INTEGRAL DE MOVIMIENTO, UN ACERCAMIENTO DIDÁCTICO

Joaquín González Álvarez

Objetivos del acercamiento

Una integral de movimiento de un problema mecánico es una función de las posiciones y las velocidades, o equivalentemente de las coordenadas generalizadas y sus momentos conjugados, que es constante a lo largo de una trayectoria en el espacio de fases.

Nos proponemos un acercamiento didáctico a este tema de la llamada Dinámica Analítica o Dinámica Hamiltoniana-Lagrangiana que suele impartirse en los cursos universitarios avanzados de Física General o en los de Física Teórica, cuando ya el estudiante de Física o de Ingeniería ha vencido dos cursos de Física General a nivel de College. Nos motiva a este acercamiento didáctico, el hecho de que en nuestra opinión se suele presentar esta temática tanto en los textos al uso, como en las clases, a un nivel y una metodología tan especializada de los conceptos y glosario no utilizado en los cursos previos , que por lo general el estudiante no reconoce que se está tratando fundamentalmente la misma Mecánica que le enseñaron en cursos previos, pero ahora por nuevos métodos que permitirán un estudio mas profundo y más generalizador de los problemas, pero que vienen a resultar, aplicados a casos elementales conocidos equivalentes a la fundamental $F=ma$. Es por esto que proponemos que los primeros pasos de introducción de la Dinámica Analítica sea de familiarización con el glosario propio de la nueva materia y su relación con el ya conocido de cursos anteriores, así como utilizando ejemplos de problemas sencillos conocidos, resolverlos por los métodos hamiltonianos-lagrangianos (aunque parezca matar hormigas a cañonazos) y mostrar que en definitiva es como si se hubiera resuelto por $F=ma$. La experiencia nos ha mostrado que cuando ya se trate la temática a nivel superior, el estudiante la asimilará mucho mas fácilmente y percibirá con satisfacción lo estético de lo nuevo.

Integral de Movimiento

Hemos escogido como ejemplo de aplicación de lo que sugerimos el tratamiento del concepto de *integral de movimiento* con cuya definición hemos iniciado este trabajo. Comencemos por la terminología. Aparecen los términos *coordenadas generalizadas* y *sus momentos generalizados conjugados* relacionados con la posición x y la velocidad $v=x'$ donde el acento lo utilizaremos para indicar derivación respecto al tiempo. Detengámonos en este punto. En Dinámica Analítica se utiliza en vez del sistema de ejes cartesianos x-y, el sistema de las *fases* de ejes v-x o x'-x, que corresponden a las coordenadas generalizadas $\boldsymbol{q}$ y sus momentos conjugados $\boldsymbol{p=q'}$ de modo que el sistema fásico o plano fásico será q-p o q-q'.

Así que una función en el plano fásico no sera $f(x,y)=0$, sinó $f(p,q)=0$ o $f(q',q)=0$ y al gráfico correspondiente se le llamará *trayectoria fásica.* Recordemos que en mecánica "elemental" momento $p=mv$ por lo que en Dinámica Analítica $p=mq'$ y por facilitar la escritura a veces se tomará $m=1$. Como símbolo de frecuencia angular utilizaremos w por lo cual $m.w^2 = k$ es la constante elástica en el movimiento armónico simple.

La derivada respecto al tiempo de una función

Volvamos con el concepto de *integral de movimiento*, dijimos que una función es integral de movimiento en un problema mecánico si permanece constante en el tiempo en una trayectoria fásica, esto es, se tiene que cumplir que si la función es $f(x',x,t)$ entonces $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ y $\frac{df}{dt} = 0$.

Hallemos $\frac{df}{dt}$:

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)\frac{dx'}{dt} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} \qquad (1)$$

Aplicando (1) veamos que si por ejemplo $f = x'^2/2 + w^2x^2/2$ es integral de movimiento podemos realizar las siguientes sustituciones en (1):

$$\frac{df}{dt} = x'.x'' + w^2xx' = 0 \qquad (2)$$

y por tanto:

$$x'' = -w^2x$$

y si multiplicamos por la masa m ambos miembros tendremos en el primero nuestra $F=ma$ y llegamos a la conocida ecuación del oscilador armónico:

$$F = -kx$$

El oscilador armónico como ejemplo

En el párrafo anterior utilizamos como función ejemplo la expresión de la energía total $E=T+V$ que para el oscilador armónico se suele presentar así:

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{mw^2 x^2}{2}$$

cuyo segundo miembro lo podemos escribir en la forma $\frac{p^2}{2m} + \frac{mw^2 q^2}{2}$ lo cual en Dinámica Analítica se le denomina Hamiltoniana y se simboliza por H lo cual viene a ser la energía generalizada $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{mw^2 q^2}{2}$ en función de las coordenadas generalizadas q y sus momentos generalizados p.

En Dinámica Analítica se utiliza el importante concepto de Lagrangiana $L=T\text{-}V$ que no debe confundirse a pesar de su parecido con la Hamiltoniana. De modo que la Lagrangiana del oscilador armónico se escribirá:

$$L = \frac{p^2}{2m} - \frac{mw^2 q^2}{2}$$

Para mostrar el uso mas común de la Lagrangiana volvamos a la expresión (2):

Vemos que de (2) llegamos a:

$$x'' + w^2 x = 0$$

que en coordenadas generalizadas se escribe:

$$q'' + w^2 q = 0$$

expresión que utilizando la Lagrangiana se puede escribir así:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial p}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \qquad (3)$$

lo cual puede el lector fácilmente comprobar. No olvidar que con $m=1$, $q'=p$.

La Lagrangiana

La expresión (3) es sumamente importante, representa la forma de las Ecuaciones de Lagrange (o de Euler-Lagrange) para cada una de las coordenadas generalizadas del problema que se trate que en nuestro ejemplo del oscilador armónico es una sola y es la representada en (3). En general el sistema de ecuaciones se simboliza como en (3) pero se utlizará el subíndice $i=1,2,3,\ldots$ para las p y las q, y como adelantamos en este trabajo veremos que (3) se transforma en la fundamental $F=ma$ si nos damos cuenta que $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial p}\right) = p' = \frac{d(mv)}{dt} = ma$ y $\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q} = F$ esto es que (3) expresa que $ma\text{-}F=0$.

La Hamltoniana y el método hamiltoniano

Para continuar con el tema de integral de movimiento o constante de movimiento, presentamos otra forma de proceder en Dinámica Analítica, el cual consiste en la utilización de las Ecuaciones Canónicas de Hamilton. Recordemos la Hamiltoniana:

$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{mw^2q^2}{2}$ y comprobemos que:

$$\frac{\partial H}{\partial q} = mw^2 q = -F = -p' \qquad (4)$$

y

$$\frac{\partial H}{\partial p} = q' \qquad (5)$$

ya en (4) y (5) tenemos las ecuaciones canónicas de Hamilton que suelen escribirse:

$$p' = -\frac{\partial H}{\partial q} \qquad (6)$$

$$q' = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad (7)$$

que se escribirán como un sistema de ecuaciones para cada grado de libertad o coordenada generalizada por lo cual las q y las p aparecerán como ya advertimos con el subíndice $i=1,2,3,\ldots$

El lector puede comprobar que la (6) deviene en nuestra familiar $F=ma$, utilizando la H del oscilador armónico.

En la práctica se utilizarán las ecuaciones de Lagrange (método lagrangiano) o las ecuaciones de Hamilton (método hamiltoniano) según convenga para facilitar la solución. El método hamiltoniano tiene la ventaja de que utiliza ecuaciones diferenciales de primer orden mientras que en el método lagrangiano las ecuaciones diferenciales son de segundo orden.

El Corchete de Poisson

Continuando con el método hamiltoniano y las integrales de movimiento presentamos el importante concepto de Corchete de Poisson para lo cual recodaremos la derivación respecto al tiempo de una función integral de movimiento *f(p, q,t)*:

$$\frac{df}{dt}=\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)\frac{dp}{dt}+\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)\frac{dq}{dt}=0$$

que puede escribirse:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)p'+\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)q'=0$$

y por (6) y (7):

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)\frac{\partial H}{\partial q}+\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)\frac{\partial H}{\partial p}=0$$

la expresión del primer miembro que puede escribirse *{f,H}* se conoce como corchete de Poisson y si resulta igual a cero: *{f,H}=0*, indica que f es integral de movimiento.

Utilicemos lo expresado para el corchete de Poisson para investigar si la Lagrangiana es integral de movimiento en el Oscilador Armónico para lo cual tomaremos $f=L$ o sea:

$$f=L=\frac{p^2}{2}-\frac{w^2q^2}{2} \qquad \text{(con m=1)} \qquad (8)$$

y recordamos que:

$$H=\frac{p^2}{2}+\frac{w^2q^2}{2} \qquad (9)$$

para calcular el corchete $\{L.H\}$

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)\frac{\partial H}{\partial q}+\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)\frac{\partial H}{\partial p}$$

y por (8) y (9): $pw^2q-w^2qp=0$

y al ser el corchete $\{L,H\}=0$ comprobamos que la Lagrangiana L es integral de movimiento.

El lector puede comprobar que *H* es integral de movimiento planteando el corchete *{H,H}*.

Ecuación de Hamilton-Jacobi

Otro método alternativo muy importante utilizado en Dinámica Analítica consiste en el empleo de la Ecuación de Hamilton-Jacobi donde aparece la magnitud llamada Acción simbolizada por *S* la cual presentamos en la siguiente igualdad:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = p$$

La cual permite escribir la Energía *E* así:

$$E = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + V$$

y en la forma:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 = 2m(E - V) \qquad (10)$$

que es la forma de la Ecuación de Hamilton-Jacobi para un sólo grado de libertad. Para tres grados de libertad en el primer miembro aparecerá la suma de tres términos como el de (10) para x, y, y z.

Trayectoria en el Espacio de las Fases

Desde el inicio del presente trabajo nos hemos referido al fundamental en Dinámica Analítica concepto de Trayectoria en el Espacio de las Fases o Trayectoria Fásica.

Como adelantamos la Trayectoria Fásica es el gráfico que resulta de plotear una función $f(p,q)$ en un sistema de ejes coordenados p-q. Continuando con el oscilador armónico como ejemplo, su trayectoria fásica resulta de plotear la ecuación que resulta de despejar q en:

$$\frac{p^2}{2} + \frac{w^2 q^2}{2} = H$$

Transformemos la igualdad anterior dividiendo ambos miembros por H:

$$\frac{p^2}{2H} + \frac{w^2 q^2}{2H} = 1$$

$$\frac{p^2}{2H} + \frac{q^2}{\left(\frac{2H}{w^2}\right)} = 1$$

expresión en la que advertimos la ecuación de una elipse de semiejes $a = \sqrt{2H}$ y $b = \sqrt{\frac{2H}{w^2}}$

cuya área $A=\pi ab$ será $A=2\pi H/w$ y como H y w son constantes vemos que el área sustentada por la Trayectoria Fásica de una integral de movimiento (H) es constante.

Y algo muy interesante que nos dice la Trayectoria Fásica del oscilador armónico por el hecho de ser una curva cerrada, es que si partiendo de cualquier punto (p,q) de la elipse recorremos ese contorno una y otra vez, *una y otra vez pasamos por el mismo punto (p,q) confirmando que el movimiento del oscilador es periódico.*

Al gráfico de trayectorias fásicas se le llama Retrato Fásico porque muestra una imagen independiente del tiempo, entre otros datos, de la relación entre los valores de la coordenada generalizada y sus momentos conjugados, la periodicidad o no del movimiento representado, si se trata o no de integral de movimiento, y otros aspectos del caso que se analiza.

Joaquín González Álvarez

j.gonzalez.a@hotmail.com