propiamente dicho, donde el alumno integra todos los procedimientos del cálculo. La potencialidad que le brinda este tipo de ejercicio al docente es análoga a la del cálculo escrito.

Ejemplo No.6. Dadas las expresiones:

$$I = 12m^2 + 6m \quad H = m^2 - 20m - 300 \quad J = -26m - 11m^2$$

Prueba que $I - H + J = 300$

En este caso se pretende que pueda operarse con monomios como si se tratara de números. Al efectuar la reducción de términos semejantes el docente debe exigir la descripción de los procedimientos utilizados en el cálculo; de ahí que mediante este tipo de ejercicio se consolidan una vez más las habilidades del cálculo.

Ejemplo No.7. ¿Para qué valor de la variable x se satisface la siguiente igualdad?

$$2,3x - 1/10x + 0,10x = 2,3$$

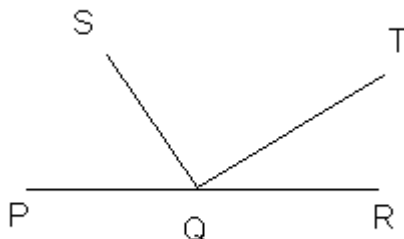
Cuando se resuelven ecuaciones se consolidan los procedimientos del cálculo en dos momentos: en el proceso de solución y en el de comprobación de la solución. Por tanto en ambos momentos debe prestarse especial atención al trabajo desarrollado por los alumnos en la realización de las operaciones de cálculo.

En Geometría.

Entre los elementos de esta área tenemos, entre otros:

- ❖ Cálculo de longitudes de segmentos.
- ❖ Cálculo de amplitudes de ángulos.
- ❖ Cálculo de perímetro y área de figuras planas.
- ❖ Cálculo de volumen de cuerpos.
- ❖ Conversión de magnitudes.

Ejemplo No.7. En la figura se tiene que $SQ \perp QT$ y $\angle TQR = 30^\circ$. Calcula la amplitud de $\angle PQS$.



Aunque el dominio de las propiedades de la planimetría es vital para encontrar la medida del ángulo que se pide, es importante reconocer que el modelo fundamental es el cálculo, ya que la idea de la solución es obtener el ángulo diferencia. Debe restarse:
 $180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Ejemplo No.8. El terreno de un organopónico tiene forma rectangular y dimensiones 73,40m de largo y 54,60m de ancho. Con el fin de cercar el terreno se dispone de una malla que viene en rollos y cada rollo, que contiene 100 m de ésta, cuesta \$17,95,¿Con 37 pesos alcanzará para cercar el terreno?.

En la resolución de este ejercicio independientemente del dominio del concepto de perímetro del rectángulo, lo fundamental está en la modelación mediante las operaciones de cálculo. Por eso es tan importante velar por las acciones que desarrollan los alumnos en la realización de los cálculos.

- **Dirección interdisciplinar.**
Consiste en aprovechar los momentos, en el trabajo de las diferentes asignaturas, donde se necesiten realizar cálculos y desde la estructuración metodológica de la tarea debe estimularse la fijación de los procedimientos del cálculo (planificar los impulsos que el profesor va a dar).

Conclusiones.

La enseñanza de la Matemática es tarea compleja pero sumamente importante, sobre todo en las actuales condiciones en que se consolidan las transformaciones de la enseñanza . Para que se pueda lograr el nivel de aprendizaje al que se aspira es vital la optimización del proceso docente.

Es válido señalar que lo que acabamos de presentar no es una receta para resolver los problemas que existan en el cálculo. Más bien es una propuesta de un posible camino que conduciría al logro de los objetivos proyectados para el cálculo numérico que no solo sirve para este, sino para enfrentar de la misma manera el tratamiento de otros contenidos de la asignatura que resulten también afectados.

Ratificamos nuestra convicción de que siempre que se conciben los sistemas de clases incluyendo actividades que respondan a las exigencias antes planteadas estaremos en condiciones de dar un salto cualitativamente superior en el aprendizaje del cálculo.

Dejamos abierto el debate para que estas y otras ideas se puedan enriquecer a partir de la práctica y la experiencia pedagógica de nuestros educadores. ¿Qué piensa usted?

Alberto Moreira Fontes

Lic. en Educación. Especialidad Matemática.
Universidad Pedagógica "Rafael María de Mendive". Cuba.

Yordanis Valdés Llanes

Lic. en Educación. Especialidad Matemática.
Universidad "Hermanos Saíz Montes de Oca". Cuba.

e.mail:

pcasta@mat.upr.edu.cu
amoreira@isprr.rimed.cu