Sobre la demostración por reducción al absurdo

Una variante que contribuye a potenciar el procedimiento de demostración por reducción al absurdo

Antonio Mazón Ávila
Antonio Miguel Mazón Fabelo
Beatriz Fabelo Rodríguez
Madelén Garófalo Novo

Introducción

El procedimiento demostración por reducción al absurdo es utilizado con poca frecuencia en las carreras de ingeniería. Específicamente en las conferencias, esporádicamente se realizan algunas, pues tienen mayor prioridad las demostraciones directas, este debe ser objeto de atención por el docente cada vez que se presenta. En las pocas ocasiones que se usa, generalmente el alumno desconoce, la estructura de este procedimiento y como todo procedimiento debe ser enseñado, teniendo en cuenta que su fundamento lo podemos encontrar en la Lógica formal. En el trabajo se define la estructura del procedimiento por reducción al absurdo y se determinan las características del procedimiento que proporciona una condición necesaria y suficiente para un concepto, así como de la refutación, los cuales están vinculados con este procedimiento, así como se establece una variante que permite potenciar el uso de este procedimiento de demostración en la Carrera de Mecánica de la Universidad de Pinar del Río, Cuba

.

Desarrollo

Fundamentos matemáticos y lógicos formales en que se sustenta la variante

Entre todas las ciencias la Matemática ocupa un lugar especial. Ella se define como una ciencia sobre las formas espaciales y relaciones cuantitativas del mundo real. El desarrollo de las Matemáticas, no es un proceso armonioso de desarrollo continuo y gradual de las verdades Matemáticas, en realidad transcurre en una lucha encarnizada de lo nuevo contra lo viejo.

En el transcurso del desarrollo de las Matemáticas, se consideran cada vez objetos más abstractos, incluidos en la clase de las relaciones cuantitativas y formas espaciales. En las teorías Matemáticas modernas, estas formas y relaciones frecuentemente se presentan de manera refinada y abstracta. Lo abstracto del objeto de la Matemática en ocasiones se percibe como elemento inicial e independiente de su contenido y constituye la propia esencia de las Matemáticas. En la época actual vemos como la Matemática penetra cada vez más rápido en casi todos los dominios sociales. La mayoría de la carreras requieren en mayor o menor medida de una formación Matemática, de ahí que el perfeccionamiento de su enseñanza cobre singular importancia. Hasta el siglo XVII la Matemática se limitaba al estudio de las magnitudes constantes y las dependencias fijas entre ellas. Cuando las demandas de la Astronomía y de la Mecánica plantearon el problema del reflejo matemático de procesos y del movimiento, comenzó a investigar las magnitudes variables. La magnitud variable de Descartes, señala Engels con relación a lo afirmado constituyo un punto de viraje en la Matemática, gracias a esta, el movimiento se introdujo en la Matemática y con él la Dialéctica y gracias a esta también resulto, inmediatamente necesario el Cálculo Diferencial e Integral. Es importante destacar que el pensamiento matemático transcurre de lo concreto a lo abstracto y en una cualidad mayor se eleva de lo abstracto a lo concreto y que la enseñanza de la Matemática debe contribuir a que el estudiante se desarrolle con una visión del mundo que le favorezca la formación del pensamiento productivo, creador y científico. El propio contenido de la Matemática como disciplina de estudio, los principios de su estructuración, la metodología de introducción de nuevos conceptos, teoremas y procedimientos son elementos que pueden y deben influir positivamente en este sentido. Sin embargo, el carácter material y el movimiento de la matemática, muy a menudo queda oculto para los estudiantes, los temas tratados en clases usualmente les parecen muy abstractos. Hay que hacer ver a los estudiantes, que la Matemática refleje cualidades del mundo exterior de manera específica, muy propio. Si por ejemplo la Física, la Química y la Biología estudian formas del movimiento de la materia en las que manifiesta la particularidad cualitativa del mundo objetivo, la matemática como habíamos planteado trata de relaciones cuantitativas inherentes de igual modo a toda forma de movimiento de la materia. La fuente del movimiento en la Matemática lo constituye la contradicción. En el artículo *"La huella de la Matemática en el pensamiento" de la Dra. Hernández, Herminia, 1993, Cuba,* establece que el pensamiento es posible moverlo al revelar la unidad de lo absoluto y lo relativo, la verdad está condicionada por su contenido. El considerar el carácter absoluto y relativo de un concepto, es significar su movimiento. En este caso, el carácter opuesto de los términos absoluto y relativo, permite reconocer que el movimiento tiene una naturaleza contradictoria. El revelar la contradicción propicia el movimiento del pensamiento. Cualquier objeto, no es más que un momento de un sistema integral. La comunidad de propiedades, el nexo genético, se expresan en lo general. El tener en cuenta la relación entre lo particular y general es otra forma de mover el pensamiento. El hecho histórico acompañado del análisis de las insuficiencias y las limitaciones de un concepto matemático en un determinado momento y su reemplazo por otro, que satisfaga esas limitaciones, es uno de los aspectos que contribuye a hacer dinámico el pensamiento.

La idea y la refutación (poner al estudiante en condiciones de buscar un contraejemplo que debilite una proposición, inducirlo a la búsqueda de una demostración que ratifique el valor de verdad de una proposición son elementos que favorecen la dinámica del pensamiento).

Exactitud de la fundamentación o formulación (el carácter científico de la enseñanza exige exactitud al expresar y fundamentar relaciones matemáticas). La palabra es la expresión verbal externa del contenido en el pensamiento. De ahí que una palabra inexacta es el reflejo de un pensamiento inexacto. La corrección oportuna no solo del profesor al estudiante, sino de un educando a otro entrena a estos en lo que respecta a la fundamentación o formulación, es otra forma de mover el pensamiento toda vez que se revelan las contradicciones a que conduce la inexactitud. Los aspectos a que hemos hecho referencia son necesarios: Si bien no suficientes, para estimular la huella gnoseológica y valorativa en el estudiante. El contenido de la Matemática está conformado por definiciones, conceptos, teoremas y procedimientos, también llamados componentes de la misma. Haremos a continuación un breve análisis de cada uno de ellos.

Concepto: Forma de pensamiento abstracto que refleja los indicios sustanciales de una clase de objetos homogéneos o de un objeto (Guetmanova, A. Y otros, 1991) son sustanciales los indicios que tomados por separado, son imprescindibles y todos juntos son suficientes para distinguir el concepto dado de los demás.

En cada concepto se pueden distinguir el contenido y la extensión, por contenido del concepto se entiende el conjunto de propiedades esenciales que determinan el mismo y extensión al conjunto de objetos que poseen esas propiedades esenciales. Para establecer los rasgos esenciales de un concepto es necesario comparar entre toda una serie de objetos. Dicha comparación mostrara que indicios son **necesarios** y **suficientes** para distinguir el objeto dado de los demás. En toda ciencia y en particular en la enseñanza de la Matemática es importante que los alumnos aprendan a distinguir propiedades necesarias, suficientes y necesarias y suficientes pues constituyen criterios que permiten reconocer si un objeto pertenece o no al concepto. Son necesarias las propiedades que pertenecen a todos los objetos que integran la extensión del concepto y también poseen otras que no están incluidas en la extensión (Orientaciones Metodológicas, duodécimo grado Matemática 1991, Cuba). Las condiciones necesarias son aquellas circunstancias en cuya ausencia no se presenta el fenómeno (García, L .E. 1995). Son propiedades suficientes las que solo poseen los objetos que pertenecen a la extensión del concepto (O. Metodológicas duodécimo grado Matemática 1991, Cuba). Suficientes son aquellas circunstancias en cuya presencia tiene que producirse el fenómeno (García Luis. E.1995).

Una propiedad es necesaria y suficiente cuando es común a todos los objetos que integran la extensión del concepto y solo a ellos.

Definición: Se llama definición a la operación lógica por medio de la cual concretamos los rasgos esenciales del concepto, y se le diferencia de todos los que son parecidos (orientaciones metodológicas duodécimo grado 1991, Matemática, Cuba).

Procedimiento Algorítmico en la matemática: Según Landa se entiende por ello una sucesión de indicaciones, exacta y determinada unívocamente para la realización de una serie de operaciones elementales (o de sistema de tales operaciones) para resolver ejercicios de una determinada clase o de un determinado tipo (Jungk Werner, 1979).

Proposición: Es todo enunciado verbal o escrito que tiene un valor de verdad, es decir que es necesariamente verdadero o falso.

Las proposiciones matemáticas verdaderas son axiomas o teoremas matemáticos. La verdad de un teorema debe comprobarse con una demostración. El fin de toda la demostración consiste en dilucidar lo que hay de verdad o de falsedad en una tesis. La que explica la veracidad de la tesis se llama demostración, la que pone de manifiesto la falsedad de una tesis se llama refutación. Refutar una tesis significa demostrar su falsedad.

Desde el punto vista lógico, la refutación es la demostración de que entre la proposición que se refuta y otras proposiciones de las que se sabe que son verdaderas, existe una relación de contrariedad o de contradicción. Esta tiene por fundamento la "Ley de la Lógica Formal de no contradicción" "Dos juicios en uno de los cuales se afirma algo acerca del objeto del pensamiento (A es B) mientras que en el otro se niega lo mismo acerca del objeto (A no es B) " no pueden ser a la vez verdaderos (siempre y cuando el carácter de B se afirme) o se niegue acerca del objeto del pensamiento A, considerado en el mismo tiempo y en una misma relación, desde este punto de vista refutar una proposición en matemática significa hallar proposiciones verdaderas que sean contrarias o contradictorias respecto a dicha proposición. Esta demostración es muy utilizada en la formación del ingeniero, llamada por contraejemplo.

En la matemática tiene un amplio uso las demostraciones directas pues la mayoría de los teoremas tienen la forma $p \Rightarrow q$, y para demostrarlos basta comprobar que de p (hipótesis) del teorema se deduce q (tesis del teorema).Estas demostraciones son las más usadas en las conferencias de las asignaturas de las diferentes disciplinas de matemática de las carreras de ciencias técnicas y con menor uso están las **indirectas.**

Se llaman demostraciones indirectas a las demostraciones en las cuales no se deduce directamente la tesis, sino que se prueba otra proposición relacionada con la misma.

En la matemática se distinguen dos formas de demostración indirecta:

- La demostración por el contrarrecíproco
- La demostración por reducción al absurdo

La demostración por el contrarrecíproco consiste en demostrar, en lugar del teorema, el contrarrecíproco, es decir, en lugar $p \Rightarrow q$, se demuestra $\sim q \Rightarrow \sim p$, estos constituyen una equivalencia lógica.

En nuestro trabajo vamos a potenciar la demostración por reducción al absurdo que presenta la siguiente estructura:

Dado el teorema $p \Rightarrow q$, proponer $\sim q$, (v) e incluirla en los fundamentos de p (a, b, c,…, $\sim q$). Si $\sim q$ es contradictorio con algunos de los fundamentos, por ejemplo con el **a**, entonces **a**, y $\sim q$ son dos proposiciones contradictorias que no pueden ser verdaderas a la vez, como **a** es v por ser un fundamento de la demostración $\sim q$, es f, por tanto q es v.

No es posible dar una regla fija que indique cuando conviene utilizar una demostración por reducción al absurdo, es útil tener presente la recomendación siguiente:

Cuando en un teorema se tienen pocas premisas, o de las premisas se deduce poca información, por lo general ayuda a aumentar el número de premisas la negación de la tesis.

Como todos los procedimientos, el procedimiento de demostración por reducción al absurdo tiene que ser enseñado, este procedimiento no está contemplado en los objetivos de los programas de las asignaturas de Matemática para la Enseñanza Media en Cuba, por lo cual es preciso que el profesor establezca su estructura de demostración con la ayuda de los alumnos y que utilice el mismo a través de las asignaturas de la disciplina de Matemática en la Carrera, con el objetivo que los alumnos se apropien de su esencia al culminar con los contenidos de la Disciplina de Matemática.

Mostremos algunos ejemplos donde utilizamos la demostración por el absurdo:

Teorema: Sea A un conjunto
Si $A \neq \emptyset \Rightarrow \emptyset \subset A$
Demostración
$\sim(\emptyset \subset A) = \emptyset \not\subset A$ es verdadero, si $\emptyset \not\subset A$ es por que existe al menos un x $\in \emptyset$ y $x \notin A$, pero x $\in \emptyset$ es una contradicción pues el conjunto ∅ no tiene elementos entonces

$\emptyset \not\subset A$ *es F* , por tanto $\emptyset \subset A$ es verdadero

Teorema
Si $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, n $\in N^*$ $\Rightarrow$ a_n es estrictamente creciente ($a_n < a_{n+1}$)
Demostración
Supongamos que a_n es estrictamente decreciente, es decir $a_n > a_{n+1}$, es decir es (v)
$(1 + \frac{1}{n})^n > (\frac{n+2}{n+1})^{n+1}$, ahora multiplicando los dos miembros por el término $(\frac{n}{n+1})^{n+1}$
se obtiene $\frac{n}{n+1} > (1 - \frac{1}{(n+1)^2})^{n+1} \geq \frac{n}{n+1}$
Usando las propiedades de las potencias y la desigualdad de Bernoulli ($(1+h)^n \geq 1 + nh$ $\forall n \in N;\ h > -1$) de donde se concluye que $\frac{n}{n+1} > \frac{n}{n+1}$
Contradicción, por tanto $a_n > a_{n+1}$ es f, por lo que $a_n < a_{n+1}$ es (v)

Teorema
$Si \lim_{x \to x_0} f(x)$ *existe, este es único*
Demostración
Supongamos que existen
$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ y
$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$ donde $l_1 \neq l_2$, si prefijamos un valor positivo de ε
Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ $\exists\, \delta_1$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{2}$
Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$ $\exists\, \delta_2$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ considerando
$\delta = min(\delta_1 ,\ \delta_2)$, entonces para aquellos valores de x que satisfagan las desigualdades
$0 < |x - x_0| < \delta$ se cumple simultáneamente las desigualdades
$|f(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|f(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ de aquí se deduce que $l_1 = l_2$, en efecto
$|l_1 - l_2| = |l_1 - f(x) + f(x) - l_2| \leq |l_1 - f(x)| + |f(x) - l_2| = |f(x) - l_1| + |f(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ de donde $|l_1 - l_2| < \varepsilon$. Por tanto como el número positivo ε se ha considerado arbitrario el número no negativo $|l_1 - l_2|$ es una cota inferior del conjunto de los números reales positivos, por lo que $|l_1 - l_2| = 0$, de donde $l_1 = l_2$ contradicción, el límite es único

Teorema
Si f(x) tiene un valor mínimo en c, entonces g(x) = -f(x) tiene un valor máximo en c;
es decir:
g(c) $> g(x)$ $\forall x$ *de la vecindad de c*
Demostración
$\sim$ (g(c) $> g(x)$) = g(c) $< g(x)$ e s v
Como f(x) tiene un valor mínimo en c se cumple que f(c) $< f(x)$ $\forall x \in$ *dominio de* $f(x)$
La desigualdad f(c) $< f(x)$ multiplicada por -1 se obtiene $-f(c) > -f(x)$
Ahora g(x) = -f(x)$< -f(c) = g(c)$ luego g(x) $< g(c)$ contradicción por lo que g(c) $< g(x)$ es f, por lo cual g(c) $> g(x)$

Teorema
Sean f(x) y g(x) integrables en $|a, b|$, con $a < b$ y $0 \leq f(x) \leq g(x)$ entonces si :
i) $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge, entonces $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge
ii) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge, entonces $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ diverge
Demostración de ii)
Supongamos que $\sim \int_a^{+\infty} g(x)dx$ diverge, es decir ($\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge), (v) entonces por i) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge lo cual es una Contradicción, de donde $\sim \int_a^{+\infty} g(x)dx$ diverge es (f), de donde $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *diverge* es (v)

Corolario
SI $\sum a_n$ converge y $\sum b_n$ diverge, entonces $\sum(a_n + b_n)$ diverge
Demostración
$\sim \sum(a_n + b_n)$ Diverge (v), es decir $\sum(a_n + b_n)$ converge (v). Puesto que $b_n = (a_n + b_n) - a_n$ y que $\sum((a_n + b_n) - a_n)$ converge por serlo $\sum(a_n + b_n)$ y $\sum -a_n$, luego $\sum b_n$

converge, lo que es una contradicción, de donde $\sim\sum(a_n + b_n)$ diverge es (f), lo cual prueba que $\sum(a_n + b_n)$ diverge es (v)

Fundamentos pedagógicos para la elaboración de la variante

La evaluación del aprendizaje le permite al profesor indagar sobre el grado de aprendizaje y desarrollo de los estudiantes en su proceso de formación, así como la capacidad que poseen para aplicar los contenidos en la resolución de problemas de la profesión. Le brindará información oportuna y confiable para descubrir aquellos elementos de su práctica que interfieren en los procesos de enseñanza y aprendizaje, de tal manera que pueda reflexionar en torno a estos para mejorarlos y reorientarlos permanentemente. La evaluación del aprendizaje se estructura de forma frecuente, parcial, final y de culminación de los estudios, en correspondencia con el grado de sistematización de los objetivos a lograr por los estudiantes en cada momento del proceso. Estas formas de conjunto, caracterizan a la evaluación como un sistema. La evaluación frecuente tiene como propósito fundamental comprobar el grado de cumplimiento de los objetivos específicos en la ejecución del proceso de enseñanza, mediante la valoración del trabajo de los estudiantes en todas las formas organizativas del proceso. Los tipos de evaluación frecuente a utilizar, por su gran versatilidad son: la observación del trabajo de los estudiantes, las preguntas orales y escritas, las discusiones grupales, entre otros. La evaluación parcial tiene como propósito fundamental comprobar el logro de los objetivos particulares de uno o varios temas. Los tipos fundamentales son:

1 La prueba parcial.
2 El trabajo extraclase.
3 El encuentro comprobatorio.
4 La evaluación final tiene como propósito fundamental comprobar el grado de cumplimiento de los objetivos generales de una asignatura o disciplina. Sus tipos fundamentales son los siguientes:
  - El examen final.
  - La defensa del trabajo de curso.
  - La evaluación final de la practica laboral

Para potenciar la demostración por el absurdo utilizaremos el Proceso de Enseñanza de la Disciplina de Matemática para la Carrera de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Pinar del Río, Cuba, la cual está conformada por un Curso Introductorio, Algebra Lineal y Geometría Analítica, Matemática II, Matemática III y Probabilidades y Estadística. En particular en el trabajo desarrollamos algunos ejemplos vinculados al Curso Introductorio, la Matemática I, y la matemática III.

Los estudiantes de la carrera de mecánica reciben un Curso Introductorio donde se activan contenidos esenciales de la enseñanza media superior fundamentales para la comprensión de los contenidos de la matemática I. En esta se imparte algunos elementos de la lógica, los cuales fundamentan la demostración por el absurdo.

Para potenciar el procedimiento de demostración por reducción al absurdo se propone la variante:

1 Establecer la estructura de la demostración por el absurdo en el Curso Introductorio con la ayuda de los estudiantes.

2 Incluir en las evaluación frecuente y final del Curso Introductorio demostraciones por el absurdo.

3 Seleccionar por temas en las diferentes asignaturas de la disciplina las demostraciones por el absurdo que el docente va a desarrollar en conferencias y clases practicas.

4 Incluir en los diferentes trabajos extra clases, correspondientes a los diferentes temas de la asignaturas un ejercicio que constituya una demostración por reducción al absurdo, cuya demostración debe ser defendida por el alumno ante el docente.

5 Está variante puede ser aplicada en las restantes disciplina de Matemática de las carreras de ciencias. Técnicas de Pinar del Rio, Cuba, así como en otras Universidades del País.

Los aspectos 3 y 4 deben realizarse en las restantes asignaturas de la Disciplina de Matemática para la carrera de Mecánica.

Conclusiones

Al potenciar la demostración por el absurdo a través del Proceso de Enseñanza de la Matemática I se logra:

1- Colocar al estudiante que piense en términos de elegir entre posiciones contradictorias, esto por supuesto favorece el movimiento del pensamiento.
2- Que el estudiante se apropie del procedimiento, que tiene un gran valor práctico para su vida profesional, pues le ofrece una nueva variante en la realización de una demostración
3- Esta variante para potenciar el procedimiento de demostración por el absurdo puede aplicarse en las demás Carreras de Ciencias Técnicas de la Universidad de Pinar del Rio, Cuba, así como de otras universidades

Bibliografia

- Andreiev,I. Problemas Lógicos del Conocimiento Científico. Editorial Progreso 1984
- García, Luis E.. Lógica y pensamiento crítico universal de Caldas, 1995
- Guetmanova, A. Lógica. Editorial Progreso. 1989
- Hernández, A. Diagnostico y desarrollo del procedimiento deducción. Tesis para optar por el grado de Doctora en Ciencias Pedagógicas. 1992
- Hernández, H. Didáctica de la Matemática. Artículos para el debate. 1993 del ISPJAE
- ISPJAE, II Taller Internacional sobre la enseñanza de la Matemática para ingeniería y arquitectura, 1998.
- Jungk, Werner. Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática (2) Primera Parte. Editorial de Libros para la educación. Ministerio de Educación. La Habana,

1979.
- Kopnin, P. V. Lógica Dialéctica. Ciencias Económicas y Sociales. Orientaciones metodológicas duodécimo grado, 1991. Matemática.
- Petrovski, A., 1985. Psicología Evolutiva y Pedagógica. Editorial Progreso. Moscú. 1985.
- Salmina, N.G. La actividad cognoscitiva de los alumnos y modos de construir la asignatura. Traducción CEPES; 1988.
- Sanz, T. Estudio de los procedimientos lógicos de identificación y clasificación. Tesis para optar por el grado de Doctora en Ciencias Pedagógicas. 1989

Antonio Mazón Ávila
Máster en Ciencias de La Educación, Universidad de Pinar del Río, Cuba
an@upr.edu.cu
Antonio Miguel Mazón Fabelo
Ingeniero Industrial y Prof. de Matemática de La Universidad de Pinar del Río, Cuba
amiguel@upr.edu.cu
Beatriz Fabelo Rodríguez
Máster en Ciencias de la Educación, profesora adjunta a la Universidad de Pinar del río, Cuba
Madelén Garófalo Novo
Master en Matemática Aplicada, Universidad de Pinar del Río, Cuba