BREVIARIO DE TEORÍAS KALUZA-KLEIN

(KALUZA-KLEIN Theories Breviary)

Adunador: **ALBERTO MEJÍAS***

Universidad de los Andes, Núcleo-Táchira

Departamento de Ciencias

Estoy convencido de que la interpretación matemática pura permite descubrir los conceptos y las leyes que los relacionan, y eso nos da la clave para comprender la naturaleza... En cierto sentido, pues, yo creo que el pensamiento puro puede captar la realidad, como soñaban los antiguos.

ALBERT EINSTEIN, 1936.

Resumen. Se discuten brevemente los orígenes de la teoría KALUZA-KLEIN. En primer lugar, se describe la "condición cilíndrica" original, de KALUZA y de cómo esto permite la unificación de la gravedad de EINSTEIN y el electromagnetismo en un marco de cinco dimensiones. Luego se discuten posibles justificaciones de la condición cilíndrica, con un especial énfasis en el método KLEIN de compactación.

Descriptores. Relatividad General, Gravedad, Unificación, Supergravedad, Teorías Cordales, Teorías Branales, Cosmologías de Dimensiones Superiores.

Abstract. The origins of KALUZA-KLEIN theory are briefly discussed. First, KALUZA's original "cylinder condition" and how this allows for the unification of EINSTEIN gravity and electromagnetism in a five-dimensional framework is described. Then possible justifications of the cylinder condition, with a special emphasis on KLEIN's compactification approach are discussed.

Keywords. General Relativity, Gravity, Unification, Supergravity, String Theories, Branes Theories, Higher-dimensional Cosmologies.

1 INTRODUCCIÓN

Ya en 1914, los físicos soñaban con una unificación geométrica de las fuerzas fundamentales de la naturaleza. Inspirado por el tratamiento de MINKOWSKI de las ecuaciones MAXWELL, en Relatividad Especial [1], GUNNAR NORDSTRÖM había unificado electromagnetismo y gravedad newtonana introduciendo un tensor energía-ímpetu simétrico, en el espacio MINKOWSKI de cinco dimensiones [2, 3]. Puesto que la idea de NORDSTRÖM se basa en la gravedad newtonana, no es particularmente relevante hoy. Pero, dado que NORDSTRÖM publicó su idea antes del descubrimiento de la relatividad general, representa un enfoque geométrico notablemente visionario de la física fundamental.

---

* ALBERTO R. MEJÍAS E. es Licenciado en Matemáticas, egresado de la Facultad de Ciencias de la Universidad de los Andes (ULA) Mérida-Venezuela. Es profesor emérito de Topología, jubilado por la Universidad de los Andes en 1999. alrame59@gmail.com

Sólo siete años después del descubrimiento de la Relatividad General, THEODOR KALUZA descubrió que el tensor métrico del espaciotiempo alabeado, de cinco dimensiones, puede considerarse como la métrica del espaciotiempo tetradimensional acoplada al potencial vectorial electromagnético y a un campo escalar [2, 4]. Él envió su idea a EINSTEIN, quien le animó a publicar [2] y, posteriormente, amplió, la idea de KALUZA [2, 5].

La Teoría KALUZA-KLEIN debe la otra mitad de su nombre a OSCAR KLEIN. Como veremos en Sección 2, la teoría de KALUZA impone una condición, más bien arbitraria —que él llamó la "condición cilíndrica"— en la geometría. En un innovador intento de quantizar la carga eléctrica, KLEIN sugirió una explicación para esta condición, donde la adicional quinta dimensión es periódica y muy pequeña. Ver Sección 3 para más detalles. Las ideas de KALUZA y KLEIN han inspirado una gran cantidad de esquemas de unificación de mayores dimensiones, desde Supergravedad y Teorías Cordales [2, 6, 7] hasta Teorías de Branas y Cosmologías de Dimensiones Superiores [8, 9].

En este trabajo se discuten las ideas iniciales de KALUZA, en Sección 2 y la extensión, por KLEIN, de la teoría, en Sección 3. El método KLEIN no es la única manera, físicamente atractiva, para el estudio de la condición cilíndrica y discutimos brevemente, otros enfoques también en esa sección. Por último, en Sección 4, ofrecemos algunas observaciones finales.

2 EL ESPACIOTIEMPO PENTADIMENSIONAL, DE KALUZA

Ahora presentamos la idea original de KALUZA, con la arbitraria "condición cilíndrica". Aunque originalmente, KALUZA utiliza notación tensorial de EINSTEIN [4], THIRY [10], demuestra que el lenguaje de formas diferenciales se ajusta mejor a la tarea; así que vamos a usar esa notación. Hemos tomado la configuración de EINSTEIN y BERGMANN [5] y luego seguimos libremente, a POPE [6], pero con más detalle.

2.1 Construcción General

Sean $\mathcal{M}^{(5)}$ una variedad lorentzana, (4 + 1)-dimensional y

$$\hat{x} = x^A \partial_A \tag{1}$$

un sistema de coordenadas generales sobre $\mathcal{M}^{(5)}$.[1] Sin pérdida de generalidad, elegimos a ∂x_0 como un elemento básico de una dirección tempoide, a ∂_i como tres

[1] En este trabajo, los índices griegos se sumarán de cero a tres y los índices latinos mayúsculos, de cero a cuatro.

coordenadas espaciales y a ∂_4 como la cuarta coordenada espacial, que describirá a la quinta dimensión adicional. Por convenio, elegimos que las direcciones tempoides tengan norma de cuadrado negativo y que las direcciones espacioides tengan norma de cuadrado positivo. Denotaremos a la métrica pentadimensional por $\hat{g}_{AB}$.[2]

2.1.1 La Condición Cilíndrica

En este punto, no hay diferencias geométricas entre cualesquiera de las coordenadas espacioides; ∂_i con $i \in \{1, 2, 3\}$ y ∂_4 son indistinguibles. Sin embargo, la condición cilíndrica, de KALUZA, las hará diferentes, como se indica a continuación. KALUZA impone que la métrica pentadimensional sea independiente de x^4 [4, 2, 7]. En otras palabras, las derivadas de la métrica con respecto a la quinta coordenada se deben anular:

$$\partial_4 \hat{g}_{AB} = 0. \tag{2}$$

Esta es una declaración acerca de la simetría. La condición cilíndrica exige que el espaciotiempo tenga una isometría específica,

$$x^4 \to x^4 + \varepsilon, \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Además, impone una parametrización específica donde ∂_4 es el vector KILLING asociado a nuestra isometría. Los matemáticos denominan "CLAIRAUT" [11], a las parametrizaciones de este tipo y no se garantiza la existencia de una parametrización CLAIRAUT. Aquí se está requiriendo que exista, por lo menos un campo vectorial KILLING espacioide, en este espaciotiempo y, puesto que la mayoría de espaciotiempos carecen de *algunas* isometrías, esta condición es bastante restrictiva.
Sin embargo, esta parametrización CLAIRAUT nos permite definir tensores sobre $\mathcal{M}^{(4)}$. Podemos foliar nuestro espaciotiempo por hipersuperficies espacioides, cada una ortogonal al campo vectorial KILLING ∂_5, de modo que estas hipersuperficies estén relacionadas por una isometría global. Denotaremos por $\mathcal{M}^{(4)}$a cualquiera de dichas hipersuperficies. Esta foliación nos permite escribir la topología de $\mathcal{M}^{(5)}$:

$$\mathcal{M}^{(5)} = \mathcal{M}^{(4)} \times \mathcal{M}^{(1)}, \tag{4}$$

---

[2] Más tarde, definiremos tensores sobre subvariedades tetradimensionales, de $\mathcal{M}^{(5)}$. Los tensores pentadimensionales se indicarán con cofias (acentos circunflejos) sobre ellos y los tensores tetradimensionales, sin cofias.

donde $\mathcal{M}^{(1)}$ es una variedad euclidiana unidimensional [5]. La elección de la hipersuperficie en una foliación determinada, es arbitraria, puesto que la pentamétrica será idéntica sobre cada una.

2.1.2 La Métrica

Queremos escoger una parametrización geométricamente natural y escribir una métrica. Antes de hacer eso, sin embargo, vamos a definir algunas cantidades que vamos a utilizar para construir nuestro elemento de línea. En primer lugar, sea $g_{\mu\nu}$ la métrica tetradimensional sobre una hipersuperficie dada. Sean $\mathcal{A}_\mu$ un campo tetracovectorial y ϕ un campo escalar sobre $\mathcal{M}^{(4)}$.

Aunque no tienen propiedades tensoriales en el espaciotiempo general, de cinco dimensiones, ciertamente podemos extender estas cantidades y definirlas sobre $\mathcal{M}^{(4)}$. Sin embargo, hay que imponer que

$$\partial_4 \mathcal{A}_\mu = 0, \qquad \partial_4 g_{\mu\nu} = 0 \qquad \text{y} \qquad \partial_4 \phi = 0. \tag{5}$$

Aunque estas denotaciones son sugestivas —$\mathcal{A}_\mu$ sugiere a un potencial vectorial y ϕ sugiere a un campo escalar, no contienen en la actualidad, ninguna información física. Sólo toman significado físico, una vez que se establezca una métrica y se estudie la geometría del espacio.

Y ahora haremos eso. Podemos elegir una parametrización del espacio para que el elemento de línea pentadimensional tome la forma

$$d\hat{s}^2 = e^{2\alpha\phi} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e^{2\beta\phi}(dx^4 + \mathcal{A}_\mu dx^\mu)^2, \tag{6}$$

donde α y β son constantes arbitrarias [6]. Esto significa que los componentes del tensor métrico pentadimensional $\hat{g}_{AB}$, toman la forma

$$\hat{g}_{\mu\nu} = e^{2\alpha\phi} g_{\mu\nu} + e^{2\beta\phi}\mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu, \ \hat{g}_{\mu 4} = e^{2\beta\phi}\mathcal{A}_\mu \quad \text{y} \quad \hat{g}_{44} = e^{2\beta\phi}. \tag{7}$$

Mientras sea $\beta \neq 0$, esta métrica corresponde a una parametrización CLAIRAUT, válida, del espacio. Aunque esta métrica parece un poco chusca, la razón de hacer esta elección se hará clara, pronto.
Para facilitar los cálculos restantes, transitemos a una descripción libre de coordenadas. Sea e^a una base tetrádica de una de las hipersuperficies $\mathcal{M}^{(4)}$, tal que

$$\eta_{ab} = e_a^\mu e_b^\nu g_{\mu\nu} \ \forall \ a, b \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Ahora queremos escribir una base pentádica para el espaciotiempo pentadimensional, que satisfaga

$$\hat{\eta}_{ab} = \hat{e}_a^A \hat{e}_b^B \hat{g}_{AB} \ \forall\ a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Gracias a nuestra elección adecuada, de coordenadas, podemos ver por inspección[3] que

$$\hat{e}^a = e^{\alpha\phi} e^a \text{ and } \hat{e}^z = e^{\beta\phi}(dx^4 + \mathcal{A}_\mu dx^\mu) \tag{8}$$

funcionará. ¡Cuidado con el abuso de notación! e^a es un elemento de una base tetrádica; pero, $e^{\alpha\phi}$ y $e^{\beta\phi}$ son potencias de la constante EULER. En concordancia con POPE, se indican los elementos de la base libre de coordenadas, por índices latinos minúsculos. Se reserva a z minúscula para el elemento de base que apunta en la dirección asociada con la condición cilíndrica [6]. Asumimos que los índices latinos minúsculos van de cero a tres. Si no es así, se indicará el rango.

Para calcular la curvatura del espacio, pasamos a las ecuaciones estructurales CARTAN [12],

$$\begin{aligned} \hat{T}^a &= d\hat{e}^a + \hat{\omega}^a{}_b \wedge \hat{e}^b, \ a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \\ \hat{R}^a_{\ b} &= d\hat{\omega}^a{}_b + \hat{\omega}^a{}_c \wedge \omega^c{}_b + \hat{\omega}^a{}_z \wedge \hat{e}^z, \ a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \end{aligned}$$

donde $\hat{T}^a$, $\hat{R}^a_{\ b}$ y $\hat{\omega}^a_{\ b}$ son las pentadimensionales 2-forma de torsión, 2-forma de curvatura y conexiones espinales, respectivamente. Puesto que nuestro espacio-tiempo es libre de torsión, las ecuaciones estructurales se reducen a

$$0 = d\hat{e}^a + \hat{\omega}^a{}_b \wedge \hat{e}^b + \hat{\omega}^a{}_z \wedge \hat{e}^z \tag{9}$$

$$0 = d\hat{e}^z + \hat{\omega}^z{}_b \wedge \hat{e}^b + \hat{\omega}^z{}_z \wedge \hat{e}^z \tag{10}$$

$$\hat{R}^a{}_b = d\hat{\omega}^a{}_b + \hat{\omega}^a{}_c \wedge \omega^c{}_b + \hat{\omega}^a{}_z \wedge \hat{e}^z \tag{11}$$

$$\hat{R}^a{}_z = d\hat{\omega}^a{}_z + \hat{\omega}^a{}_c \wedge \hat{\omega}^c{}_z + \hat{\omega}^a{}_z \wedge \hat{e}^z \tag{12}$$

$$\hat{R}^z{}_z = d\hat{\omega}^z{}_z + \hat{\omega}^z{}_c \wedge \hat{\omega}^c{}_z + \hat{\omega}^z{}_z \wedge \hat{e}^z \tag{13}$$

con nuestros convenios relativos a los índices, habituales. Necesitaremos la siguiente 1-forma,

$$d\phi = \partial_A \phi dx^A = \partial_\mu \phi dx^\mu. \tag{14}$$

Usamos (9) y (10) para calcular la conexión espinal.

[3] Una ventaja de trabajar con una base libre de coordenadas, es que muchas cantidades pueden, calcularse "por inspección".

$$\begin{aligned} d\hat{e}^a &= d\left(e^{\alpha\phi}e^a\right) \\ &= de^{\alpha\phi}\wedge e^a + e^{\alpha\phi}de^b \\ &= \alpha e^{\alpha\phi}d\phi\wedge e^a - e^{\alpha\phi}\omega^a{}_b\wedge e^b \\ &= \alpha e^{a\phi}\partial_\mu\phi(dx^\mu\wedge e^a) - e^{a\phi}\omega^a{}_b\wedge e^b, \end{aligned}$$

Pero, por (9),

$$\begin{aligned} d\hat{e}^a &= -\hat{\omega}^a{}_b\wedge\hat{e}^b + \hat{\omega}^a{}_z\wedge\hat{e}^z \\ &= -e^{\alpha\phi}\hat{\omega}^a{}_b\wedge e^b - e^{\beta\phi}\hat{\omega}^a{}_z\wedge(dx^4+\mathcal{A}) \end{aligned}$$

también. Así que

$$\alpha e^{a\phi}\partial_\mu\phi(dx^\mu\wedge e^a) - e^{a\phi}\omega^a{}_b\wedge e^b = -e^{\alpha\phi}\hat{\omega}^a{}_b\wedge e^b - e^{\beta\phi}\hat{\omega}^a{}_z\wedge(dx^4+\mathcal{A}). \tag{15}$$

Si identificamos como términos,

$$\hat{\omega}^a{}_b\wedge e^b = \omega^a{}_b\wedge e^b, \tag{16}$$

y

$$\alpha e^{\alpha\phi}\partial_\mu(e^a\wedge dx^\mu) = e^{\beta\phi}\hat{\omega}^a{}_z\wedge(dx^4+\mathcal{A}). \tag{17}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} d\hat{e}^z &= d\left[e^{\beta\phi}(dx^4+\mathcal{A})\right] \\ &= \beta e^{\beta\phi}d\phi\wedge(dx^4+\mathcal{A}) + e^{\beta\phi}d^2x^4 + e^{\beta\phi}d\mathcal{A} \\ &= \beta e^{\beta\phi}\partial_\mu\phi dx^\mu\wedge(dx^4+\mathcal{A}) + e^{\beta\phi}\mathcal{F}, \end{aligned} \tag{18}$$

donde $\mathcal{F} = d\mathcal{A}$. El término d^2x^4 desaparece porque $d^2\Phi = 0$ para cada forma diferencial Φ, (x^4 es una 0-forma). De (10),

$$\begin{aligned} d\hat{e}^z &= -\hat{\omega}^z{}_b\wedge\hat{e}^b + \hat{\omega}^z{}_z\hat{e}^z \\ &= -e^{\alpha\phi}\hat{\omega}^z{}_b\wedge e^b + \hat{\omega}^z{}_z\hat{e}^z. \end{aligned}$$

Así,

$$-e^{\alpha\phi}\hat{\omega}^z{}_b\wedge e^b = \beta e^{\beta\phi}\partial_\mu\phi dx^\mu\wedge(dx^4+\mathcal{A}) + e^{\beta\phi}\mathcal{F}. \tag{19}$$

Si revisamos a (19) y re-absorbemos algunos de los factores de escala, en e^z, podemos inferir que

$$\hat{\omega}^{az} = -\hat{\omega}^{za} = -\beta e^{-\alpha\phi}\partial^a\phi\hat{e}^z - \frac{1}{2}\mathcal{F}^a{}_b e^{(\beta-2\alpha)\phi}\hat{e}^b, \tag{20}$$

y

$$\hat{\omega}^{zz} = 0. \tag{21}$$

donde $\partial_a = e_a^{\mu}\partial_\mu$ es la derivada parcial transcrita a una base libre de coordenadas con la ayuda de la pentada (fünfbeins) inversa sobre $\mathcal{M}^{(4)}$, e_a^{μ}. Del mismo modo, $\mathcal{F}_{ab}$ denota a los componentes de $\mathcal{F}$ en la base libre de coordenadas [6]. Si introducimos este resultado en (16), se tiene

$$\hat{\omega}^{ab} = \omega^{ab} + \alpha e^{-\alpha\phi}(\partial^b\phi\hat{e}^a - \partial^a\phi\hat{e}^b) - \frac{1}{2}\mathcal{F}^{ab}e^{(\beta-2\alpha)\phi}\hat{e}^z. \tag{22}$$

Ahora resulta relativamente, sencillo calcular la 2-forma de curvatura. Por ejemplo, de (13),

$$\begin{aligned}
\hat{R}^{zz} &= \hat{\omega}^z{}_c \wedge \hat{\omega}^{cz} \\
&= -\left[\beta e^{-\alpha\phi}\partial^a\phi\hat{e}^z + \frac{1}{2}\mathcal{F}^a{}_b e^{(\beta-2\alpha)\phi}\hat{e}^b\right] \wedge \left[\beta e^{-\alpha\phi}\partial_a\phi\hat{e}^z + \frac{1}{2}\mathcal{F}_{ac}e^{(\beta-2\alpha)\phi}\hat{e}^c\right] \\
&= -\beta^2 e^{-2\alpha\phi}\left(\partial^a\phi\hat{e}^z \wedge \partial_a\phi\hat{e}^z\right) - \frac{1}{2}\mathcal{F}^a_b e^{(\beta-3\alpha)\phi}\hat{e}^b \wedge \partial_a\phi\hat{e}^z - \frac{1}{2}\mathcal{F}_{ab}e^{(\beta-3\alpha)\phi}\left(\partial^a\phi\hat{e}^z\right) \wedge \hat{e}^b \\
&\quad -\frac{1}{4}e^{2(\beta-2\alpha)\phi}\mathcal{F}^a{}_b\mathcal{F}_{ac}\hat{e}^b \wedge \hat{e}^c \\
&= -\beta^2 e^{-2\alpha\phi}\left(\partial^a\phi\hat{e}^z \wedge \partial_a\phi\hat{e}^z\right) + \frac{1}{2}\mathcal{F}^a_b e^{(\beta-3\alpha)\phi}\hat{e}^b \wedge \partial_a\phi\hat{e}^z - \frac{1}{2}\mathcal{F}^a_b e^{(\beta-3\alpha)\phi}\hat{e}^b \wedge \partial_a\phi\hat{e}^z \\
&\quad -\frac{1}{4}e^{2(\beta-2\alpha)\phi}\mathcal{F}^a{}_b\mathcal{F}_{ac}\hat{e}^b \wedge \hat{e}^c
\end{aligned}$$

de donde

$$\hat{R}_{zz} = \beta^2 e^{-2\alpha\phi}\Box\phi + \frac{1}{4}e^{2(\beta-2\alpha)\phi}\mathcal{F}^2, \tag{23}$$

con

$$\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}^{ab}F_{ab},$$

y

$$\Box\phi = \partial_a\partial^a\phi = \partial_\mu\partial^\mu\phi \tag{24}$$

es el operador laplaceano en cuatro dimensiones. Los otros cálculos son similares. POPE da el resto de los términos:

$$\hat{R}_{ab} = e^{-2\alpha\phi}\left(R_{ab} + (\alpha\beta - 2\alpha^2)\partial_a\phi\partial_b\phi - \alpha\eta_{ab}\Box\phi\right) - \frac{1}{2}e^{2(\beta-2\alpha)\phi}\mathcal{F}_a{}^c\mathcal{F}_{bc} \tag{25}$$

$$\hat{R}_{az} = \hat{R}_{za} = \frac{1}{2}e^{(\beta-\alpha)\phi}\nabla^b\left(e^{2(\alpha+\beta)\phi}\mathcal{F}_{ab}\right), \tag{26}$$

donde R_{ab} es la 2-forma de curvatura en $\mathcal{M}^{(4)}$, η_{ab} es la métrica MINKOWSKI tetradimensional y ∇^b es la derivada covariante sobre la base libre de coordenadas [6].

Entonces el escalar RICCI pentadimensional viene de la traza de la 2-forma de curvatura [6]:

$$\begin{aligned}\hat{R} &= \eta^{ab}\hat{R}_{ab} + \hat{R}_{zz}\\ &= e^{-2\alpha\phi}\left(\eta^{ab}R_{ab} + (\alpha\beta - 2\alpha^2)(\partial\phi)^2 - \alpha\eta^{a}{}_{a}\Box\phi\right) - \frac{1}{2}e^{2(\beta-2\alpha)\phi}\mathcal{F}^2 + \beta^2 e^{-2\alpha\phi}\Box\phi + \frac{1}{4}e^{2(\beta-2\alpha)\phi}\mathcal{F}^2\\ &= e^{-2\alpha\phi}\left(R + (\alpha\beta - 2\alpha^2)(\partial\phi)^2 + (\beta^2 - 2\alpha)\Box\phi\right) - \frac{1}{4}e^{2(\beta-2\alpha)\phi}\mathcal{F}^2. \qquad (27)\end{aligned}$$

2.1.3 Densidad Lagrangiana

Para calcular la densidad lagrangiana de la teoría, en primer lugar,

$$\sqrt{-\hat{g}} = e^{(\beta+4\alpha)\phi}\sqrt{-g}. \qquad (28)$$

Así,[4]

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \sqrt{-\hat{g}}\hat{R}\\ &= \sqrt{-g}e^{(\beta+2\alpha)\phi}\left[R + (\alpha\beta - 2\alpha^2)(\partial\phi)^2 + (\beta^2 - 2\alpha)\Box\phi\right] - \frac{1}{4}\sqrt{-g}e^{3\beta\phi}\mathcal{F}^2. \qquad (29)\end{aligned}$$

Ahora estamos en condiciones de establecer α y β. Queremos que nuestra teoría incluya a la gravedad tetradimensional, de EINSTEIN, por lo que la densidad lagrangiana debe de incluir un término que parezca a $\sqrt{-\hat{g}}\hat{R}$. Esto indica que conviene [6]:

$$\beta = -2\alpha. \qquad (30)$$

Si hacemos esto, la densidad lagrangiana viene a ser [6]:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left[R - 6\alpha^2(\partial\phi)^2 + (4\alpha^2 - 2\alpha)\Box\phi - \frac{1}{4}e^{-6\alpha\phi}\mathcal{F}^2\right].$$

El término $-6\alpha^2(\partial\phi)^2$ es muy evocador de la densidad lagrangiana KLEIN-GORDON para un campo escalar sin masa [6]. En la acción KLEIN-GORDON, el término es $-\frac{1}{2}(\partial\phi)^2$ [6]. Esto orienta la elección de α [6]:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{12}}. \qquad (31)$$

Con α y β establecidos, podemos escribir la densidad lagrangiana definitiva. Puesto que el término laplaceano $\Box\phi$ que da una derivada total en $\mathcal{L}$, no tendrá efecto en el cálculo variacional, se descarta [6]:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left[R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{4}e^{-\sqrt{3}\phi}\mathcal{F}^2\right]. \qquad (32)$$

[4] Para simplificar, vamos a trabajar en unidades donde $\frac{1}{16\pi G} = 1$.

De una teoría de cinco dimensiones que *contiene sólo a la gravedad*, hemos construido una densidad lagrangiana tetradimensional, que incluye a la gravedad de EINSTEIN y a un campo escalar acoplado a un objeto que se ve muy semejante al tensor MAXWELL. En efecto, si fijamos $\phi = 0$, se recupera la densidad lagrangiana EINSTEIN-MAXWELL.

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left(R - \frac{1}{4}\mathcal{F}^2\right).$$

Sería tentador hacerlo, conseguiríamos la gravedad de EINSTEIN-MAXWELL y el electromagnetismo sin complicaciones adicionales.[5] Desafortunadamente, esto está prohibido [6]. Para entender por qué, vamos a determinar las ecuaciones de campos.

2.1.4 Ecuaciones de Campos

Por simplicidad, asumiremos que el espacio-tiempo de cinco dimensiones no tiene contorno y así todos los términos de contorno se desecharán. Es más conveniente utilizar las variaciones $\delta g^{\alpha\beta}$ en lugar de $\delta g_{\alpha\beta}$ [14]. Por lo tanto,

$$\delta g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\delta g^{\mu\nu}. \tag{33}$$

También usaremos la conocida variación del determinante de la métrica [14],

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}. \tag{34}$$

Ahora, la variación de la acción es

$$\begin{aligned}
\delta S_{kaluza} &= \int d^5x\delta\mathcal{L} \\
&= \int d^5x\delta\left[\sqrt{-g}\left(R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{4}e^{-\sqrt{3}\phi}\mathcal{F}^2\right)\right] \\
\Rightarrow \delta S_{kaluza} &= \int \sqrt{-g}\delta\left(R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{4}e^{-\sqrt{3}\phi}\mathcal{F}^2\right)d^5x \\
&\quad + \int \left(R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{4}e^{-\sqrt{3}\phi}\mathcal{F}^2\right)\delta\sqrt{-g}d^5x.
\end{aligned} \tag{35}$$

Para simplificar, tratamos cada integral por separado. Sean

[5] Históricamente, algunas personas *llegaron* a poner $\phi = 0$ —probablemente porque desconfiaban de los campos escalares [2, 7]. Sin embargo, ni KALUZA ni KLEIN hicieron esta simplificación [2, 4, 13, 6].

$$\delta S_1 = \int \sqrt{-g}\delta\left(R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{4}e^{-\sqrt{3}\phi}\mathcal{F}^2\right)d^5x \quad (36)$$

$$\delta S_2 = \int\left(R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{4}e^{-\sqrt{3}\phi}\mathcal{F}^2\right)\delta\sqrt{-g}d^5x. \quad (37)$$

La primera integral resulta

$$\begin{aligned}\delta S_1 &= \int \sqrt{-g}\delta\left(R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{4}e^{-\sqrt{3}\phi}\mathcal{F}^2\right)d^5x\\ &= \int \sqrt{-g}\delta\left(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi) - \frac{1}{4}e^{-\sqrt{3}\phi}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}\right)dx^5\\ &= \int\sqrt{-g}\left[g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi)\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)\partial_\nu\delta\phi\right]d^5x\\ &\quad -\frac{1}{4}\int\sqrt{-g}\left[-\sqrt{3}\mathcal{F}^2\delta\phi + 2se^{-\sqrt{3}\phi}F_{\mu\rho}F^{\nu\rho}\delta g^{\mu\nu} + 2e^{-\sqrt{3}\phi}F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu}\right]d^5x. \quad (38)\end{aligned}$$

Del mismo modo, usando (34), la segunda integral resulta

$$\begin{aligned}\delta S_2 &= \int\left(R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{4}e^{-\sqrt{3}\phi}\mathcal{F}^2\right)\delta\sqrt{-g}d^5x\\ &= -\frac{1}{2}\int\sqrt{-g}\left(R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{4}e^{-\sqrt{3}\phi}\mathcal{F}^2\right)g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}d^5x. \quad (39)\end{aligned}$$

Si combinamos δS_1 y δS_2, agrupamos la variable variacional y establecemos la variación de la acción a cero, tenemos las siguientes ecuaciones:

$$0 = \int\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}d^5x. \quad (40)$$

$$0 = -\frac{1}{2}\int\sqrt{-g}e^{-\sqrt{3}\phi}F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu}d^5x \quad (41)$$

$$0 = \int\sqrt{-g}\left[\frac{1}{4}\sqrt{3}\mathcal{F}^2 - \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\right]\delta\phi d^5x \quad (42)$$

$$0 = \int\sqrt{-g}\left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\left((\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi) - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2g_{\mu\nu}\right) - \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}^2_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\mathcal{F}^2g_{\mu\nu}\right)\right]\delta g^{\mu\nu}d^5x, \quad (43)$$

donde

$$\mathcal{F}^2_{\mu\nu} = \mathcal{F}_{\mu\rho}\mathcal{F}_\nu{}^\rho. \quad (44)$$

La ecuación (40) se convierte en una integral sobre el contorno y se anula [14]. Las restantes tres integrales definen nuestras ecuaciones de campo [6, 7, 2, 4, 13, 15, 10, 5]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2g_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}^2_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\mathcal{F}^2g_{\mu\nu}\right), \quad (45)$$

$$0 = \nabla^\mu\left(e^{-\sqrt{3}\phi}\mathcal{F}_{\mu\nu}\right), \quad (46)$$

y

$$\Box\phi \;=\; -\frac{3\sqrt{3}}{2}e^{-\sqrt{3}\phi}\mathcal{F}^2. \tag{47}$$

Algunos, a veces, eliminan al término $-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ en (45), restando el múltiplo apropiado, de la traza, para obtener [6]:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \frac{1}{2}e^{-\sqrt{3}\phi}\left(\mathcal{F}^2_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\mathcal{F}^2 g_{\mu\nu}\right). \tag{48}$$

¡Esto luce muy familiar! Si ponemos al tensor energía ímpetu como

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 g_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}^2_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\mathcal{F}^2 g_{\mu\nu}\right), \tag{49}$$

entonces (45) simplemente representa a las ecuaciones de campo de la gravedad de EINSTEIN [12]. De manera similar, aunque hay un nuevo escalamiento mediante (46) luce muy evocador de las ecuaciones Maxwell libres de fuentes, en notación tensorial [12]. (La otra ecuación del electromagnetismo, $\mathcal{F} = d\mathcal{A}$, está codificada en nuestra definición de $\mathcal{F}$). Sin embargo, (47) es nueva. Este es el término fuente para el campo escalar.

Ahora podemos ver por qué, en general, $\phi = 0$ está prohibido. Puesto que los escalares y los campos electromagnéticos *interactúan*, $\phi = 0$ si y sólo $\mathcal{F}^2 = 0$. En otras palabras, si $\phi = 0$, todo el sistema se reduce sólo a la gravedad tetradimensional de EINSTEIN, sin nada de campo electromagnético. Puesto que no podemos deshacernos de ϕ, le daremos un nombre. Lo llamamos *dilatón* [6].

2.2 Simetrías

De un sistema pentadimensional, puramente gravitacional, aparentemente, se ha elaborado las ecuaciones de campo para un sistema tetradimensional, que incluye gravedad, electromagnetismo y un campo escalar. Si este es realmente el caso, sin embargo, las simetrías del espaciotiempo pentadimensional han de traducirse en las simetrías de un espaciotiempo tetradimensional y las invariancias por calibración del potencial vectorial y el campo escalar [6, 7]. Intentemos esclarecer cómo aparecen estas simetrías. Como antes, esta derivación sigue de cerca a POPE [6].

La teoría pentadimensional de EINSTEIN, es invariante con respecto a transformaciones generales de coordenadas, pentadimensionales, que pueden escribirse de forma infinitesimal, como que es la ecuación KLEIN-GORDON para un campo escalar con masa $| n | / L$ [6]. Un razonamiento similar es aplicable a la expansión FOURIER del tensor métrico.

KLEIN vio el paralelismo entre la periodicidad de la dimensión compactada y la dirección azimutal en una órbita de un electrón alrededor de un núcleo [2, 13, 15]. Ambiciosamente, esperaba utilizar los modos $n = 0$ para explicar la cuantización de la carga eléctrica de la misma manera que las condiciones de contorno periódicas explican los niveles de energía en un átomo [2, 13, 15]. En el esquema de KLEIN, el armónico n-ésimo de la métrica, tiene una carga "eléctrica" de

$$e_n = n\frac{2\sqrt{\pi G}}{\pi L},$$

donde G es la constante NEWTON [2, 13, 15]. Esto significaría que la carga de un electrón es

$$e = \frac{2\sqrt{\pi G}}{\pi L}.$$

Podemos elegir L para que coincida con la carga observada, del electrón y resulta ser un centenar longitudes PLANCK [2]. En este esquema, la condición cilíndrica se mantiene sólo aproximadamente y se rompería a la escala de longitud apropiada [2, 7].[6] Teoría de Cuerdas y Teoría M utilizan un enfoque similar de la compactación, pero con más dimensiones compactadas [7, 6].

Si prefiriéramos que la condición cilíndrica fuera absoluta, podríamos establecer L aún más pequeña, del orden de una longitud PLANCK, de manera que los modos másicos tengan tan altas energías, que nunca podrían ser observadas. En este caso, el modo $n = 0$ es la única parte observable de la métrica y satisface la condición cilíndrica [6]. La carga conservada, de KLEIN, asegura que podemos hacer esto [13, 15, 2, 6]. La carga cero nunca cambiará espontáneamente, para ser distinta de cero [6].

Una manera sencilla de interpretar esto, es que la funciones FOURIER básicas $e^{inx^4/L}$ son representaciones de $U(1)$ [6]. Entonces las funciones de modo $n = 0$, se aparejan por conjugadas complejas. La función correspondiente al número modal n es la conjugada compleja de la función correspondiente al número modal $-n$. Así, la función de modo $n = 0$, es una representación del subgrupo trivial de $U(1)$. Puesto que es un subgrupo, es cerrado y ninguna cantidad de multiplicaciones de los modos $n = 0$, hará que se produzca un modo $n \neq 0$ [6].

---

[6] Aunque esta escala de energía es muy inaccesible por el momento... y, probablemente, para siempre.

Aunque el esquema de compactación, de KLEIN, es por lejos, la manera más popular para justificar la condición cilíndrica, no es la única opción. El espacio proyectivo (3 + 1)-dimensional puede ser considerado como una hipersuperficie en el espacio MINKOWSKI (4 + 1)-dimensional. En 1930, VEBLEN y HOFFMANN utilizan esta idea para justificar la quinta dimensión y la condición cilíndrica, de KALUZA; donde la quinta dimensión, en realidad, refleja el carácter proyectivo del espaciotiempo [16]. Más de treinta años más tarde, JOSEPH también discute esta posibilidad [17].

Algunos también han argumentado que la condición cilíndrica es sólo una aproximación, incluso a escalas de energía accesible. El mayor defensor de este enfoque es WESSON, que ha explorado algunas de las implicaciones cosmológicas de dicho esquema [18, 19, 8, 9].

3 Observaciones Finales

Partiendo de una teoría pentadimensional de la pura gravedad, hemos logrado un sistema tetradimensional que contiene a un campo escalar, gravedad y electromagnetismo. Aunque la condición cilíndrica KALUZA parece artificial, en un principio, KLEIN y otros han demostrado que puede justificarse. Este es un logro notable que ha cosechado un gran interés durante años.

Por supuesto, la teoría KALUZA-KLEIN tiene algunas debilidades claras. Aunque la teoría predice el dilatón escalar sin masa, no se observado tal partícula. Ya que se acopla al campo electromagnético, se habría observado si existiera. Además, la teoría es mucho más complicada cuando se añaden las fuerzas fuerte y electrodébil. Cada fuerza agrega, al menos, una dimensión conforme a su propia condición "cilíndrica" y toda la teoría se hace altamente no trivial.

A pesar de estas dificultades, la Teoría KALUZA-KLEIN sigue siendo seductora. El enfoque geométrico, de KALUZA, para la unificación apela a nuestras sensibilidades estéticas y la contribución, de KLEIN, la compactación, ofrece la tentadora posibilidad de explicar la Mecánica Quántica geométricamente —todo apunta a una teoría de gravedad quántica. Esta, es sin duda, la razón de por qué Teoría de Cuerdas y Teoría M utilizan dimensiones compactadas. Es muy probable que esta bella teoría continúe inspirando nuevas ideas y nuevos enfoques para la física gravitacional.

Referencias

[1] H. MINKOWSKI. Die grundgleighungen gür die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten körpern. *Nachrichten Von Der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse,* 21:53-111, 1908.

[2] T. APPELQUIST, A. CHODOS, and P. G.O. FREUND, editors. *Modern Kaluza-*

Klein Theories. Frontiers in Physics. Addison-Wesley, 1987.

[3] G. NORDSTROM. On the possibility of a unification of the electromagnetic and gravitational fields. *Helsingfors,* page 504, March 1914. [Translation in [2]].

[4] T.H. KALUZA. On the unity problem in physics. *Sitzungsberichte der K. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin,* page 966, December 1921. [Translation in [2]].

[5] A. EINSTEIN and P. BERGMANN. On a generalization of Kaluza's theory of electricity. *Annals of Mathematics,* 39(3):683, April 1938.

[6] C. POPE. Kaluza-Klein theory. http://people.physics.tamu.edu/pope/ihplec.pdf. [Online; accessed 16-April-2013].

[7] J. P. OVERDUIN and P.S. WESSON. Kaluza-klein gravity. *Physics Reports*, 283(5-6):303-378, April 1997.

[8] P.S. WESSON. *Five-Dimensional Physics.* World Scientific, 2006.

[9] P.S. WESSON. *Space-Time-Matter.* World Scientific, 2007.

[10] Y. THIRY. The equations of kaluza's unified theory. *Comptes Rendus (Paris)*, 226:216, 1948. [Translation in [2]].

[11] J. OPREA. *Differential Geometry and Its Applications.* The Mathematical Association of America, 2007.

[12] R.M. WALD. *General Relativity.* University of Chicago Press, 1984.

[13] O. KLEIN. Quantum theory and five dimensional theory of relativity. *Z.F. Physik,* 37:895, April 1926.

[14] *E.* POISSON. *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black Hole Mechanics.* Cambridge University Press, 2004.

[15] O. KLEIN. The atomicity of electricity as a quantum theory law. *Nature,* 118:516, 1926.

[16] O. VEBLEN and B. HOFFMANN. Projective relativity. *Physical Review,* 36(5):810-822, 1930.

[17] J.T. JOSEPH. Coordinate covariance and the particle spectrum. *Physical Review,* 126(1):319-323, 1962.

[18] P.S. WESSON. A new approach to scale-invariant gravity. *Astronomy and Astrophysics,* 119:145-152, 1983.

[19] [19] P.S. WESSON. An embedding for general relativity with variable rest mass. *General Relativity and Gravitation,* 16(2):193-203, 1984.

[20] J. MILLER. A Brief Summary of Kaluza-Klein Theory. www.thephysicsmill. com /blog/wp-content/.../jmm_GR2_paper.pdf, 2013