Las leyes de Kepler
a partir de la conservación de momento angular $\vec{L}$.

José Jesús MENA DELGADILLO

La torca $\vec{\tau}$ producida por una fuerza central $\vec{F}_c$ está dada por la expresión:

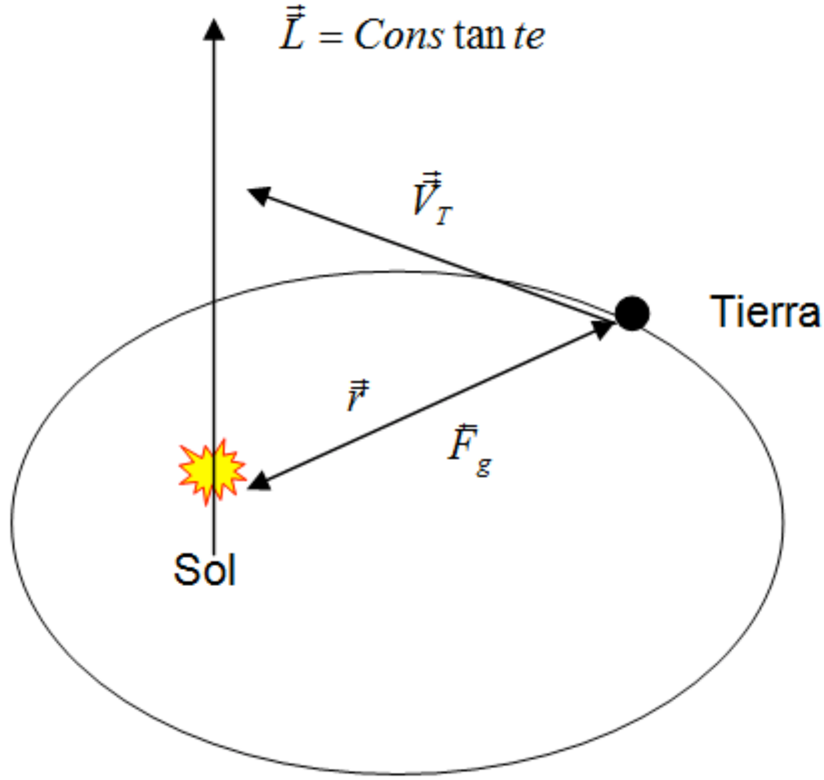
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_c = \vec{0} \qquad (1)$$

En donde: $\vec{r}$ es un vector de posición

Dado que geométricamente se satisface: $\vec{F}_c \parallel \vec{r}$.

1ª Ley de Kepler. "Los planetas se mueven siguiendo trayectorias cerradas (elípticas) que están contenidas en un plano (con el sol en uno de sus focos)"

Considerando la siguiente figura:



En donde:

$\vec{F}_g$ Corresponde a la fuerza gravitacional entre el sol y la tierra.

$\vec{r}$ Corresponde a la distancia entre el centro del sol y la tierra.
$\vec{V}_T$ Corresponde a la velocidad tangencial de la tierra en su trayectoria elíptica.

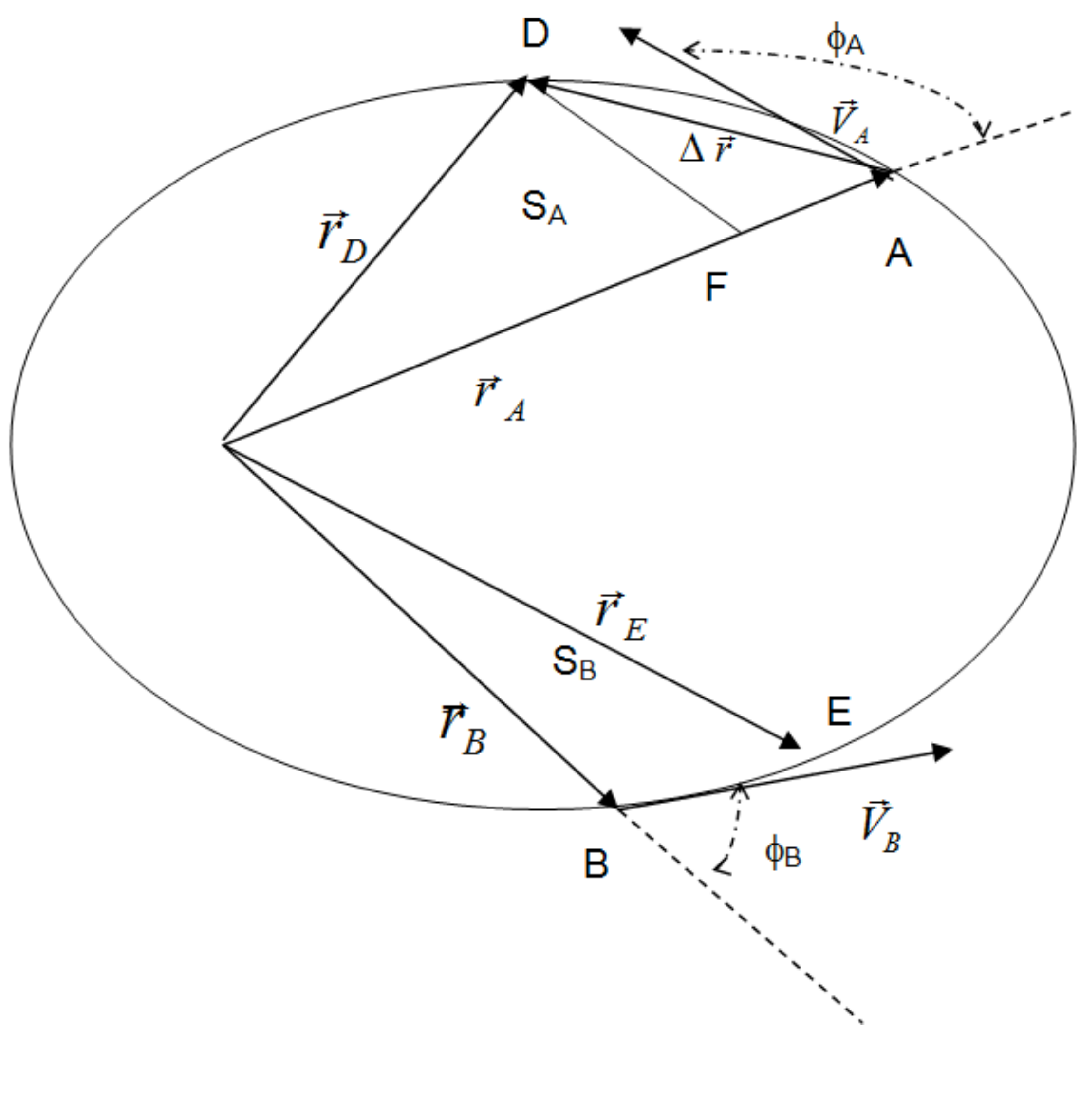
Dado que $\vec{F}_g$ es radial a la trayectoria de la Tierra alrededor del sol, entonces de la expresión (1) se establece:

Si $\vec{\tau} = \vec{0}$, entonces $\vec{L} = constante$

(Dado que se satisface: $\vec{\tau} = \dfrac{d\,\vec{L}}{d\,t}$)

Por lo tanto la trayectoria cerrada que describe la tierra alrededor del sol corresponde a un plano.

2ª Ley de Kepler. "Durante intervalos iguales de tiempo, una línea que une al sol al planeta (por ejemplo la Tierra) barre áreas iguales en cualquier parte de su trayectoria"



La magnitud del momento angular en el punto A, esta dado por:

$$\left| \vec{L}_A \right| = \left| \vec{r}_A \times m \vec{V}_A \right| = m\, r_A\, V_A\, sen\, \phi_A$$

La magnitud del momento angular en el punto B, esta dado por:

$$\left| \vec{L}_B \right| = \left| \vec{r}_B \times m \vec{V}_B \right| = m\, r_B\, V_B\, sen\, \phi_B$$

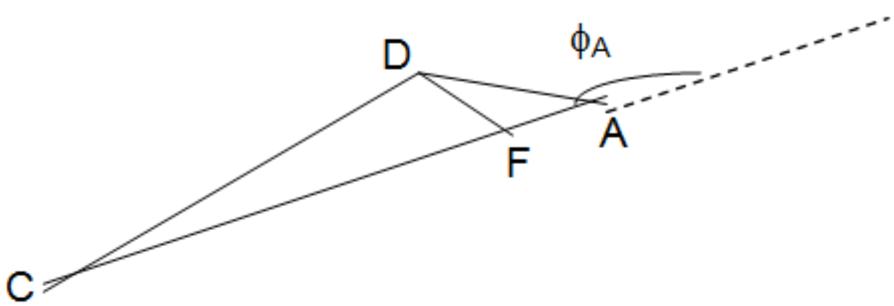
Dado que las Orbitas son estables entonces:

$$\vec{L} = Cons\tan te$$

Es decir:

$$\left| \vec{L}_A \right| = \left| \vec{L}_B \right| \qquad (2)$$

Para la superficie S_A se obtiene:



El área del triangulo ADC es equivalente a S_A que esta dada por:

$$S_A = \frac{(C\ A)(D\ F)}{2}$$

En donde: $C\ A = \left| \vec{r}_A \right|$ sustituyendo este resultado la relación anterior de S_A, resulta:

$$S_A = \frac{r_A\,(D\ F)}{2} \qquad (3)$$

Ahora:

$$D\ F = D\ A\ sen\ \gamma \qquad (4)$$

Dado que: $\gamma + \phi_A = 180^o$, es decir: $\gamma = 180^o - \phi_A$, entonces se satisface:

$$sen\ \gamma = sen\ \phi_A$$

Sustituyendo la expresión anterior en la relación (4), resulta:

$$D\,F = D\,A \text{ sen } \phi_A$$

Sustituyendo la relación anterior en la ecuación (4), se obtiene:

$$S_A = \frac{r_A\ (D\ A)\ sen\ \phi_A}{2} \qquad (5)$$

Considerando que: $D\ A = \left| \Delta \vec{r} \right| = \left| \vec{V}_A\ \Delta T \right|$

Sustituyendo la relación anterior en la ecuación (5), resulta:

$$S_A = \frac{r_A\ V_A\ (\Delta T)\ sen\ \phi_A}{2} \qquad (6)$$

Dado que:

$$r_A\ V_A\ sen\phi_A = \frac{L_A}{m}$$

Sustituyendo la relación anterior en la expresión (6), resulta:

$$S_A = \frac{L_A\ (\Delta T)}{2\ m} \qquad (7)$$

En forma análoga si el cuerpo se encuentra en el punto B y se mueve en dirección al punto E, resulta:

$$S_B = \frac{L_B\ (\Delta T)}{2\ m} \qquad (8)$$

De las condiciones expresadas en las ecuaciones (2), (7) y (8) se infiere:

$$L_A = \frac{2\ m\ S_A}{(\Delta T)} = \frac{2\ m\ S_B}{(\Delta T)} = L_B$$

Por lo tanto:

$$S_A = S_B$$

3ª Ley de Kepler. " El cuadrado del periodo de un planeta es proporcional al cubo de su distancia media al sol"

Para una velocidad angular constante ω, la aceleración centrípeta a_c a lo largo de su trayectoria cerrada, esta dada por:

$$a_c = \frac{V_T^2}{R} = \frac{\omega^2\ R^2}{R} = \omega^2\ R \qquad (9)$$

Dado que:

$$\omega = \frac{2\ \Pi}{T}$$

En donde:

T: corresponde al periodo.

Sustituyendo la relación anterior en la ecuación (9), se obtiene:

$$a_c = \frac{(2\ \Pi)^2\ R}{T^2} \qquad (10)$$

Por consideraciones de estabilidad dinámica se estable:

$$F_g = F_c \qquad (11)$$

En donde:

F_g: corresponde a la fuerza gravitacional (central) que actúa entre el sol y el planeta.

F_c: corresponde a la fuerza centrípeta (central) ejercida por la trayectoria del planeta.

Dado que:

$$F_g = \frac{G\ m_T\ M_S}{R^2} \qquad (12)$$

En donde:

m_T: corresponde a la masa terrestre.

M_S: corresponde a la masa del sol.

G: corresponde a la constante de gravitación universal.

R: corresponde a la distancia del sol y la tierra.

Ahora:

$$F_c = m_T\ a_c = \frac{m_T\ (2\ \Pi)^2\ R}{T^2} \qquad (13)$$

Sustituyendo (12) y (13) en (11), resulta:

$$\frac{G\ M_S}{R^2} = \frac{4\,\Pi^2\ R}{T^2}$$

Es decir:

$$T^2 = \frac{4\,\Pi^2}{G\,M_s}\ \ R^3$$

Por lo tanto:

$$T^2 = \alpha\ \ R^3$$

En donde, α es una constante de proporcionalidad.

BIBLIOGRAFÍA.

-Alonso M y Finn E Física Vol. I Mecánica Edit. Addison- Wesley Iberoamericana (1970)

- McGill D. y King W Mecánica para ingeniería y sus aplicaciones II Dinámica Edit Grupo editorial Iberoamericana (19991)

-Resnick R., Holliday D., Física vol. 1, CECSA, 1993

José Jesús MENA DELGADILLO
menajes@gmail.com