EN RUMBO DE COLISIÓN

CHOQUE ELÁSTICO DE DOS PARTICULAS

El impacto de dos partículas en el espacio tridimensional es un interesante problema de Mecánica Teórica que podemos resolver analíticamente con el uso de los teoremas clásicos de conservación del impulso y de la energía. Se trata de determinar las velocidades de dos partículas que colisionan elásticamente y el ángulo de desviación de cada una de estas velocidades con respecto de la otra. El análisis que hacemos está basado en el tratamiento que se hace de este problema en el Curso de Física Teórica de Landau-Lifchitz (Volumen I).

El sistema de dos partículas. El centro de masas:

Si son m_1 y m_2 las masas de ambas partículas y r_{m1} y r_{m2} sus vectores de posición con respecto a un sistema de referencia exterior. El centro de masas es por definición el punto de vector de posición dado por

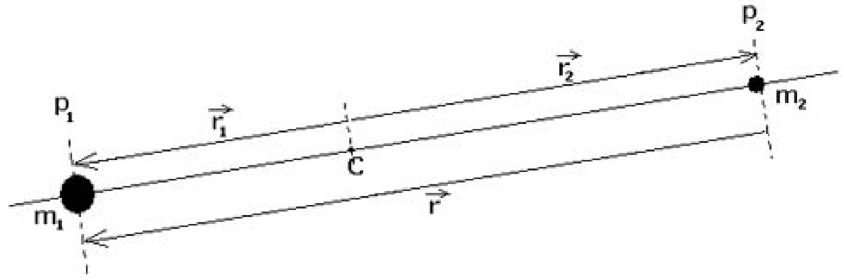
$$R_C = \frac{m_1.\vec{r}_{m1} + m_2.\vec{r}_{m2}}{m_1 + m_2}$$

Si elegimos como origen del sistema de referencia el mismo centro de masas, los vectores de posición de ambas partículas, $\vec{r}_1, \vec{r}_2$, son de contrario sentido y se tiene que

$$R_C = \frac{m_1.\vec{r}_1 + m_2.\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = 0 \Rightarrow m_1.\vec{r}_1 + m_2.\vec{r}_2 = 0$$

Si elegimos como origen de referencia una de las partículas, a la cual podemos considerar en reposo (sistema de laboratorio), podemos referir la otra respecto de su posición relativa. Sea por ejemplo en reposo la partícula p_2, de masa m_2. Si es $\vec{r}$ el vector de posición de p_1 con respecto a p_2, puede expresarse en función de los vectores $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ por:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$



Podemos obtener la expresión de los vectores de posición de ambas partículas referidos al centro C de masas en función del vector de posición de la partícula p_1 con respecto de la partícula p_2:

$$\left.\begin{array}{r} m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0 \\ \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0 \\ m_2\vec{r}_1 - m_2\vec{r}_2 = m_2\vec{r} \end{array}\right\} \Rightarrow (m_1 + m_2)\vec{r}_1 = m_2\vec{r} \Rightarrow \vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

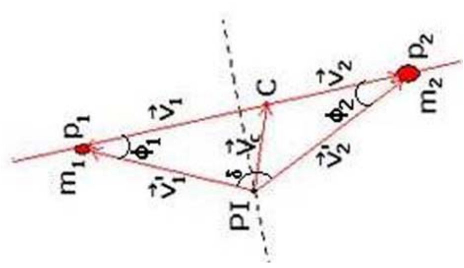
$$\left.\begin{array}{r} m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0 \\ \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0 \\ -m_1\vec{r}_1 + m_1\vec{r}_2 = -m_1\vec{r} \end{array}\right\} \Rightarrow (m_1 + m_2)\vec{r}_2 = -m_1\vec{r} \Rightarrow \vec{r}_2 = \frac{-m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

El momento lineal y la energía:

Antes de producirse el impacto de ambas partículas, y puesto que una de ellas está en reposo, podemos expresar en el sistema de laboratorio el momento y la energía cinética como:

$$\begin{cases} \vec{p} = m_1.\dot{\vec{r}} \\ E = \dfrac{1}{2} m_1.\dot{\vec{r}}^{\,2} \end{cases}$$

Después de producirse el impacto ambas partículas, p_1, p_2, se desvían con velocidades respectivas $\vec{v}'_1 = \dot{\vec{r}}_1^{\,'}, \vec{v}'_2 = \dot{\vec{r}}_2^{\,'}$, medidas con respecto a un origen de referencia en el punto del impacto, PI, formando ambas un ángulo δ. Asimismo el centro de masas C adquiere una velocidad $\vec{v}_c$ con respecto a dicho punto de impacto.



La velocidad del centro de masas al producirse el impacto:

Puesto que es

$$R_C = \frac{m_1.\vec{r}'_1 + m_2.\vec{r}'_2}{m_1 + m_2}$$

se tiene:

$$\vec{v}_c = \frac{m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'}{m_1 + m_2}$$

y, puesto que en el choque se conserva el momento lineal es $m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' = m_1.\dot{r}.\vec{w}^0$, siendo $\vec{w}^0$ un vector unitario de dirección y sentido de la velocidad del centro de masas, se tiene que es

$$\vec{v}_c = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\dot{r}.\vec{w}^0$$

Velocidades que ambas partículas adquieren en el impacto:

Las velocidades de ambas partículas con respecto del centro de masas son:

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \Rightarrow \vec{v}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\dot{r}.\vec{u}^0$$

$$\vec{r}_2 = \frac{-m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \Rightarrow \vec{v}_2 = \frac{-m_1}{m_1 + m_2}\dot{r}.\vec{u}^0$$

($\vec{u}^0$ es un vector unitario en la dirección y sentido del movimiento de la partícula p_1 con respecto del centro de masas C).

Por la regla de suma vectorial podemos escribir:

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_c = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\dot{r}.\vec{u}^0 + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\dot{r}.\vec{w}^0$$

$$\vec{v}'_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_c = \frac{-m_1}{m_1 + m_2}\dot{r}.\vec{u}^0 + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\dot{r}.\vec{w}^0$$

Si, por simplicidad, expresamos los momentos lineales, será:

$$\begin{cases} \vec{p}'_1 = & m.\dot{r}.\vec{u}^0 + & \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}p_1.\vec{w}^0 \\ \vec{p}'_2 = & -m.\dot{r}.\vec{u}^0 + & \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}p_1.\vec{w}^0 \end{cases}$$

donde hemos llamado

$$m = \frac{m_1 . m_2}{m_1 + m_2}$$

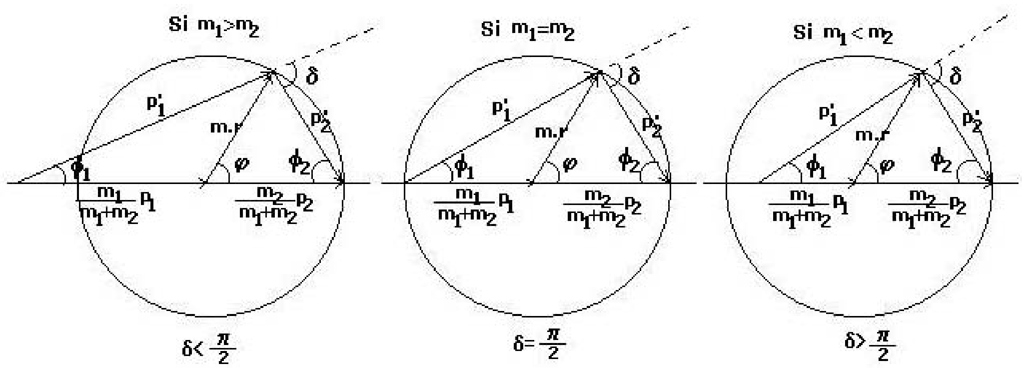
(masa reducida del sistema de las dos partículas)

Obviamente son iguales en módulo dos de los sumandos:

$$\left| m.\dot{r}.\vec{u}^0 \right| = \left| \frac{m_2}{m_1 + m_2} p_1 . \vec{w}^0 \right|$$

Angulo de desviación de ambas partículas después del impacto:

Podemos representar gráficamente sobre una circunferencia los vectores anteriores, de modo que se verifiquen las expresiones obtenidas antes. Vemos que el ángulo de desviación entre las direcciones del movimiento de ambas partículas adquiere un valor de 90º si ambas partículas tienen igual masa, y es menor de 90º si la masa de la partícula impactante, m_1, es mayor que la masa en reposo m_2:



El ángulo que forman las direcciones de ambas partículas después del impacto es δ, y observamos dela figura que es $\delta = \phi_1 + \phi_2$.

Y se tiene: $\phi_1 = tg \dfrac{m_2 . sen\varphi}{m_1 + m_2 . \cos\varphi}$, $\phi_2 = \dfrac{\pi - \varphi}{2}$, por lo tanto es:

$$\delta = \phi_1 + \phi_2 = arctg\left[\frac{m_2 . sen\varphi}{m_1 + m_2 . \cos\varphi} \right] + \frac{\pi - \varphi}{2}$$

Siendo φ el ángulo que forma la dirección del movimiento del centro de masas con la recta que une a ambas partículas.

Valor máximo de la desviación de la partícula impactante:

El ángulo ϕ_1 que forma la dirección de la partícula impactante con respecto a la línea recta que unía a ambas partículas puede tener un valor cualquiera si $m_1<m_2$, pero si $m_2>m_1$, el valor máximo correspondería al caso en el que el vector $\vec{p}'_2$ tiene dirección tangente a la circunferencia.

De la figura, se tiene que

$$sen\phi_{1\max} = \frac{m.\dot{r}}{\frac{m_1}{m_1+m_2}p_1} = \frac{\frac{m_1.m_2}{m_1+m_2}.\dot{r}}{\frac{m_1.m_1}{m_1+m_2}\dot{r}} = \frac{m_2}{m_1}$$

Por lo cual

$$\phi_{1\max} = arcsen\left(\frac{m_2}{m_1}\right)$$

El valor absoluto de la velocidad de cada partícula:

Podemos obtener fácilmente el módulo de la velocidad con la que cada partícula sale desviada después del impacto sin más que aplicar en la anterior figura el teorema del coseno para determinar v'_1 y el teorema de los senos para determinar v'_2.

- Determinación del valor absoluto de la velocidad de la partícula p_1 después del choque:

Del teorema del coseno en el triángulo de la izquierda:

$$p'^2_1 = m_1^2.v'^2_1 = \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2}p_1^2 + m^2.\dot{r}^2 + 2\frac{m_1}{(m_1+m_2)}p_1.m.\dot{r}.\cos\varphi =$$
$$= \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\left[m_1^2.\dot{r}^2 + m_2^2\dot{r}^2 + 2.m_1.m_2.\dot{r}^2.\cos\varphi\right]$$

por tanto:

$$v'_1 = \frac{1}{m_1+m_2}\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\cos\varphi}.\dot{r}$$

Del teorema de los senos en el triángulo de la derecha:

$$\frac{p'_2}{sen\varphi} = \frac{m\dot{r}}{sen\phi_2} \Rightarrow p'_2 = m\dot{r}\frac{sen\varphi}{sen\phi_2} \Rightarrow m_2 v'_2 = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\dot{r}\frac{sen\varphi}{sen\phi_2} \Rightarrow v'_2 = \frac{m_1\dot{r}}{m_1+m_2}\frac{sen\varphi}{sen\phi_2}$$

y siendo $sen\varphi = 2.sen\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$, $\quad sen\varphi_2 = sen\left(\frac{\pi-\varphi}{2}\right) = sen\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right) = \cos\frac{\varphi}{2}$

se tiene, finalmente:

$$v'_2 = \frac{m_1\dot{r}}{m_1+m_2}\frac{sen\varphi}{sen\phi_2} = \frac{m_1\dot{r}}{m_1+m_2}\frac{2.sen\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{2m_1\dot{r}}{m_1+m_2}.sen\frac{\varphi}{2}$$

por tanto:

$$v'_2 = \frac{2m_1\dot{r}}{m_1+m_2}sen\frac{\varphi}{2}$$

En el caso particular de que ambas partículas, impactante e impactada, tengan la misma masa, estas expresiones de la velocidad de cada una de ellas se simplifica bastante:

$$v'_1 = \frac{1}{2m_1}\sqrt{m_1^2+m_1^2+2.m_1^2\cos\varphi}.\dot{r} = \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}.\dot{r} = \dot{r}.\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$v'_2 = \frac{2m_1\dot{r}}{m_1+m_1}sen\frac{\varphi}{2} = \dot{r}.sen\frac{\varphi}{2}$$

Sobre el choque frontal de dos partículas:

Corresponde al caso en el que $\varphi = \pi$, es decir, al caso en el que los momentos lineales de ambas partículas colisionadas, $\vec{p}'_1, \vec{p}'_2$, tienen igual dirección (en la figura se encuentran contenidos en el mismo diámetro de la circunferencia).

El sentido del movimiento, sin embargo, puede ser el mismo, o puede ser de contrario sentido, o bien, finalmente, puede quedarse en reposo la partícula impactante p1, dependiendo todo ello de la masa relativa de ambas partículas de la manera siguiente:

- Si $m_1>m_2$, entonces los momentos lineales, $\vec{p}'_1, \vec{p}'_2$, tienen igual sentido. Las partículas se mueven, después del impacto, en la misma dirección y sentido.

- Si $m_1<m_2$, entonces los momentos $\vec{p}'_1, \vec{p}'_2$ tienen contrario sentido. Al impactar, pues, ambas partículas se mueven en la misma dirección pero con contrario sentido.

- Si $m_1=m_2$, entonces es $\vec{p}'_1 = 0$ y la partícula impactante queda en reposo en el punto de impacto.

Valores de las velocidades de ambas partículas en el choque frontal:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}.\dot{r} \qquad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}.\dot{r}$$

donde observamos que si $m_1=m_2$: $v'_1 = 0, \quad v'_2 = \dot{r}$

Energía que transfiere la partícula impactante a la partícula impactada en el choque frontal:

Puesto que en el choque frontal el valor de la velocidad v'_2 de la partícula impactada es el mayor posible (se hace $sen\frac{\varphi}{2} = 1)$, la energía que recibe es, por consiguiente, la mayor posible:

$$E'_{2\max} = \frac{1}{2}m_2 v'^2_2 = \frac{1}{2}m_2\left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \dot{r}^2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}\frac{1}{2}m_1\dot{r}^2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}.E_1$$

Siendo E_1 la energía cinética de la partícula impactante antes de producirse la colisión.

Esta es, por tanto, la fracción de energía que la partícula incidente transfiere a la partícula en reposo al producirse el choque frontal.

Bibliografía:

LANDAU, L., LIFCHITZ, E., Curso de Física Teórica, Vol-I:Mecánica. Editorial Mir, Moscu, 1982.