# ECUACION DEL MOVIMIENTO DE LAS PARTICULAS CON CARGA ELECTRICA

**RODOLFO H CARABIO**

**ECUACION DEL MOVIMIENTO DE LAS CARGAS ELECTRICAS**

Las partículas con carga eléctrica radian energía electromagnética al ser aceleradas por una fuerza externa, esto ha sido establecido teóricamente en la teoría electromagnética de J.C Maxwell. Dicha radiación transporta energía y por consiguiente influye en el efecto dinámico que la fuerza causa en la partícula cargada con respecto a una partícula sin carga en la cual se cumplen las leyes de Newton en su forma habitual

La potencia radiada por una carga eléctrica en movimiento acelerado se determina mediante la formula de Larmor

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}$$

Supongamos el caso mas simple en el que sobre la carga eléctrica actúa una fuerza constante en el tiempo cuyo vector es coincidente con el vector velocidad de la partícula. La fuerza externa aplica una potencia que varía la energía cinética con el tiempo. Resulta fácil de ver que la variación en la unidad de tiempo de dicha energía cinética es la diferencia entre la potencia exterior entregada y la potencia electromagnética radiada tal como se anota a continuación

$$1] \quad \frac{d}{dt}(mv^2/2) = F.v - \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

Hagamos la sustitución para abreviar los símbolos utilizados

$$B = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}$$

Podemos anotar la ecuación en la forma.

$$mv\frac{dv}{dt} = F.v - B\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

Resulta una ecuación diferencial no lineal

$$B\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + mv.\frac{dv}{dt} - Fv = 0$$

Resolviendo la ecuación de 2º grado para la incógnita (dv/dt)

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-m.v + \sqrt{m^2v^2 + 4BF.v}}{2B}$$

Separando las variables:

$$\frac{dv}{\sqrt{m^2v^2 + 4BF.v} - mv} = \frac{dt}{2B}$$

Podemos proceder a la integración:

$$\frac{t}{2B} = \int_0^v \frac{dv}{m\left[\sqrt{v^2 + \dfrac{4BF}{m^2}v} - v\right]}$$

Haciendo la sustitución

$$k = \frac{4BF}{m^2}$$

Y procediendo a racionalizar la fracción resulta:

$$m\frac{t}{2B} = \int_0^v \frac{dv}{(\sqrt{v^2 + kv} - v)} \frac{(\sqrt{v^2 + kv} + v)}{(\sqrt{v^2 + kv} + v)}$$

$$m\frac{t}{2B} = \int_0^v \frac{(\sqrt{v^2 + kv} + v)}{kv} dv$$

$$km\frac{t}{2B} = \int_0^v \left(\sqrt{1 + \frac{k}{v}} + 1\right).dv$$

$$km\frac{t}{2B} = v + \int_0^v \sqrt{1 + \frac{k}{v}}.dv$$

Haciendo la sustitución:

$$k / v = \tan^2 ø$$

$$v = k.\cot^2 ø$$

$$\int \sqrt{1+\frac{k}{v}}.dv = \int \sqrt{1+\tan^2 ø}.k(-2ctgø.\cos ec^2 ø).dø$$

$$\int \sqrt{1+\frac{k}{v}}.dv = -2k\int \sec ø.\cot ø.\cos ec^2 ø.dø$$

$$\int \sqrt{1+\frac{k}{v}}.dv = -2k\int \frac{1}{\cos ø}\frac{\cos ø}{senø}.\frac{dø}{sen^2 ø}$$

$$\int \sqrt{1+\frac{k}{v}}.dv = -2k\int \frac{dø}{sen^3 ø}$$

$$\int \sqrt{1+\frac{k}{v}}.dv = -2k\int \cos ec^3 ø.dø$$

Luego de la integración queda:

$$\int \sqrt{1+\frac{k}{v}}.dv = -k\left(\cot ø.\cos ecø + \ln \tan ø/2\right)$$

Restituyendo el valor

$$k/v = \tan^2 ø \rightarrow \cot ø = \sqrt{\frac{v}{k}}$$

$$\rightarrow \cos ecø = \sqrt{1+\frac{v}{k}}$$

$$\rightarrow \tan ø/2 = \sqrt{1+\frac{v}{k}} - \sqrt{\frac{v}{k}}$$

E introduciéndolo en la integral resulta:

$$k.m\frac{t}{2B} = v + k\sqrt{\frac{v}{k}}\sqrt{1+\frac{v}{k}} - k.\ln\left(\sqrt{1+\frac{v}{k}} - \sqrt{\frac{v}{k}}\right)$$

$$t = \frac{2B}{(4BF/m^2)m}v + \frac{2B}{m}\left[\sqrt{\frac{v}{k}\left(1+\frac{v}{k}\right)} - \ln\left(\sqrt{1+\frac{v}{k}} - \sqrt{\frac{v}{k}}\right)\right]$$

Se obtiene finalmente la ecuación del movimiento en forma sintética para el tiempo

$$2] \quad t = \frac{mv}{2F} + \frac{\mu_0 q^2}{3\pi.mc}\left[\sqrt{\frac{v}{k}\left(1+\frac{v}{k}\right)} - \ln\left(\sqrt{1+\frac{v}{k}} - \sqrt{\frac{v}{k}}\right)\right]$$

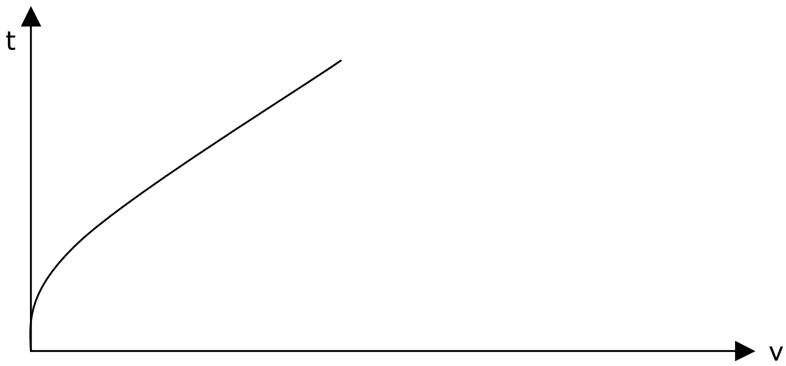
$$k = 2\mu_0 q^2.F / 3\pi m^2 c$$

Siendo k un valor constante asociado a la partícula acelerada en función de su carga y masa, la fuerza F impulsora, su unidad es una unidad de velocidad (velocidad electromagnética)

La ecuación 2] del movimiento de la partícula cargada nos indica el tiempo que la carga (q) de masa (m) baja la acción de una fuerza constante (F) alcanza la velocidad (v)

El tema del movimiento de una partícula cargada baja la acción de una fuerza impulsora ha sido objeto de estudio y polémica a tal punto que algunos autores consideran que la ley de Abraham - Lorentz de la fuerza de frenado por radiación no tiene aplicación general (*), como vemos este enfoque descarta tal problema mediante un abordaje distinto del tema en cuestión

La grafica de la función 2] del tiempo empleado en función de la velocidad alcanzada tal como sigue tiene el aspecto:




Al momento cero la aceleración tiende a 0, es decir que la emisión de radiación electromagnética ralentiza el efecto de la fuerza impulsora de forma máxima en tal instante, es como si dicha radiación aumentara la inercia de la partícula cargada a un valor infinito, esto no debe considerarse como un error o una imposibilidad física, pues la función representada es una función continua en todo el intervalo de cero a infinito

Cada caso según el tipo de fuerza considerada tendrá su ecuación asociada, por ejemplo para el caso de que la partícula cargada este sometida a una fuerza del tipo elástico como el caso del oscilador armónico tendrá la ecuación correspondiente que puede deducirse a partir de la expresión 1]

$$\frac{d}{dt}(mv^2/2) = F.v - \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

$$F = -kx$$

$$\frac{d}{dt}(mv^2/2) = -kx.v - \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

Aquí para poder escribir la ecuación de forma apropiada se hace la sustitución:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Introduciéndola en la ecuación

$$mv\frac{dv}{dt} = -kx.v - B\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

Resulta la ecuación del movimiento de la partícula cargada en el oscilador armónico:

$$B\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + m.\frac{dx}{dt}.\frac{d^2x}{dt^2} + kx.\frac{dx}{dt} = 0$$

Que dejo al lector su posibilidad de resolución mediante la función del tipo:

$$x = A.\exp(bt)$$

**Fuentes:**

http://es.scribd.com/doc/47775252/11-Radiacion (Pág. 467)

**Rodolfo Hector CARABIO**

**rodolfohectorcarabio@yahoo.com.ar**