GRAVITACIÓN (2da Parte)

Hugo A Fernández - hafernandez@fibertel.com.ar
Profesor Titular de Física Moderna - Universidad Tecnológica Nacional - Argentina

---

El espacio tiempo físico

Reconocer cual es la geometría que pueda describir las propiedades del espacio y el tiempo físico, es decir el ámbito donde ocurren los fenómenos naturales, es uno de los conocimientos más básicos e importantes de la Física.
Dos teorías de un mismo autor, Albert Einstein, conocidas como Especial y General, se disputan ese conocimiento con la particularidad de que en presencia de materia (energía) son mutuamente excluyentes, si una resultara correcta la otra no lo sería y viceversa.
Ambas teorías se basan en diferentes supuestas propiedades del espacio tiempo, ya que la Especial describe un espacio homogéneo e isótropo y un tiempo uniforme, y la General asume todo lo contrario, ninguna de esas simetrías del espacio tiempo está presente cuando hay una distribución no uniforme de energía.

La Teoría Especial de Relatividad, se ha manifestado sin contradicciones desde su génesis hace más de un siglo y ha provocado el mayor avance de la Física Moderna en todas sus ramas. La única limitación que se le adjudicaba, ello es la imposibilidad aparente de elaborar una teoría consistente de la gravitación, fue resuelto por Logunov en 1996 (Teoría Relativista de la Gravitación - revisión 2001), mostrando que el real problema fue el desconocimiento y no la teoría Especial.

La Teoría General de Relatividad es un modelo matemático de la gravitación que ha permitido dar explicaciones satisfactorias de algunos fenómenos astronómicos, pero contiene varias serias inconsistencias, principalmente con la electrodinámica y los fenómenos de radiación (ver Gravitación Parte I).

Contrariamente a la opinión establecida, es mi parecer que la Teoría General está a contramano de mucho del conocimiento adquirido, sea este la relatividad especial, la causalidad, las leyes universales de conservación, la electrodinámica o la mecánica cuántica, y que los pocos éxitos declamados que tienen sustento se deben a que en todos los casos corresponden a fenómenos en que la gravitación es prácticamente despreciable, en cuyo caso las aproximaciones eliminan las inconsistencias.

Históricamente fueron Galileo y Newton quienes aceptaron, desarrollaron y aplicaron el concepto milenario de un espacio euclídeo homogéneo e isótropo y un tiempo uniforme, creencia ancestral basada en la suposición de que los objetos materiales rígidos conservan su forma en cualquier lugar, orientación y movimiento del mismo, y en la existencia de fenómenos naturales periódicos.

Los avances matemáticos logrados a partir del siglo XIX, en particular por el desarrollo de la geometría diferencial, la teoría de grupos y la teoría de simetrías, mostraron que el comportamiento de la naturaleza en muchos casos estaba regido por la geometría del espacio tiempo físico, lo que abrió la posibilidad de que todos los fenómenos son como son debido a las propiedades del espacio-tiempo.

Un descubrimiento extraordinario lo dio el Teorema de Noether (1913) que demostró que los tres Principios Universales de Conservación se debían a las propiedades de simetría del espacio-tiempo, con la curiosidad de que el teorema es válido tanto en el espacio tiempo de Galileo-Newton como en el de Minkowski. Esta ambivalencia es debida a que cada uno de los principios de conservación se relaciona con una única propiedad (simetría) presente en ambos marcos del espacio-tiempo, a saber:

1. Conservación de la energía → uniformidad del tiempo.
2. Conservación de la cantidad de movimiento → homogeneidad del espacio.
3. Conservación del momento angular → isotropía del espacio

Otro caso interesante lo brindó la Mecánica Clásica, cuya formulación inicial usó tres principios (leyes de Newton) asumiendo, además, un espacio euclídeo y un tiempo uniforme independiente, ambos absolutos.
Sin embargo, esta teoría admite varias formulaciones diferentes. En el mismo espacio tiempo de Galileo-Newton hay otra alternativa más básica, que sólo necesita como principio las transformaciones de Galileo.

Transformaciones de Galileo

La relación entre sistemas inerciales en movimiento relativo uniforme según el eje x está dado por las Transformaciones de Galileo:

$$x' = x - V\,t \qquad y' = y \qquad z' = z$$

Fácilmente se obtienen las siguientes consecuencias:

- Contienen el Principio de Relatividad del movimiento y el Principio de Inercia.
- La conservación de la cantidad de movimiento se deduce.
- Las leyes 1^{a} y 3^{a} de Newton se deducen.
- La 2^{da} ley de Newton es una definición y no un principio.

Este enfoque, que fuera elaborado mucho tiempo después de la muerte de Galileo, estaba implícito en sus libros *"Mecánica"* (1600) y *"Diálogo de Dos Nuevas Ciencias"* (1638), aunque sin conformar una teoría útil de la mecánica debido a que faltaba el desarrollo del análisis matemático.

Es importante destacar que las Transformaciones de Galileo no pueden ser obtenidas como propiedad de la geometría euclídea E(3) porque el espacio y el tiempo tienen métricas separadas, es decir que son independientes, siendo ésta la mayor limitación del espacio tiempo de Galileo-Newton.

La pretensión de que las leyes de la Física estén contenidas en las propiedades del espacio tiempo requiere que la métrica del espacio matemático que lo represente sea una relación espacio temporal. Para comprender la importancia de ello debemos considerar algunos aspectos matemáticos del espacio euclídeo.

Un espacio n-dimensional es euclídeo si sus coordenadas, tomadas de a dos, forman planos cartesianos, y la función distancia entre dos puntos está dada por el teorema de Pitágoras. La función distancia (real ≥ 0) determina la geometría subyacente.
Un plano cartesiano reúne las siguientes dos propiedades: sus ejes coordenados son ortogonales y sus escalas son uniformes e idénticas.
En consecuencia, un espacio euclídeo (matemático) es homogéneo e isótropo. Estas propiedades son conocidas como "simetrías" propias del espacio E(3).

Diremos que un espacio presenta una simetría cuando ante una dada transformación de coordenadas existe al menos un invariante. Las simetrías están siempre ligadas al invariante y a la transformación correspondiente.

Las transformaciones de coordenadas no modifican la geometría del espacio, la cual depende exclusivamente de la función distancia. Aclaremos que en algunos tratados de matemática se asume erróneamente que una transformación que modifica la forma funcional de la métrica también modifica la geometría subyacente.

La geometría diferencial estudia las propiedades geométricas de un espacio métrico cualquiera utilizando el análisis matemático. Para ello el espacio debe ser continuo y las relaciones establecidas entre sus coordenadas y/o las posibles transformaciones de coordenadas deberán ser funciones continuas con derivadas continuas (se suele pedir al menos hasta el segundo orden de derivadas).
En un espacio continuo la función distancia queda expresada de manera diferencial y se la denomina *"métrica"*. En el caso euclídeo n-dimensional real es:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} dx_i^2$$

Si bien existen infinitas transformaciones posibles, resulta importante analizar un tipo particular de transformaciones simples, denominadas ***"isometrías"***.
Se definen como isometrías a aquellas transformaciones que dejan invariante la forma matemática de la métrica. En el caso euclídeo, la simetría correspondiente consiste en que transforman un sistema cartesiano en otro cartesiano idéntico.
Las isometrías en el espacio E(3) son:

1. **Traslaciones (3)**. Ejemplo: T(x): x = x' = x – A A cte.
   Las traslaciones conservan la homogeneidad del espacio (preservan las escalas).

   Comentario informativo
   Las traslaciones dan lugar a otro planteo consistente de la mecánica clásica, el que establece que las transformaciones de Galileo pueden ser deducidas si se postula el Principio de Inercia. Veamos brevemente su planteo.
   Si tomamos A como una función del tiempo A(t) (*operador evolución*), podemos obtener las Transformaciones de Galileo como aquellas que dejan invariante la aceleración. Debemos aclarar que esto es un artificio para relacionar espacio y tiempo.
   Se vincula el espacio y el tiempo mediante el *operador evolución* A(t), que aplicado a una traslación según el eje x resulta:

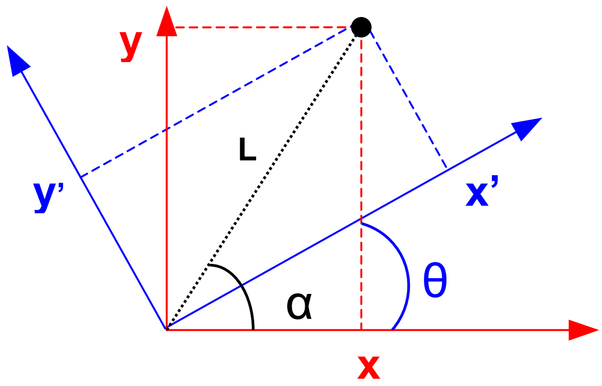
   $$x' = x - A(t)$$

   El Principio de Inercia establece que los sistemas inerciales son indistinguibles, indicando con ello que el reposo y el movimiento uniforme son condiciones que dependen del sistema de referencia.
   En consecuencia, si un punto material está libre de fuerzas en un dado sistema inercial, debe estarlo en todos los sistemas inerciales.
   Para ello se debe cumplir a' = a = 0.

   $$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} = 0 = \frac{d^2(x - A(t))}{dt^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2A(t)}{dt^2} = 0$$

   $$A(t) = V \cdot t \qquad V \text{ Constante}$$

1. **Rotaciones (3)**. Ejemplo: R(x ; y) : (x ; y) = (x' ; y')



x' = L cos (α – θ) = L [cos(α) cos(θ) + sen(α) sen(θ)] = x cos(θ) + y sen(θ)
y' = L sen (α – θ) = L [sen(α) cos(θ) - sen(θ) cos(α)] = - x sen(θ) + y cos(θ)

x' = a x + b y   a = cos(θ)   b = sen(θ)
y' = -b x + a y $a^2 + b^2 = 1$ (Condición de ortogonalidad)

En forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Las rotaciones preservan la isotropía.

2. **Inversiones (7)**. Ejemplo: x' = - x

Las inversiones o reflexiones no son consideradas aptas para la descripción del espacio físico debido a que aquellas que son admisibles pueden ser reemplazadas por rotaciones y las otras realizan cambios (reflexiones) que son inaceptables para objetos materiales macroscópicos.

La inversión de todas las coordenadas espaciales se denomina inversión de paridad. La consistencia física de la simetría por inversión de paridad depende de la dimensión del espacio matemático (en E (2) es válido y en E (3) no lo es).

Las condiciones de consistencia física para el E(3) son dos:
- Condición de forma
  Ante una inversión debe existir congruencia mediante rotaciones reales.
- Condición de orden
  Debe cumplirse la regla del tirabuzón.

Un análisis de estas condiciones permite establecer que la consistencia física de las inversiones depende de la dimensión del espacio matemático.

Nota.
Corresponde señalar que la teoría de simetrías resultó una herramienta central de la física teórica, principalmente en teoría de campos, mecánica cuántica y

física de partículas. En ese sentido desde mediados del siglo XX se consideró válida la simetría CPT (carga, paridad, tiempo), de manera general en procesos cuánticos, a pesar de que la simetría PT resulta inconsistente en el espacio de Minkowski. Ello dio lugar a controversias pues al introducir la inversión de la carga algunos especialistas aducen que se incorpora una nueva coordenada discreta, aumentando en 1 la dimensión del espacio.
Trabajos recientes auguran que la simetría CPT no se cumple:
"*T violation and the unidirectionality of time*", Joan Vaccaro (2011).
http://arxiv.org/pdf/0911.4528v3.pdf

En los tratados de matemática suelen llamar *movimientos del cuerpo rígido* a las 6 transformaciones T+R (3 traslaciones + 3 rotaciones), pues corresponden a sus 6 grados de libertad. Esta designación es confusa debido a que en el espacio euclídeo de Galileo ninguna coordenada se identifica con el tiempo y, en consecuencia, no hay movimiento físico.

Las isometrías del E(3) forman un *subgrupo* (de Galileo) pues las transformaciones cumplen con la propiedad asociativa, tienen inversa y existe la transformación nula.

De Euclides a Minkowski

Un inconveniente que tiene la formulación de la mecánica clásica es que el espacio y el tiempo tienen métricas separadas y los fenómenos dinámicos requieren su uso simultáneo, por lo cual ningún proceso dinámico puede estar implícito en la geometría del espacio o en la del tiempo por separado.
Para relacionar las métricas fue necesario utilizar un artificio (operador evolución), lo que permite obtener las Transformaciones de Galileo, pero ello no es una propiedad del espacio matemático.

Resulta evidente que disponer de una única métrica del espacio tiempo significará un aporte clave pues sus propiedades geométricas podrían describir comportamientos dinámicos.

Los fenómenos naturales periódicos sugieren que la evolución temporal es uniforme, siendo ésta una simetría similar en forma a la homogeneidad del espacio euclídeo.
En consecuencia, podemos intentar descubrir una geometría (métrica) adecuada al espacio-tiempo físico partiendo de un espacio euclídeo de 4 dimensiones E(4).
Esto aseguraría que las leyes válidas en un sistema de referencia conserven la forma matemática ante transformaciones isométricas, razón por la cual **todas las leyes de la Física válidas en un sistema serán las mismas en todos los sistemas** obtenidos por isometrías (contiene el primer postulado de Einstein).
Para ello identifiquemos el espacio tiempo físico con un espacio euclídeo de cuatro dimensiones, una de las cuales corresponderá al tiempo, y veamos que limitaciones y cambios deberemos hacer para tener una propuesta consistente.

$$E(4) \quad \rightarrow \quad \underbrace{x_0; x_1; x_2; x_3}_{w\,t;\; x\;;\; y\;;z} \qquad ds^2 = \sum_{j=0}^{3} dx_j{}^2$$

$$w > 0$$

La constante *w* (magnitud real y positiva) tiene unidades de velocidad y es necesaria para dimensionar adecuadamente (todo en unidades de longitud). La métrica resulta una distancia.
Cálculo de isometrías en el E (4).

- Traslaciones. $T = n$ (dimensión) = 4

- Rotaciones. $R = \binom{4}{2} = \frac{4\,!}{2\,!\,(4-2)\,!} = 6$

- Inversiones. $I_{(1)} + I_{(2)} + I_{(3)} + I_{(4)} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 15$

  El subíndice hace referencia a los ejes coordenados que se invierten.

Solamente trataremos las traslaciones y las rotaciones. Las inversiones aceptables físicamente pueden ser hechas mediante rotaciones.

Traslaciones *T (x), T (y), T (z), T (t)*.
El número de traslaciones simples (subgrupo abeliano de isometrías) es igual a la dimensión del espacio (n=4). Tres traslaciones espaciales (cambio del origen) y una temporal (ajuste del cero del reloj).
Las escalas se conservan, es decir que son los invariantes (longitudes e intervalos) relacionados con la homogeneidad espacial y la uniformidad temporal, siendo estas simetrías un requerimiento del espacio tiempo físico.

Rotaciones *R(x; y), R(y; z), R(x; z), R(x; t), R(y; t), R(z; t)* (junto a las inversiones forman el *grupo ortonormal*).
El número de rotaciones simples (subgrupo de isometrías) está dado por todas las combinaciones posibles de n=4 tomadas de a 2.

$$R = \binom{4}{2} = \frac{n\,!}{2\,!\,(n-2)\,!} = 6$$

Las tres rotaciones espaciales mantienen las escalas uniformes de las coordenadas cartesianas preservando los ángulos (invariantes), dando la misma propiedad de isotropía del espacio euclídeo E (3).

Las rotaciones espacio temporales contienen relaciones conceptuales importantes y deben ser analizadas cuidadosamente. Veremos una de ellas.
Una rotación *R(x;t)* es un sistema lineal del tipo:

x' = a x + b w t a = cos(θ) b = sen(θ)
w t' = -b x + a w t $a^2 + b^2 = 1$ (Condición de ortogonalidad)

Dado que aparecen la posición (x; x') y el tiempo (t; t') correspondientes a los dos sistemas de referencia, podemos calcular la velocidad de un punto material visto desde el sistema primado y su relación con la velocidad del mismo punto en el no primado.

$$v'_{x'} = \frac{dx'}{dt'} = \frac{a v_x + b w}{a - \frac{b}{w} v_x} = \frac{v_x + \frac{b}{a} w}{1 - \frac{b}{a}\frac{v_x}{w}}$$

Podemos eliminar b/a con la siguiente condición:

$$si\; v_x = 0 \quad \rightarrow \quad v'_{x'} = -V \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{a} w = -V \quad w > 0$$

$$v'_{x'} = \frac{v_x - V}{1 + \dfrac{v_x V}{w^2}}$$

Comprobamos que las rotaciones espacio temporales relacionan dos sistemas con movimiento relativo uniforme. Esto es sumamente importante porque se vincula al movimiento con las propiedades del espacio matemático propuesto.

Estudio de signos. La flecha del tiempo

De la definición de vector velocidad se deduce que la evolución temporal debe ser siempre una magnitud real > 0.

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v}\, dt \qquad d\mathbf{r'} = \mathbf{v'}\, dt$$

$$dt > 0 \qquad dt' > 0$$

El tiempo físico tiene una evolución en un solo sentido y no puede ser nula. A esta característica se la denomina *Flecha del Tiempo* y está relacionada con el Principio de Causalidad.

Dado que el desplazamiento elemental $d\mathbf{r}$ y la velocidad $\mathbf{v}$ tienen siempre la misma dirección y sentido, el incremento temporal elemental dt debe ser una magnitud real positiva no nula. Lo mismo vale en el sistema primado ($dt' > 0$).

Veamos los desplazamientos espaciales.

$$dx' = \left(a + \frac{bw}{v_x} \right) dx = a \left(1 - \frac{V}{v_x} \right) dx$$

Analizando los sentidos de los desplazamientos diferenciales para todas las variantes posibles de las velocidades v_x y V debe cumplirse a > 0 para que sea físicamente consistente.

Veamos los incrementos temporales.

$$dt' = \left(a - \frac{b}{w} v_x \right) dt = a \left(1 + \frac{v_x V}{w^2} \right) dt$$

Dado que dt y dt' deben ser positivos, se debe cumplir:

$$\frac{|v_x V|}{w^2} < 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} |v_x| \le w \\ |V| < w \end{array}$$

La desigualdad $|v_x| \le w$ (signo =) sale de un análisis posterior del coeficiente *a.*

Considerando que los sistemas inerciales son indistinguibles ante transformaciones isométricas, las mismas condiciones obtenidas valen en el sistema primado.

$$\left| v'_{x'} \right| \leq w$$

Inconsistencia del espacio euclídeo E(4)
Veamos ahora que la expresión de la velocidad en el sistema primado es inconsistente físicamente con las condiciones encontradas. La expresión es:

$$v'_{x'} = \frac{v_x - V}{1 + \frac{v_x V}{w^2}}$$

Nótese que las inconsistencias (velocidades > w) pueden ocurrir sólo cuando las dos velocidades (v_x *;* V) tienen signo diferente. En este caso el módulo del numerador es la suma de los módulos de las velocidades y el denominador es < 1, dando lugar a que existan velocidades > w.

La única solución posible es que se modifique el signo del segundo sumando del denominador, objetivo que se cumple si proponemos que w sea complejo (nace el Espacio de Minkowski).

$$w = i\ c$$

Esta propuesta (Minkowski 1908) no presenta inconsistencias en el espacio tiempo físico pero modifica la métrica, **cambiando la geometría euclídea E(4)**.
Fue estudiada por Klein y Hilbert que propusieron denominarla *seudo euclídea* debido a que para cuerpos en reposo el espacio tiene geometría euclídea E(3).
La nueva métrica resulta:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Vemos que el desplazamiento elemental al cuadrado ds^2 puede ser positivo (intervalo *espacial*) o negativo (intervalo *temporal*).

Si ajustamos con $w = i\ c$ todos los parámetros encontrados se verifica su consistencia física y matemática, sin contradicción alguna. La velocidad c es la máxima posible, las rotaciones espacio temporales quedan expresadas mediante funciones hiperbólicas y contienen las Transformaciones de Lorentz, por lo cual se cumplen los postulados de Einstein de la Relatividad Especial y se deduce la Mecánica relativista.
Además, se llega a que si el espacio tiempo tiene geometría seudo euclídea la relación entre sistemas con movimiento relativo uniforme está dado por las Transformaciones de Lorentz, sean o no inerciales (Principio de Relatividad Generalizado - Logunov).
Veamos algunos resultados de cálculo directo:

1. **Velocidad c constante y absoluta** (Segundo Postulado de Einstein)

$$\frac{b}{a} w = \frac{b}{a} ic = -V \qquad b = i\frac{aV}{c} \qquad c > 0 \qquad V < c$$

2. **Factor de Lorentz**

$$a^2 + b^2 = 1 \qquad a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

3. **Transformaciones de Lorentz** (Relatividad Especial)

$$x' = ax + bw\,t = \frac{x - V\,t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad y' = y \qquad z' = z$$

$$t' = at - \frac{b}{w}x = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

4. **Teorema de adición de velocidades**

$$v'_{x'} = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}$$

La geometría seudo euclídea del espacio de Minkowski es suficiente fundamento de la Teoría de Relatividad Especial y, por extensión, de la Mecánica Relativista. Para ello basta dar la definición de fuerza como la variación de la cantidad de movimiento.
Como veremos a continuación también el electromagnetismo está contenido en esta magnífica teoría del espacio tiempo.
Este enfoque se sustenta en la formulación moderna de la Teoría de Relatividad hecha por Logunov en 1996 (última revisión 2001).

Interacciones
Hasta el advenimiento del electromagnetismo de Maxwell se asumía que los sistemas físicos interactuaban de dos posibles maneras, por contacto o por acción a distancia.
La introducción de campos escalares o vectoriales para la descripción de acciones era más una herramienta matemática por conveniencia que un modelo físico del proceso real, pues los campos no tenían existencia física.

En un sistema inercial la magnitud que manifiesta una interacción mecánica está dada por la variación de la cantidad de movimiento, es decir la fuerza aplicada.
Dos teoremas centrales de la mecánica clásica permiten encontrar los efectos de una interacción. Veamos su demostración en el modelo de Newton:

1 - Supongamos que sobre un punto material actúa una fuerza $\vec{F}$.
El trabajo elemental se define como $dw = \vec{F}\,d\vec{s}$, siendo $d\vec{s} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$.
La ley de Newton permite calcular la variación de la energía cinética.

$$dw = m\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{s} = m\vec{v}\,d\vec{v} = \frac{1}{2}m\,d(\vec{v}\vec{v}) = \frac{1}{2}m\,d\left(v^2\right) = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = dT$$

Este resultado fue denominado “Teorema de las fuerzas vivas” y establece que el trabajo de la fuerza aplicada es igual a la variación de la energía cinética.

2 - Si el campo exterior es conservativo se cumple $\oint_C \vec{F}\, d\vec{s} = 0$, válido para todo camino cerrado. En este caso es $\vec{F} = -\nabla U$, siendo U la energía potencial, cumpliéndose:

$$dw = -\nabla U\, d\vec{s} = -dU$$

En consecuencia

$$dT = -dU \quad \Rightarrow \quad d(T + U) = 0$$

Esta última expresión es el Teorema de Conservación de la Energía

$$T + U = E_M \qquad E_M \text{ Constante}$$

La energía cinética más la energía potencial es una constante cualquiera sea el punto o instante en que se lo determine.
Aquí corresponde señalar que la energía cinética *T* es una "propiedad" del punto material, mientras que la energía potencial *U* y la Energía Mecánica E_M no lo son y no tienen significado físico alguno referido al punto material.

La energía potencial posee toda la información del campo externo ($\vec{F} = -\nabla U$) y está definida a menos de una constante arbitraria, siendo ésta la razón por la cual su valor numérico no es de interés. Para un punto material que se mueve entre dos puntos del espacio la energía potencial permite calcular el intercambio energético entre la masa y el campo externo conservativo, valor que sólo depende de los puntos final e inicial.
La importancia de este teorema reside en su aplicación en dos posiciones distintas, es decir cuando intervienen las diferencias de energía potencial.

Un aspecto que en general no se plantea es que esto puede ser expresado distinto. Siendo $dT = - dU$, podemos pensar a *dT* como la energía elemental que gana (o pierde) el punto material en un desplazamiento *ds*, y *–dU* como la energía que le entrega (o le saca) a la partícula un ente externo durante la interacción.
Con esta interpretación concluimos que la interacción en un campo conservativo es un intercambio de energía sin pérdida alguna, lo cual es una aproximación ideal pues ello no ocurre en la naturaleza si aceptamos que el espacio-tiempo es seudo euclídeo.

La electrodinámica modificó profundamente los conceptos de campo y de interacción luego de que Hertz en 1888 demostrara la existencia de las ondas electromagnéticas. Este cambió profundo, consistente con la teoría de Relatividad Especial, dio lugar a la denominada interacción *campo-partícula*, siendo el campo un ente físico real.
Una consecuencia de la geometría seudo euclídea es la teoría de relatividad especial, por la cual las interacciones a distancia (a velocidad infinita) no son aceptables.
Este aspecto es muy importante y requiere un tratamiento más detallado.

Esta interacción se manifiesta como una fuerza cuya naturaleza depende del campo que la origina, el cual requiere un modelo matemático consistente, tema tratado en la teoría clásica de campos. Si pretendemos entender el proceso de interacción hay que conocer las condiciones que deben cumplir los campos para ser representativos de un proceso físico real.

Teorema de Helmholtz y campos "gauge"
Si se trata de campos vectoriales el formalismo fue resuelto completamente gracias a un importante teorema de Helmholtz. Este teorema establece que dado un campo escalar *s(x,y,z,t)*, llamado *"fuente"*, y un campo ***R****(x,y,z,t)* vectorial solenoidal, llamado

"complementario", tal que ambos se anulan en infinito, entonces existe un único campo vectorial ***G****(x,y,z,t)* que cumple:

$$\nabla \times \vec{G} = -\frac{\partial \vec{R}}{\partial t} \qquad (1)$$

$$\nabla \vec{G} = s \qquad (2)$$

$$\lim_{\vec{r} \to \infty} \vec{G}(\vec{r}, t) = 0$$

La ecuación (1) establece que el campo ***G*** no es conservativo a menos que el vector ***R*** sea estacionario o nulo.
La (2) nos indica que las líneas de corriente del campo ***G*** nacen (o mueren) en los puntos donde *s(x,y,z,t)* es positiva (o negativa). Si s > 0 en un punto diremos que en ese punto hay fuente de ***G***, y si s < 0 habrá sumidero del campo.

Es importante destacar que el teorema se cumple cualquiera sea el valor del rotor del campo complementario ***R***, lo que nos daría libertad de elegirlo por conveniencia. Esta libertad da lugar a un tipo de simetría de *calibración*, conocida como simetría *"gauge",* necesaria para campos relativistas (condición fundamental en la Física Teórica). Sin embargo, esta elección no es arbitraria si pretendemos que ***G*** represente un campo físico real, en cuyo caso también ***R*** deberá tener significado físico.
Es decir que eligiendo adecuadamente el Rotor del campo complementario logramos la invariancia de las ecuaciones de ***G*** y ***R*** ante Transformaciones de Lorentz.

Por ser campos físicos su expresión más general en el espacio de Minkowski debe ser compatible con la teoría de Relatividad Especial, lo que implica que su propagación no puede ser a velocidad infinita, por lo cual los campos deben cumplir con la ecuación de ondas. Usaremos la siguiente identidad vectorial:

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{G}\right) = \nabla\left(\nabla \vec{G}\right) - \nabla^2\left(\vec{G}\right)$$

Tomando Rotor en ambos miembros de la (1) y usando la (2) quedará:

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{G}\right) = -\frac{\partial\left(\nabla \times \vec{R}\right)}{\partial t} = \nabla\left(\nabla \vec{G}\right) - \nabla^2 \vec{G} = \nabla s - \nabla^2 \vec{G}$$

$$\Rightarrow \qquad \nabla^2 \vec{G} - \frac{\partial\left(\nabla \times \vec{R}\right)}{\partial t} = \nabla s$$

Dado que todo vector puede ser puesto como suma de otros dos vectores y ello nos da la libertad de elegir uno arbitrariamente, hacemos:

$$\nabla \times \vec{R} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial \vec{G}}{\partial t} + \vec{J} \qquad \text{(Calibración de Lorentz)}$$

La descomposición anterior es necesaria para no condicionar a que las fuentes sean estacionarias. La Divergencia de ***J*** es nula sólo en los casos estacionarios.

$$\boxed{\Rightarrow \qquad \nabla^2 \vec{G} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{G}}{\partial t^2} = \nabla s + \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}}$$

La calibración de Lorentz (simetría "*gauge*") junto a la naturaleza de las fuentes *s* fija el rotor de ***R***, vector que también satisface la ecuación de ondas.

$$\nabla \times \vec{R} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial \vec{G}}{\partial t} + \vec{J}$$

$$\nabla \vec{R} = 0$$

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{R}\right) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial\left(\nabla \times \vec{G}\right)}{\partial t} + \nabla \times \vec{J} = \nabla\left(\nabla \vec{R}\right) - \nabla^2 \vec{R} = -\nabla^2 \vec{R}$$

$$\boxed{\Rightarrow \qquad \nabla^2 \vec{R} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial t^2} = -\nabla \times \vec{J}}$$

A continuación se resumen las condiciones que cumplen los campos físicos para ser relativistas (en mi conocimiento no está en los libros) y, a su derecha, las ecuaciones de Maxwell en un medio homogéneo.

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla \times \vec{G} = -\frac{\partial \vec{R}}{\partial t} \\ &\nabla \vec{G} = s \\ &\nabla \times \vec{R} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial \vec{G}}{\partial t} + \vec{J} \\ &\nabla \vec{R} = 0 \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} &\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &\nabla \vec{E} = \rho / \varepsilon \\ &\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J} \\ &\nabla \vec{B} = 0 \end{aligned}}$$

Corresponde señalar que ambos campos (***G*** y ***R***) se propagan a la misma velocidad y no son conservativos.

La conclusión es que si el espacio-tiempo físico es seudo euclídeo la interacción *campo- partícula* requiere campos que no pueden ser conservativos y, además, que las ecuaciones que gobiernan al campo corresponden al modelo de Maxwell.

En definitiva, los sistemas conservativos son aproximaciones y la acción a distancia es un caso ideal, despreciando aspectos tales como rozamiento, modificaciones térmicas (si corresponde), deformaciones plásticas y radiación.
Los campos físicos relativistas no pueden ser conservativos, por lo cual no existe la Energía Potencial descrita más arriba.
Sin embargo, para interacciones débiles en presencia de fuentes estacionarias, es decir que no se modifica la distribución de las fuentes, la aproximación de campos conservativos resulta adecuada (ejemplo: electrostática).

Conclusión

Si el espacio tiempo físico es seudo euclídeo se obtiene como consecuencia:

1. Teoría de Relatividad Especial
2. Mecánica Relativista
3. Electromagnetismo

Puede demostrarse, además, que esta integración también contiene al Principio de Causalidad y a los Principios Universales de conservación, temas que serán tratados por separado.
Estamos ante una integración inédita de la Física Clásica Relativista como resultado de la formulación de Logunov.