REPRESENTACIÓN COMPLEJA DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL. FASORES COMPLEJOS

1. Introducción. Representación fasorial:

1.1. La expresión fasorial:

Una magnitud ondulatoria A que podamos hacer que dependa cosinusoidalmente del tiempo, con frecuencia ϖ y ángulo de fase φ_0 es de la forma

$$A = A_0.\cos(\varpi t + \varphi_0)$$

Esta expresión puede expresarse de forma que podamos separar la parte temporal, esto es, la parte dependiente del tiempo t, de la parte fasorial, o sea, de la parte que depende del ángulo de fase φ_0.

Para ello podemos usar la notación compleja. Así, podemos considerar que la anterior expresión es la parte real de la expresión compleja dada por

$$A_0.\cos(\varpi t + \varphi_0) + i.A_0 sen(\varpi t + \varphi_0)$$

donde es i la unidad imaginaria de los números complejos ($i^2=-1$).

En definitiva, es

$$A = \mathrm{Re}[A_0.\cos(\varpi t + \varphi_0) + i.A_0 sen(\varpi t + \varphi_0)] = \mathrm{Re}\left[A_0.e^{i.(\varpi t+\varphi_0)}\right] = \mathrm{Re}\left[A_0.e^{i\varphi_0}.e^{i\varpi t}\right] = \mathrm{Re}\left[\alpha.e^{i\varpi t}\right]$$

Donde $\alpha = A_0 e^{i\varphi_0}$ es la parte fasorial y $e^{i\varpi t}$ es la parte que depende del tiempo. Llamaremos a $\alpha = A_0 e^{i\varphi_0}$ fasor complejo de la magnitud A.

En definitiva, las magnitudes de naturaleza ondulatoria en el tiempo, con frecuencia ϖ y ángulo de fase φ_0, siempre expresables mediante un coseno, ya sean vectores o escalares, pueden expresarse también fasorialmente como la parte real del producto de un fasor complejo por la exponencial de $i\varpi t$:

- Si es una magnitud escalar: $q = \mathrm{Re}\left[\lambda.e^{i\varpi t}\right]$, λ fasor complejo escalar.
- Si es una magnitud vectorial: $\vec{M} = \mathrm{Re}\left[\vec{\mu}.e^{i\varpi t}\right]$, $\vec{\mu}$ fasor complejo vectorial.

1.2. Expresión en función de las componentes reales e imaginarias del fasor complejo:

a) El caso de magnitud escalar:

Si consideramos la magnitud escalar $q = \mathrm{Re}\left[\lambda.e^{i\varpi t}\right]$, el correspondiente fasor complejo puede expresarse en forma binómica mediante su parte real su parte imaginaria $\lambda = q_0.e^{i\varphi_0} = \lambda_r + i.\lambda_i$.

Por tanto:

$$\lambda.e^{i\varpi t} = (\lambda_r + i\lambda_i).(\cos\varpi + isen\,\varpi t) = (\lambda_r.\cos\varpi t - \lambda_i sen\,\varpi t) + i.(\lambda_i \cos\varpi t + \lambda_r sen\,\varpi t)$$

quedando:

$$q = \mathrm{Re}\left[\lambda.e^{i\varpi t}\right] = \mathrm{Re}\left[(\lambda_r + i\lambda_i).(\cos\varpi + isen\,\varpi t)\right] = \lambda_r.\cos\varpi t - \lambda_i sen\,\varpi t$$

así pues, la expresión de la magnitud ondulatoria escalar *q* en función de las componentes real e imaginaria del fasor complejo, es:

$$q = \lambda_r.\cos\varpi t - \lambda_i sen\,\varpi t$$

b) Extensión al caso vectorial:

$$\vec{M} = \mathrm{Re}\left[\vec{\mu}.e^{i\varpi t}\right]$$

($\vec{\mu}$ fasor vectorial complejo)

b.1) Expresión en función de las componentes real e imaginaria de cada una de las componentes del fasor vectorial complejo:

Sea la magnitud vectorial $\vec{M} = (M_x, M_y, M_z) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mu}.e^{i\varpi t}\right] = \mathrm{Re}\left[(\mu_x, \mu_y, \mu_z).e^{i\varpi t}\right]$

se tiene por tanto que

$$(M_x, M_y, M_z) = \mathrm{Re}\left[(\mu_x, \mu_y, \mu_z).e^{i\varpi t}\right] = \left(\mathrm{Re}\left[\mu_x.e^{i\varpi t}\right], \mathrm{Re}\left[\mu_y.e^{i\varpi t}\right], \mathrm{Re}\left[\mu_z.e^{i\varpi t}\right]\right)$$

Si consideramos las partes reales e imaginarias de los fasores complejos de las componentes de la magnitud vectorial, tendremos

$$\mu_x = \mu_{xr} + i.\mu_{xi} \Rightarrow \mathrm{Re}\left[\mu_x.e^{i\varpi t}\right] = \mu_{xr}.\cos\varpi t - .\mu_{xi} sen\,\varpi t$$
$$\mu_y = \mu_{yr} + i.\mu_{yi} \Rightarrow \mathrm{Re}\left[\mu_y.e^{i\varpi t}\right] = \mu_{yr}.\cos\varpi t - .\mu_{yi} sen\,\varpi t$$
$$\mu_z = \mu_{zr} + i.\mu_{zi} \Rightarrow \mathrm{Re}\left[\mu_z.e^{i\varpi t}\right] = \mu_{zr}.\cos\varpi t - .\mu_{zi} sen\,\varpi t$$

En definitiva:

$$\left(M_x, M_y, M_z\right) = \left(\mu_{xr}.\cos\varpi t - .\mu_{xi} sen\,\varpi t, \mu_{yr}.\cos\varpi t - .\mu_{yi} sen\,\varpi t, \mu_{zr}.\cos\varpi t - .\mu_{zi} sen\,\varpi t\right)$$

b.2) Expresión en función de las componentes real e imaginaria del fasor vectorial complejo:

El fasor complejo $\vec{\mu}$ puede expresarse por sus componentes vectoriales real e imaginaria: $\vec{\mu} = \vec{\mu}_r + i\vec{\mu}_i$

Y resulta:

$$\vec{M} = \mathrm{Re}\left[\vec{\mu}.e^{i\varpi t}\right] = \mathrm{Re}\left[\left(\vec{\mu}_r + i\vec{\mu}_i\right).\left(\cos\varpi + isen\,\varpi t\right)\right] = \vec{\mu}_r.\cos\varpi t - \vec{\mu}_i sen\,\varpi t$$

2. La representación compleja de las ecuaciones de Maxwell:

Usando el método de representación fasorial para magnitudes escalares y vectoriales podemos representar fasorialmente las magnitudes escalares y vectoriales que figuran en las ecuaciones de Maxwell del campo electromagnético, y obtener por tanto la expresión fasorial compleja de las ecuaciones:

Ecuaciones de Maxwell:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}.\vec{E} &= 4\pi\rho \\
\vec{\nabla}.\vec{H} &= 0 \\
\vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\
\vec{\nabla} \wedge \vec{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}
\end{aligned}$$

Expresiones fasoriales de los escalares y vectores que aparecen en las ecuaciones:

Campo eléctrico: $\vec{E} = \mathrm{Re}\left[\vec{\varepsilon}.e^{\varpi t}\right] = \vec{\varepsilon}_r.\cos\varpi t - \vec{\varepsilon}_i.sen\,\varpi t$

Campo magnético: $\vec{H} = \mathrm{Re}\left[\vec{h}.e^{\varpi t}\right] = \vec{h}_r.\cos\varpi t - \vec{h}_i.sen\,\varpi t$

Densidad de carga: $\rho = \mathrm{Re}\left[P.e^{i\varpi t}\right] = P_r.\cos\varpi t - P_i.sen\,\varpi t$

Densidad de corriente: $\vec{j} = \mathrm{Re}\left[\vec{J}.e^{\varpi t}\right] = \vec{J}_r.\cos\varpi t - \vec{J}_i.sen\,\varpi t$

Veamos en definitiva como quedan las ecuaciones al introducir los fasores complejos:

a) La primera ecuación:

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = 4\pi.\rho \qquad \left(\vec{E} = \mathrm{Re}\left[\vec{\varepsilon}.e^{i\varpi t}\right], \rho = \mathrm{Re}\left[P.e^{i\varpi t}\right]\right)$$

$$\vec{E} = \quad \vec{\varepsilon}_r.\cos\varpi t - \vec{\varepsilon}_i.sen\,\varpi t$$
$$\rho = \quad P_r.\cos\varpi t - P_i.sen\,\varpi t$$

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \vec{\nabla}.\left(\vec{\varepsilon}_r.\cos\varpi t - \vec{\varepsilon}_i.sen\,\varpi t\right) = \vec{\nabla}.\vec{\varepsilon}_r.\cos\varpi t - \vec{\nabla}.\vec{\varepsilon}_i.sen\,\varpi t = 4\pi\left(P_r.\cos\varpi t - P_i.sen\,\varpi t\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}.\vec{\varepsilon}_r.\cos\varpi t - \vec{\nabla}.\vec{\varepsilon}_i.sen\,\varpi t = 4\pi P_r.\cos\varpi t - 4\pi P_i.sen\,\varpi t$$

$$\begin{array}{ll} si\ \varpi t = 0 \quad \Rightarrow & \vec{\nabla}.\vec{\varepsilon}_r = 4\pi.P_r \\ si\ \varpi t = \pi/2 \Rightarrow & \vec{\nabla}.\vec{\varepsilon}_i = 4\pi.P_i \end{array} \Rightarrow \vec{\nabla}\left(\vec{\varepsilon}_r + i\vec{\varepsilon}_i\right) = 4\pi P_r + i4\pi P_i = 4\pi.\left(P_r + iP_i\right)$$

En definitiva:

$$\boxed{\vec{\nabla}.\vec{\varepsilon} = 4\pi.P}$$

b) La segunda ecuación:

$$\vec{\nabla}.\vec{H} = 0 \qquad \left(\vec{H} = \mathrm{Re}\left[\vec{h}.e^{i\varpi t}\right]\right)$$

$$\vec{H} = \vec{h}_r.\cos\varpi t - \vec{h}_i.sen\,\varpi t$$

$$\vec{\nabla}.\vec{H} = \vec{\nabla}.\vec{h}_r.\cos\varpi t - \vec{\nabla}.\vec{h}_i.sen\,\varpi t = 0$$

$$\begin{array}{ll} si\ \varpi t = 0 \quad \Rightarrow & \vec{\nabla}.\vec{h}_r = 0 \\ si\ \varpi t = \pi/2 \Rightarrow & \vec{\nabla}.\vec{h}_i = 0 \end{array} \Rightarrow \vec{\nabla}\left(\vec{h}_r + i\vec{h}_i\right) = 0$$

Por consiguiente:

$$\boxed{\vec{\nabla}\vec{h} = 0}$$

c) La tercera ecuación:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{1}{c}.\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad \left(\vec{E} = \operatorname{Re}\left[\vec{\varepsilon}.e^{i\varpi t}\right], \vec{H} = \operatorname{Re}\left[\vec{h}.e^{i\varpi t}\right]\right)$$

$$\vec{E} = \vec{\varepsilon}_r.\cos\varpi t - \vec{\varepsilon}_i.sen\,\varpi$$
$$\vec{H} = \vec{h}_r.\cos\varpi t - \vec{h}_i.sen\,\varpi t$$

Se tiene:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\varepsilon}_r.\cos\varpi t - \vec{\varepsilon}_i.sen\,\varpi t\right) = \vec{\nabla} \wedge \vec{\varepsilon}_r.\cos\varpi t - \vec{\nabla} \wedge \vec{\varepsilon}_i.sen\,\varpi t$$

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{Re}\left[\vec{h}.e^{i\varpi t}\right] = -\frac{1}{c}\operatorname{Re}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{h}.e^{i\varpi t}\right)\right] = -\frac{1}{c}\operatorname{Re}\left[\vec{h}.i.\varpi.e^{i\varpi t}\right] =$$
$$= -\frac{1}{c}.\operatorname{Re}\left[\left(\vec{h}_r + i.\vec{h}_i\right).i.\varpi.\left(\cos\varpi t + i.sen\,\varpi t\right)\right] =$$
$$= -\frac{1}{c}\operatorname{Re}\left[i.\varpi.\left(\left(\vec{h}_r.\cos\varpi t - .\vec{h}_i.sen\,\varpi t\right) + i.\left(\vec{h}_r.sen\,\varpi t + .\vec{h}_i.\cos\varpi t\right)\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{c}\operatorname{Re}\left[-\varpi.\left(\vec{h}_r.sen\,\varpi t + \vec{h}_i.\cos\varpi t\right) - i.\varpi.\left(\vec{h}_r.\cos\varpi t - \vec{h}_i.sen\,\varpi\right)\right] =$$
$$= \frac{\varpi}{c}\left(\vec{h}_r.sen\,\varpi t + \vec{h}_i.\cos\varpi\right)$$

Por tanto:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\varepsilon}_r.\cos\varpi t - \vec{\nabla} \wedge \vec{\varepsilon}_i.sen\,\varpi t = \frac{\varpi}{c}\left(\vec{h}_r.sen\,\varpi t + \vec{h}_i.\cos\varpi\right)$$

$$si\ \varpi t = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{\varepsilon}_r = \frac{\varpi}{c}.\vec{h}_i$$
$$si\ \varpi t = \pi/2 \Rightarrow \quad -\vec{\nabla} \wedge \vec{\varepsilon}_i = \frac{\varpi}{c}.\vec{h}_r \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{\varepsilon}_i = -\frac{\varpi}{c}.\vec{h}_r \qquad \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{\varepsilon}_r + i.\vec{\nabla} \wedge \vec{\varepsilon}_i = \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\varepsilon}_r + i\vec{\varepsilon}_i\right) =$$
$$= \frac{\varpi}{c}.\vec{h}_i - i.\frac{\varpi}{c}.\vec{h}_r = i.\frac{\varpi}{c}.\left(-\vec{h}_r - i.\vec{h}_i\right) = -i.\frac{\varpi}{c}\left(\vec{h}_r + i.\vec{h}_i\right)$$

Por lo tanto es:

$$\boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{\varepsilon} = -i.\frac{\varpi}{c}.\vec{h}}$$

d) La cuarta ecuación:

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{H}=\frac{1}{c}.\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}.\vec{j}\qquad\left(\vec{E}=\mathrm{Re}\left[\vec{\varepsilon}.e^{i\varpi t}\right],\vec{H}=\mathrm{Re}\left[\vec{h}.e^{i\varpi t}\right],\vec{j}=\mathrm{Re}\left[\vec{J}.e^{i\varpi t}\right]\right)$$

$$\vec{E}=\vec{\varepsilon}_r.\cos\varpi t-\vec{\varepsilon}_i.sen\,\varpi$$

$$\vec{H}=\vec{h}_r.\cos\varpi t-\vec{h}_i.sen\,\varpi t$$

os

Se tiene:

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{H}=\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{h}_r.\cos\varpi t-\vec{h}_i.sen\,\varpi t\right)=\vec{\nabla}\wedge\vec{h}_r.\cos\varpi t-\vec{\nabla}\wedge\vec{h}_i.sen\,\varpi t$$

$$\frac{4\pi}{c}\vec{j}=\frac{4\pi}{c}\vec{J}_r.\cos\varpi t-\frac{4\pi}{c}\vec{J}_i.sen\,\varpi t$$

$$-\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\frac{1}{c}\mathrm{Re}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\varepsilon}.e^{i\varpi t}\right)\right]=\frac{1}{c}\mathrm{Re}\left[\vec{\varepsilon}.i.\varpi.e^{i\varpi t}\right]=\frac{1}{c}\mathrm{Re}\left[\left(\vec{\varepsilon}_r+i.\vec{\varepsilon}_i\right).i.\varpi.\left(\cos\varpi t+i.sen\,\varpi t\right)\right]=$$

$$=-\frac{\varpi}{c}\left[\vec{\varepsilon}_r.sen\,\varpi t+\vec{\varepsilon}_i.\cos\varpi t\right]$$

O sea:

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{h}_r.\cos\varpi t-\vec{\nabla}\wedge\vec{h}_i.sen\,\varpi t=-\frac{\varpi}{c}\left[\vec{\varepsilon}_r.sen\,\varpi t+\vec{\varepsilon}_i.\cos\varpi t\right]+\frac{4\pi}{c}\vec{J}_r.\cos\varpi t-\frac{4\pi}{c}\vec{J}_i.sen\,\varpi t$$

$$si\ \varpi t=0\quad\Rightarrow\qquad\vec{\nabla}\wedge\vec{h}_r=-\frac{\varpi}{c}.\vec{\varepsilon}_i+\frac{4\pi}{c}\vec{J}_r$$

$$si\ \varpi t=\pi/2\Rightarrow\quad-\vec{\nabla}\wedge\vec{h}_i=-\frac{\varpi}{c}.\vec{\varepsilon}_r-\frac{4\pi}{c}.\vec{J}_i\Rightarrow\vec{\nabla}\wedge\vec{h}_i=\frac{\varpi}{c}\vec{\varepsilon}_r+\frac{4\pi}{c}.\vec{J}_i$$

Finalmente obtenemos:

$$\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{h}_r+i\vec{h}_i\right)=-\frac{\varpi}{c}\vec{\varepsilon}_i+\frac{4\pi}{c}.\vec{J}_r+i\left(\frac{\varpi}{c}\vec{\varepsilon}_r+\frac{4\pi}{c}.\vec{J}_i\right)=$$

$$=i.\frac{\varpi}{c}\left(\vec{\varepsilon}_r+i\vec{\varepsilon}_i\right)+\frac{4\pi}{c}\left(\vec{J}_r+i\vec{J}_i\right)$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\wedge\vec{h}=i.\frac{\varpi}{c}\vec{\varepsilon}+\frac{4\pi}{c}\vec{J}}$$

Se tiene en definitiva, para las ecuaciones de Maxwell en forma fasorial compleja:

$$\vec{\nabla}.\vec{\varepsilon} = 4\pi.P$$

$$\vec{\nabla}\vec{h} = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\varepsilon} = -i.\frac{\varpi}{c}.\vec{h}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{h} = i.\frac{\varpi}{c}\vec{\varepsilon} + \frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

(siendo $P, \vec{J}, \vec{\varepsilon}, \vec{h}$ los fasores complejos respectivos de la densidad de carga, densidad de corriente, campo eléctrico y campo magnético).

3. Documentación:

Básicos:
ADLER, Richard - CHU, Lan Jen, y FANO, Robert M.
Electromagnetic Energy Transmission and Radiation.
Edit John Wiley and Sons, Inc. 1968, New York.
PANOFSKY, Wolfgang y PHILIPS, Melba
Classical Electricity and Magnetism.
Edit Adisson-Wesley, 2ª Edición, 1962, Cambridge. Massachusetts
LANGMUIR, Robert V.
Electromagnetic Fields and Waves.
Edit Mc Graw Hill, 1961. New york

Ampliación:
FELSEN, L.B. y MARCUVITZ, N.
Radiation and scattering of Waves.
Edit IEE. 1994. Cambridge. N. Jersey
COLLIN, R.E.
Field Theory of Guided Waves
Edit IEE, 1991, Cambridge. New Jersey
BALANIS, C.A.
Advanced Engineering Mathematics
Edit John Wiley, 1989. New York
VAN BLADEL, J.
Singular Electromagnetic Fields and Sources
Edit Oxford University Press, 1991. Oxford, U.K.
LANDAU,L_LIFSHITZ,E; Teoría Clásica de los Campos (Vol II del curso de Física Teórica), Edit. Reverté, Barcelona, 1960.

Carlos S. CHINEA
casanchi@teleline.es