Caída Libre Relativista (Un Tema Fundamental)

Hugo A. Fernández

INTRODUCCIÓN

La Teoría de Relatividad Especial es esencialmente un modelo físico-matemático que trata sobre conceptos de simetría y propiedades del espacio y el tiempo, consistentes con el comportamiento observado de los fenómenos naturales. Una virtud destacable de la teoría es que provee una metodología para adaptar las leyes clásicas conocidas. Su aplicación sistemática histórica generó nuevas leyes que fueron verificándose con una coherencia notable con el comportamiento observado. Hasta la fecha esta teoría no tuvo limitaciones en su aplicación ni contradicciones verificadas, hecho inusual en los modelos teóricos, lo que sugiere una solidez muy importante de sus fundamentos.

La teoría electromagnética resultó ser relativista de nacimiento y no fue necesario modificar sus postulados, las ecuaciones de Maxwell. No obstante, su interpretación desde el punto de vista relativista, permitió comprender la electrodinámica de los cuerpos en movimiento y significó un avance significativo en la teoría de campos.

La similitud funcional entre la Ley de Coulomb y la Ley de Gravitación de Newton hicieron creer que el campo gravitatorio podría ser descrito sin dificultad por una teoría clásica de campos, pues se contaba con el formidable modelo de Maxwell.

Por todo ello resultó realmente desconcertante que la gravitación no pudiera ser descrita con ecuaciones de campo, válidas en ese marco teórico. Hasta el momento, en mi conocimiento, todo intento por obtener una teoría de campos para la gravitación, consistente con la Relatividad Especial, condujo a resultados incorrectos.

Tratemos de comprender qué aspectos de la gravitación generan las dificultades para elaborar una teoría clásica de campos que se ajuste al comportamiento observado.

En primer lugar está que la masa, fuente del campo y objeto de su acción, no es un invariante, a diferencia de lo que sucede con la carga eléctrica, lo que provoca que la fuerza gravitatoria sobre un cuerpo material dependa de la velocidad del mismo y, más estrictamente, de su contenido energético. La segunda cuestión es que las ecuaciones del campo gravitatorio no pueden ser lineales, como sucede con las ecuaciones de Maxwell, debido a que las "fuentes" (en realidad "sumideros") varían con los intercambios de energía, de acuerdo al Principio de equivalencia entre masa y energía. Es decir, las fuentes del campo generan acciones que modifican a las propias fuentes.

En 1934 Einstein publicó un documento ("El mundo como yo lo veo") que relata sus intentos anteriores a la Teoría General de Relatividad. Uno de sus párrafos, cuya traducción se transcribe a continuación, muestra claramente que **el problema de la caída de los cuerpos le resultó un obstáculo insalvable**.

"El camino más simple era, por supuesto, retener el potencial escalar de Laplace y completar la ecuación de Poisson de una manera obvia, de tal forma que se satisficiera la teoría especial de relatividad. La ley de movimiento de una masa puntual en un campo gravitatorio tendría también que adaptarse a la teoría especial de relatividad. El camino aquí no dejaba de ser errático, pues la masa inercial de un cuerpo podría depender del potencial gravitatorio. De hecho, cabría esperar que así fuera debido al principio de la inercia de la energía.

Estas investigaciones, sin embargo, llevaron a resultados que me generaron fuertes sospechas. De acuerdo a la mecánica clásica, la aceleración vertical de un cuerpo en un campo gravitatorio vertical es independiente de la componente horizontal de la velocidad. De aquí se sigue que en tal campo gravitatorio la aceleración vertical de un sistema mecánico, o de su centro de gravedad, opera en forma independiente a su energía cinética interna. Pero en la primera teoría que investigué, la aceleración del cuerpo que cae no era independiente de la velocidad horizontal ni de la energía interna del sistema.

Lo anterior no se ajusta al viejo hecho experimental según el cual todos los cuerpos tienen la misma aceleración en un campo gravitatorio."

Una traducción completa de este documento puede leerse en la página:

http://omega.ilce.edu.mx:3000/sites/ciencia/volumen1/ciencia2/41/htm/sec_9.html

Curiosamente, Max Born (1882-1970) en 1909, y Arnold Sommerfeld (1868-1951) en 1910, antes de la aparición de la Teoría General, publicaron (por separado) la solución relativista del movimiento de partículas en un campo de fuerzas constante, indicando la fuerza como $\boldsymbol{F} = m_0\, \boldsymbol{g}$ (Möller, "The Theory of Relativity").

Esta solución, conocida como ***"movimiento hiperbólico"***, fue adaptada y resuelta para campos eléctricos constantes y se aplica bien en el caso de partículas cargadas, pero da resultados incorrectos para un campo gravitatorio constante.

Nótese que la caída de los cuerpos, tema fundamental de la dinámica clásica, no está tratado en ninguno de los libros tradicionales de Relatividad Especial y, sin duda, esto no es por olvido. En mi opinión su tratamiento es ineludible pues, aún en el fracaso, se pondrían en evidencia las sutiles diferencias conceptuales con la electrodinámica y las condiciones necesarias que deben cumplirse para una formulación correcta.

Un aspecto inicial (histórico) es si se acepta o no que la masa gravitatoria varía con su energía. En el caso afirmativo es inmediato ver que el movimiento hiperbólico no es aplicable al caso gravitatorio pues la fuerza sobre un móvil (acelerado) resulta variable.

Si aceptamos que la masa gravitatoria no cambia entramos en conflicto (insalvable) con el Principio de equivalencia entre masa y energía y con la especulación de que la propuesta de Galileo sobre la caída de los cuerpos es de validez universal.

En la primera parte de este trabajo se mostrará que el "movimiento hiperbólico" no es una solución válida para el caso gravitatorio, lo que implica en forma indirecta que la masa gravitatoria necesariamente tiene que variar con la energía del cuerpo.

Luego se encontrará una solución relativista completa, compatible con las condiciones impuestas. Finalmente se probará que la solución hallada cumple con el Principio de Equivalencia mediante una importante relación funcional entre masa y campo gravitatorio.

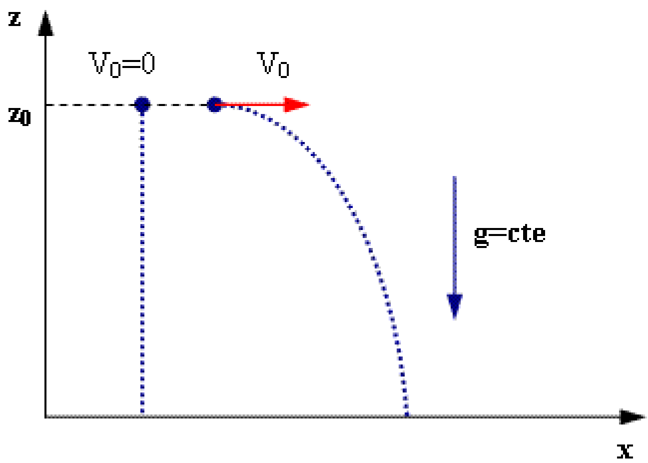
Caída Libre Relativista

El problema consiste en encontrar la ley de caída de los cuerpos materiales en un campo gravitatorio constante (vertical), que cumpla con las siguientes condiciones:

En un campo **gravitatorio constante**, la aceleración de un cuerpo en la dirección del campo es independiente de la masa del cuerpo y de su velocidad transversal.

El movimiento transversal al campo debe cumplir con la conservación de la cantidad de movimiento.

El movimiento de dos cuerpos, como muestra la figura, es tal que deben llegar al piso al mismo tiempo.



Primero mostraremos la inconsistencia del "movimiento hiperbólico".

En dicho planteo (Born; Sommerfeld) se propone:

F = m_0 ***g*** = - m_0 *g* ***k*** (m_0 es la masa propia)

Hallemos la expresión general de la aceleración que provoca dicha fuerza en un cuerpo, en la dirección del campo (eje z), usando la siguiente relación relativista entre aceleración y fuerza (Möller, "The Theory of Relativity"):

$$m\,\vec{a} = \vec{F} - \frac{(\vec{F}\cdot\vec{v})}{c^2}\,\vec{v}$$

Para la componente (z) en la dirección del campo, quedará:

$$m\,\frac{dv_z}{dt} = -m_0\,g + m_0\,g\,\frac{v_z^2}{c^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{dv_z}{dt}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -g\left[1-\frac{v_z^2}{c^2}\right]$$

$$\text{Siendo } v^2 = v_x^2 + v_z^2 \text{ obtenemos :}$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -g\left[1-\frac{v_z^2}{c^2}\right]\sqrt{1-\frac{v_x^2+v_z^2}{c^2}}$$

Este resultado muestra que la aceleración en la dirección del campo depende de la velocidad transversal (v_x), por lo cual este caso (***F***= m_0 ***g***) no es consistente con la condición impuesta. Queda demostrado que **el "movimiento hiperbólico" no es válido** para un campo gravitatorio constante.

Veamos ahora qué sucede con la caída de un cuerpo si postulamos que su masa (inercial y gravitatoria) es la **masa relativista.**

En este caso la fuerza propuesta es: ***F***= *m* ***g*** = - *m g* ***k*** (m es la masa relativista)
Para la componente (z) en la dirección del campo, obtenemos:

$$m\,\frac{dv_z}{dt} = -m\,g + m\,g\,\frac{v_z^2}{c^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv_z}{dt} = -g\left[1-\frac{v_z^2}{c^2}\right]$$

En este caso (***F***= *m* ***g***) **la aceleración en la dirección del campo gravitatorio resulta independiente de la masa y de cualquier velocidad transversal**.

En consecuencia, esta interpretación sobre que el campo gravitatorio actúa sobre la masa relativista es consistente con la propuesta de Galileo sobre caída de los cuerpos. Debemos resolver la ecuación diferencial y verificar si corresponde al comportamiento esperado.

Se concluye que en este caso se cumple la independencia de los movimientos pero con sentido restrictivo: solamente vale para la aceleración en la dirección del campo gravitatorio. En la dirección transversal al campo se debe conservar la cantidad de movimiento correspondiente pues no hay fuerza aplicada. Dado que el cambio de velocidad durante el movimiento modifica la masa relativista, la velocidad transversal deberá adecuarse para tal conservación. Esto lo analizaremos luego, en detalle.

Ecuaciones de Movimiento (Caída Libre)
Dado que el movimiento en la dirección del campo es independiente de la velocidad transversal del móvil, estudiaremos primero el movimiento en esa dirección (vertical), para una partícula con velocidad inicial v_z= 0, cuya ecuación diferencial es la última relación anteriormente vista.

La aceleración vertical cumple con:

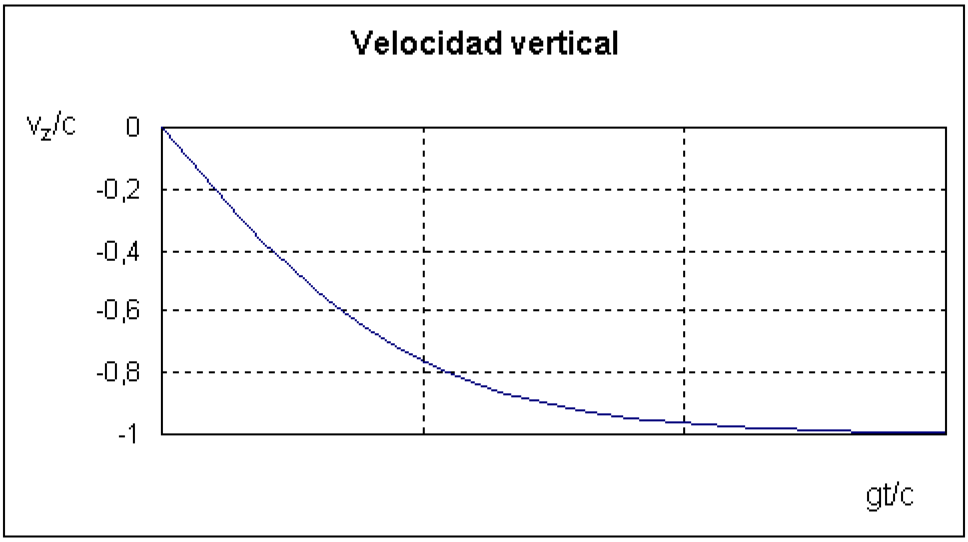
$$\frac{dv_z}{dt} = -g\left[1 - \frac{v_z^2}{c^2}\right]$$

Integrando obtenemos:

$$\frac{c}{2}\ln\frac{1+\frac{v_z}{c}}{1-\frac{v_z}{c}} = c\ Arg\ Th(\frac{v_z}{c}) = -g\,t$$

$$\Rightarrow \quad v_z = -\,c\ Th(\frac{g\,t}{c})$$

El gráfico que sigue permite analizar el comportamiento funcional de v_z



Para tiempo infinito se cumple $v_z = -\,c$

Para pequeñas velocidades debe ser $g.t/c \approx 0$, y la expresión anterior tiende a la ley clásica $v = -\,g.t$, siendo consistente con el Principio de Correspondencia.
La **ecuación horaria** la obtenemos integrando la ecuación anterior, resultando:

$$z - z_0 = -\frac{c^2}{g}\left[\ln\ Ch(\frac{gt}{c})\right]$$

Esta expresión tiende a la ley clásica de la caída de los cuerpos.

Haciendo el reemplazo $Ch\,(x) = 1 + 2\,Sh^2\,(x/2) \approx 1 + x^2/2$ (para pequeños valores de x), y luego aproximando la exponencial con un desarrollo en serie, obtenemos la relación clásica:

$$z - z_0 = -\frac{1}{2}\,g\,t^2$$

Los resultados son consistentes con el Principio de Correspondencia.

MOVIMIENTO TRANSVERSAL AL CAMPO
Veamos ahora cómo es la aceleración según el eje x para el caso de caída libre con velocidad inicial horizontal $v_x = V_{0x}$.

La componente horizontal de la fuerza aplicada es nula, cumpliéndose

$$m\frac{dv_x}{dt} = -\frac{(\vec{F}\cdot\vec{v})}{c^2}v_x$$

$$\textit{Siendo } \vec{F}\cdot\vec{v} = -m\,g\,v_z \textit{ resulta :}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{g\,v_z v_x}{c^2}$$

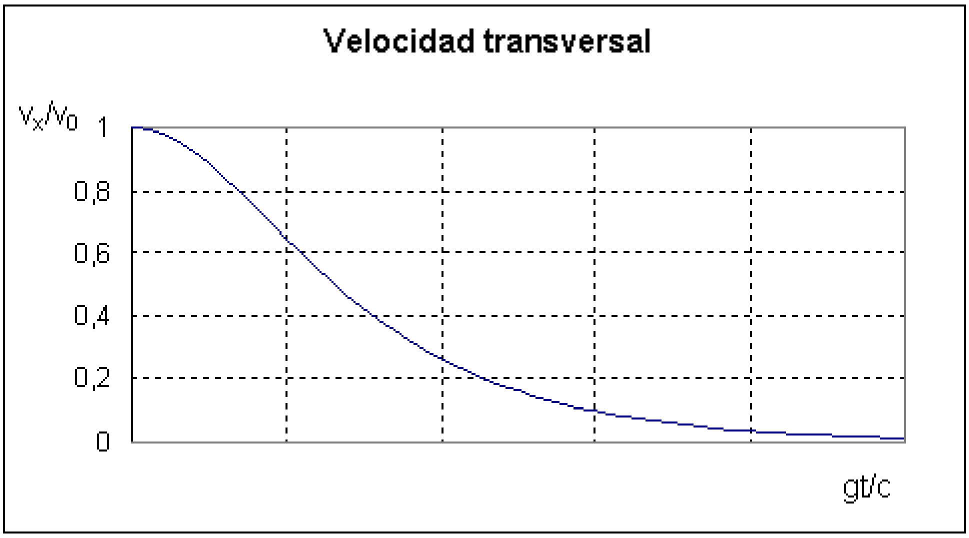
Esta última relación muestra que existe aceleración transversal al campo gravitatorio a pesar de que no hay fuerza aplicada en esa dirección, y su valor depende también de la velocidad en la dirección del campo (v_z). Esta aceleración resulta necesaria para la conservación de la cantidad de movimiento en la dirección horizontal.
Reemplazando v_z en la expresión anterior queda:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{g\,v_x}{c}\,Th(\frac{g\,t}{c}) \quad \Rightarrow \quad \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{g}{c}\,Th(\frac{g\,t}{c})\,dt$$

Integrando obtenemos

$$v_x = \frac{V_{0_x}}{Ch(\frac{g\,t}{c})}$$

El siguiente gráfico muestra la dependencia (temporal) de la velocidad transversal



Este comportamiento está de acuerdo con lo esperado. El aumento de la masa con la velocidad v debe compensarse con una disminución de la velocidad (según x) para la conservación de la cantidad de movimiento en esa dirección.

El coseno hiperbólico es una función creciente cuyo valor mínimo es 1, por lo cual la velocidad transversal v_x resulta una magnitud monótona decreciente con el tiempo, anulándose para tiempo infinito.

La ecuación horaria para la posición según x resulta de integrar v_x, obteniéndose:

$$x - x_0 = \frac{2\,c\,V_{0_x}}{g}\left[arc\;tg\;e^{(g\,t\,/\,c)} - \frac{\pi}{4}\right]$$

Es fácil (aunque laborioso) mostrar que esta ecuación horaria converge a la expresión clásica $x\text{-}x_0 = V_{0x}\,t$, para pequeñas velocidades.

La trayectoria en forma paramétrica queda determinada por las dos ecuaciones horarias halladas:

$$x - x_0 = \frac{2\,c\,V_{0_x}}{g}\left[arc\;tg\;e^{(gt/c)} - \frac{\pi}{4}\right]$$

$$z - z_0 = -\frac{c^2}{g}\left[Ln\;Ch\,(\frac{gt}{c})\right]$$

Se ha encontrado la solución completa del movimiento de un cuerpo en un campo gravitatorio constante, consistente con la Relatividad Especial y con las condiciones propuestas.

TEMAS COMPLEMENTARIOS

Relación funcional de la masa con el tiempo y con la altura, para caída libre.
La ley fundamental de la dinámica relativista establece:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt}$$

Para la componente (x) transversal al campo la fuerza es nula, resultando:

$$m\frac{d(v_x)}{dt} = -v_x\,\frac{dm}{dt} \quad\Rightarrow\quad \frac{dm}{m} = -\,\frac{dv_x}{v_x}$$

Integrando esta ecuación (entre 0 y t) y reemplazando v_x por la expresión hallada anteriormente, obtenemos el valor de la **masa en función del tiempo**:

$$\frac{m}{m_{t=0}} = Ch\,(\frac{g\,t}{c}) \quad\Rightarrow\quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V_0^2}{c^2}}}\,Ch\,(\frac{g\,t}{c})$$

Siendo $m_{t=0}$ la masa relativista del cuerpo en el instante inicial, m_0 la masa propia, y V_0 la velocidad (total) del cuerpo en el instante inicial.

De la ecuación horaria según z podemos despejar Ch (gt/c) y reemplazarlo en la última igualdad, obteniendo el valor de la **masa en función de la altura**.

De esta última relación sale una ley de conservación interesante.

$$\frac{m}{m_{t=0}} = e^{-(z-z_0)g/c^2} \quad\Rightarrow\quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V_0^2}{c^2}}}\;e^{-(z-z_0)g/c^2}$$

Ordenando obtenemos :

$$m\;e^{(g\,z/c^2)} = m_{t=0}\;e^{(g\,z_0/c^2)} = Cte$$

En la última relación (**ley de conservación**) las masas son las relativistas. El subíndice de la masa indica que corresponde al instante inicial.

Resulta claro que esta relación funcional debe cumplirse en todo instante para que se conserve la cantidad de movimiento según el eje x.

Dado que el potencial de un campo gravitatorio constante es $\phi(z) = g\;z + Cte$, podemos proceder en forma heurística y hacer la sustitución de *g z* por el potencial. En este caso encontramos la ley de conservación entre la masa relativista y el potencial gravitatorio, que en nuestro caso resulta:

$$m(\phi)\, e^{(\phi/c^2)} = Cte$$

Veremos que esta relación es general y se deduce del Principio de Equivalencia entre Masa y Energía. En mi conocimiento esta importante ley de conservación no figura en la bibliografía específica.

LEY DE CONSERVACIÓN DE LA MASA Y EL POTENCIAL GRAVITATORIO

Mostraremos que un cuerpo material en un campo gravitatorio conservativo cumple con la siguiente (general) ley de conservación.

$$m(\phi)\, e^{(\phi/c^2)} = Cte$$

Siendo m la masa relativista y $\phi(x,y,z)$ el potencial gravitatorio en el punto donde está la masa.
El Principio de Equivalencia entre Masa y Energía establece que el contenido total de energía de un cuerpo es igual al producto de su masa relativista por el cuadrado de la velocidad de la luz. Cualquier modificación de su contenido energético, sin importar el mecanismo que la produzca, irá acompañada por un cambio de su masa relativista, cumpliéndose:

$$dE = c^2 dm$$

Si el cuerpo está en presencia (solamente) de un campo gravitatorio conservativo, el trabajo elemental realizado es igual a la variación de su energía, resultando:

$$dE = \vec{F} \cdot d\vec{s} = -m\, \nabla \phi \cdot d\vec{s} = -m\; d\phi = c^2 dm$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dm}{m} = -\frac{d\phi}{c^2}$$

Integrando esta ecuación diferencial entre dos puntos (1 y 2) obtenemos la ley general de conservación de la masa (relativista) y el potencial gravitatorio.

$$m_1\, e^{\phi_1/c^2} = m_2\, e^{\phi_2/c^2} = Cte$$

CONCLUSIONES

Se ha demostrado que el “movimiento hiperbólico” (Born; Sommerfeld) no es una solución válida para el movimiento de un cuerpo masivo en un campo gravitatorio constante.

Se encontró una solución completa del movimiento de una partícula en un campo gravitatorio constante, consistente con la Relatividad Especial y con la especulación de Galileo sobre la caída de los cuerpos. Este hecho es muy importante y estimulante pues avala la suposición de que la gravitación puede ser incorporada en la Relatividad Especial.

Se ha mostrado la importancia conceptual de la masa relativista.

El uso incorrecto de la masa por parte de especialistas es poco frecuente y puede pasar desapercibido debido a que los resultados obtenidos son aproximados a los correctos. Por ejemplo, en la caída libre tratada como movimiento hiperbólico, cuando el objeto alcanza la velocidad 0.7 c, el valor correcto (para un mismo tiempo) es 0.76 c.

La experiencia ha mostrado que para el movimiento (masa inercial) y para el campo, tanto en sus acciones como en sus causas (masa gravitatoria, activa y pasiva), el uso de la masa relativista da los resultados correctos. Resulta inconcebible que alguien promueva rechazar su uso en lugar de realzar su importancia conceptual.

Se estableció una importante ley de conservación, como consecuencia del Principio de Equivalencia entre masa y energía, que relaciona la masa relativista con el potencial gravitatorio.

En mi experiencia personal, he podido usarla convenientemente en varias aplicaciones interesantes tales como curvatura de la luz, efecto Mössbauer y la ley de corrimiento al rojo (que presentaré por separado).

Hugo A. Fernández
hafernandez@fibertel.com.ar
Profesor Titular de Física Moderna
Universidad Tecnológica Nacional - Argentina