# SOBRE LA TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ

**Carlos S. Chinea**

**Transformaciones de coordenadas**
Dados dos objetos, M y M', que se desplazan el uno respecto al otro con movimiento rectilíneo y uniforme, de velocidad v, podemos considerar sendos sistemas de referencia, K y K', respectivamente solidarios a cada uno de ellos, que serán sistemas inerciales.

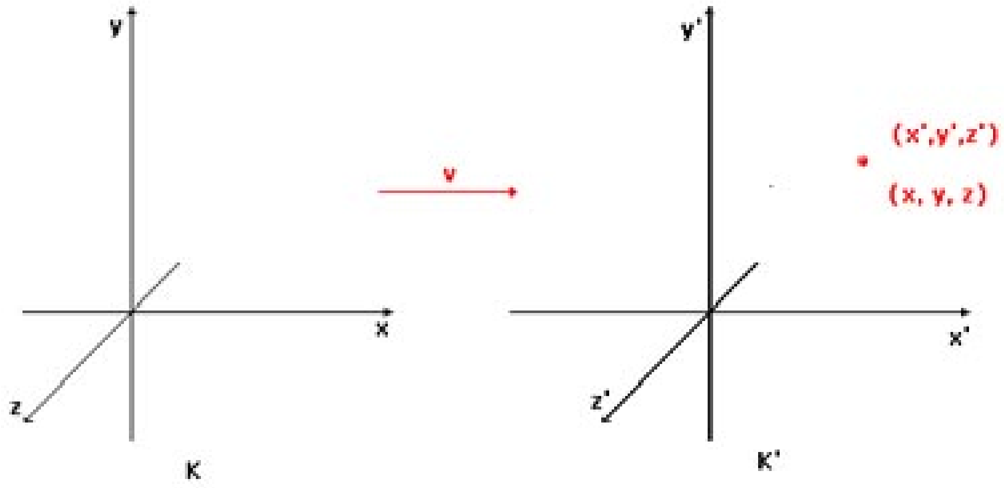
Cuando se trata de observar desde cada uno de ambos sistemas de referencia, K y K', un suceso del espacio-tiempo, las coordenadas y tiempo medidos por el observador que se encuentra en el sistema K no tienen necesariamente que tener los mismos valores que las coordenadas y tiempo medidos por el observador que se encuentra en el sistema K', ya que los orígenes de ambos sistema de referencia no son coincidentes.

El hecho de que ambos orígenes no sean coincidentes hace que las coordenadas x,y,z, y tiempo t, medidos en un sistema difieran de las coordenadas x', y', z', y tiempo t', medidos en el otro sistema, lo cual se puede resolver geométricamente si se conoce la velocidad relativa v entre ambos sistemas de referencia. De esta forma encontramos la transformación de coordenadas, y también de velocidades, clásica de Galileo.

Pero si además del problema del movimiento relativo uniforme y rectilíneo entre ambos sistemas, se nos impone la condición de que la velocidad de la luz ha de ser la misma en todos los sistemas inerciales, entonces tal condición hace que tengamos que deducir una transformación de coordenadas diferente, que tenga a la transformación de Galileo como caso particular. Se trata de la trasformación de Lorentz.

En lo que sigue hacemos un intento de derivación de las fórmulas correspondientes a las trasformaciones antedichas estudiando la posibilidad de la estructura de grupo de las transformaciones de Lorentz. Supondremos, para hacer estos cálculos, las posiciones más sencillas de los ejes referenciales, o sea, que la dirección del movimiento relativo coincida con alguno de los ejes espaciales de referencia, pudiéndose, obviamente, generalizar todos estos cálculos para posiciones relativas cualesquiera.

**Transformación de galileo**
Sean dos cuerpos M y M' en movimiento relativo rectilíneo y uniforme, es decir, con velocidad lineal constante, y sean K y K' sistemas de referencia tridimensionales solidarios respectivamente a M y M', de modo que en el instante inicial t=0 ambos orígenes coinciden, y eligiendo la orientación de los ejes de modo que uno de ellos, por ejemplo el eje x, tenga la dirección del movimiento relativo rectilíneo.




En estas condiciones, la transformación de coordenadas de Galileo nos dice que para cualquier suceso S, observado desde el sistema k en el punto (x,y,z,t), y observado desde el sistema K' en el punto (x',y',z',t') se verifica la relación

$$
\begin{aligned}
x' &= x - vt \\
y' &= y \\
z' &= z \\
t' &= t
\end{aligned}
$$

que se obtiene fácilmente desde una consideración geométrica elemental, a la vista de la anterior figura. Matricialmente:

$$
\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}
$$

Se obtienen expresiones matriciales análogas si consideramos el movimiento relativo en la dirección del eje *y* o del eje *z*. Respectivamente:

$$
\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -v & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -v & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}
$$

La transformación de velocidades de Galileo sería también inmediata:

- para dirección del movimiento relativo coincidente con el eje x:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x'}{t'} = \dfrac{x}{t'} - v\dfrac{t}{t'} = \dfrac{x}{t} - v \\ \dfrac{y'}{t'} = \dfrac{y}{t} \\ \dfrac{z'}{t'} = \dfrac{z}{t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'_x = u_x - v \\ u'_y = u_y \\ u'_z = u_z \end{cases} \Rightarrow \left(u'_x, u'_y, u'_z\right) = \left(u_x, u_y, u_z\right) - (v,0,0)$$

- para dirección del movimiento relativo coincidente con el eje y:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y - vt \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x'}{t'} = \dfrac{x}{t'} \\ \dfrac{y'}{t'} = \dfrac{y}{t} - v\dfrac{t}{t'} = \dfrac{y}{t} - v \\ \dfrac{z'}{t'} = \dfrac{z}{t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'_x = u_x \\ u'_y = u_y - v \\ u'_z = u_z \end{cases} \Rightarrow \left(u'_x, u'_y, u'_z\right) = \left(u_x, u_y, u_z\right) - (0, v, 0)$$

- para dirección del movimiento relativo coincidente con el eje z:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = z - vt \\ t' = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x'}{t'} = \dfrac{x}{t'} \\ \dfrac{y'}{t'} = \dfrac{y}{t} \\ \dfrac{z'}{t'} = \dfrac{z}{t} - v\dfrac{t}{t'} = \dfrac{z}{t} - v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'_x = u_x \\ u'_y = u_y \\ u'_z = u_z - v \end{cases} \Rightarrow \left(u'_x, u'_y, u'_z\right) = \left(u_x, u_y, u_z\right) - (0,0,v)$$

**Transformación de Lorentz**

Supongamos, al igual que en el estudio de la transformación de Galileo, dos cuerpos M y M′ en movimiento relativo rectilíneo y uniforme, es decir, con velocidad lineal constante v, y sean K y K′ sistemas de referencia tridimensionales solidarios respectivamente a M y M′, de modo que en el instante inicial t=0 ambos orígenes coinciden, y eligiendo la orientación de los ejes de modo que uno de ellos, por ejemplo el eje x, tenga la dirección del movimiento relativo rectilíneo, pero ahora con la condición añadida de que la velocidad c de la luz ha de ser la misma medida en ambos sistemas.

En estas condiciones, entendemos que si x′ = 0, entonces el valor correspondiente a x indica la posición del origen del sistema K′ cuando ha transcurrido el tiempo t. Es decir, es v = x/t.

También hemos de tener en cuenta que si t=0, entonces también t′=0 y el valor que tenga la coordenada x′ es el mismo que tiene la coordenada x, ya que en ese instante los orígenes de ambos sistemas de coordenadas son coincidentes.

Asimismo, la condición de que la velocidad c de la luz ha de ser la misma en ambos sistemas de referencia, permite especificar que para una señal luminosa en la dirección y sentido del eje x se verifica que c = x/t y que c = x'/t', o expresado de otra forma: x – ct = 0, x' – ct' = 0. Análogamente, para una señal luminosa en la misma dirección y sentido contrario se verificará en ambos sistemas de referencia x + ct = 0, x' + ct' =0. Por tanto, puesto que ambas deben cumplirse en los dos sistemas de referencia, ha de ser:

$$x'-ct'=\alpha(x-ct)$$
$$x'+ct'=\beta(x+ct)$$

si sumamos y restamos ambas expresiones obtenemos:

$$\begin{cases} x'=\dfrac{\alpha+\beta}{2}x-\dfrac{\alpha-\beta}{2}ct \\ ct'=-\dfrac{\alpha-\beta}{2}x+\dfrac{\alpha+\beta}{2}ct \end{cases}$$

llamando $A=\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ B=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ , se tiene:

$$\begin{cases} x'=Ax-Bct \\ ct'=-Bx+Act \end{cases} \qquad [1]$$

Si t = 0, entonces $x'=Ax$ y si en ese momento es, por ejemplo, x'=1, será $x={}^{1}\!/_{A}$.

Pero si t' = 0, entonces de la segunda ecuación de [1], es $ct=\dfrac{B}{A}x$, que sustituido en la primera nos da: $x'=Ax-B.\dfrac{B}{A}x=Ax\left(1-\left(\dfrac{B}{A}\right)^2\right)$, y para x = 1, será $x'=A\left(1-\left(\dfrac{B}{A}\right)^2\right)$

Ahora bien, cuando t=0, también es t'=0, y el valor de x en ese momento es el mismo que el valor de x', por lo que podemos igualar ambas expresiones:

$$1/A=A\left(1-\left(\frac{B}{A}\right)^2\right)$$

por lo que es:

$$A^2=\frac{1}{1-\left(\frac{B}{A}\right)^2}\rightarrow A=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{B}{A}\right)^2}}$$

y si consideramos que para x'= 0 es v=x/t, se tiene, haciendo x'=0 en la primera ecuación de [1]:

$0 = Ax - Bct \rightarrow \frac{x}{t} = \frac{B}{A}c \rightarrow \frac{v}{c} = \frac{B}{A}$, que sustituyendo en la expresión de A:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{B}{A}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

si sustituimos ahora A en las ecuaciones [1], tenemos:

$$x' = Ax - Bct = A\left(x - \frac{B}{A}ct\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\left(x - \frac{v}{c}ct\right) = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$ct' = -Bx + Act = A\left(-\frac{B}{A}x + ct\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\left(-\frac{v}{c}x + ct\right) = \frac{ct - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \rightarrow t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

En definitiva, la transformación de coordenadas que se obtiene es la siguiente:

$$\begin{cases} t' = \dfrac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\ x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

llamando $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$, $\phi = \frac{v}{c}$ se pueden escribir estas expresiones en forma más simple:

$$\begin{cases} t' = \gamma.t - \gamma\frac{\phi}{c}x \\ x' = \gamma x - \gamma\phi ct \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

matricialmente, se tiene:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\dfrac{\phi}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma\phi c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Si el movimiento relativo tiene la dirección del eje y, se tendría:

$$\left\{ \begin{array}{l} t' = \gamma.t - \gamma\dfrac{\phi}{c}y \\ x' = x \\ y' = -\gamma\phi ct + \gamma y \\ z' = z \end{array} \right. \Rightarrow \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma\dfrac{\phi}{c} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma\phi c & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Finalmente, si la dirección del movimiento relativo de ambos sistemas coincide con la dirección del eje z:

$$\left\{ \begin{array}{l} t' = \gamma.t - \gamma\dfrac{\phi}{c}z \\ x' = x \\ y' = y \\ z' = -\gamma\phi ct + \gamma z \end{array} \right. \Rightarrow \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\dfrac{\phi}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\phi c & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

**La transformación de velocidades de Lorentz**

- Para dirección del movimiento relativo en la dirección de x ($\vec{v} = (v,0,0)$):

$$\left\{ \begin{array}{l} t' = \gamma.t - \gamma\dfrac{\phi}{c}x \\ x' = \gamma x - \gamma\phi ct \\ y' = y \\ z' = z \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_x^{'} = \dfrac{\gamma x - \gamma\phi ct}{\gamma.t - \gamma\dfrac{\phi}{c}x} = \dfrac{x - \phi ct}{t - \dfrac{\phi}{c}x} = \dfrac{u_x - \phi c}{1 - \dfrac{\phi}{c}u_x} = \dfrac{u_x - v}{1 - \dfrac{v}{c^2}u_x} \\ u_y^{'} = \dfrac{y}{\gamma.t - \gamma\dfrac{\phi}{c}x} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{u_y}{t - \dfrac{\phi}{c}x} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{u_y}{1 - \dfrac{\phi}{c}u_x} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{u_y}{1 - \dfrac{v}{c^2}u_x} = \dfrac{u_y}{1 - \dfrac{v}{c^2}u_x}\sqrt{1 - \left(\dfrac{v}{c}\right)^2} \\ u_z^{'} = \dfrac{z}{\gamma.t - \gamma\dfrac{\phi}{c}x} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{u_z}{t - \dfrac{\phi}{c}x} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{u_z}{t - \dfrac{\phi}{c}u_x} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{u_z}{1 - \dfrac{v}{c^2}u_x} = \dfrac{u_z}{1 - \dfrac{v}{c^2}u_x}\sqrt{1 - \left(\dfrac{v}{c}\right)^2} \end{array} \right.$$

$$\left(u_x^{'}, u_y^{'}, u_z^{'}\right) = \frac{1}{1 - \dfrac{v}{c^2}u_x}\left(u_x, u_y\sqrt{1 - \left(\dfrac{v}{c}\right)^2}, u_z\sqrt{1 - \left(\dfrac{v}{c}\right)^2}\right) - \frac{1}{1 - \dfrac{v}{c^2}u_x}(v,0,0)$$

-Para dirección del movimiento relativo en la dirección de y ($\vec{v} = (0,v,0)$):

$$\begin{cases} t' = \gamma.t - \gamma\dfrac{\phi}{c}y \\ x' = x \\ y' = -\gamma\phi ct + \gamma y \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_x^{'} = \dfrac{x}{\gamma.t - \gamma\dfrac{\phi}{c}y} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{u_x}{1-\dfrac{\phi}{c}u_y} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{u_x}{1-\dfrac{v}{c^2}u_y} = \dfrac{u_x}{1-\dfrac{v}{c^2}u_y}\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2} \\ u_y^{'} = \dfrac{\gamma y - \gamma\phi ct}{\gamma.t - \gamma\dfrac{\phi}{c}y} = \dfrac{y-\phi ct}{t-\dfrac{\phi}{c}y} = \dfrac{u_y - \phi c}{1-\dfrac{\phi}{c}u_y} = \dfrac{u_y - v}{1-\dfrac{v}{c^2}u_y} \\ u_z^{'} = \dfrac{z}{\gamma.t - \gamma\dfrac{\phi}{c}y} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{u_z}{t-\dfrac{\phi}{c}u_y} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{u_z}{1-\dfrac{v}{c^2}u_y} = \dfrac{u_z}{1-\dfrac{v}{c^2}u_y}\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2} \end{cases}$$

$$\left(u_x^{'}, u_y^{'}, u_z^{'}\right) = \frac{1}{1-\dfrac{v}{c^2}u_y}\left(u_x\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}, u_y, u_z\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\right) - \frac{1}{1-\dfrac{v}{c^2}u_y}(0,v,0)$$

-Para dirección del movimiento relativo en la dirección de z ($\vec{v} = (0,0,v)$):

$$\begin{cases} t' = \gamma.t - \gamma\dfrac{\phi}{c}z \\ x' = x \\ y' = y \\ z' = -\gamma\phi ct + \gamma z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_x^{'} = \dfrac{x}{\gamma.t - \gamma\dfrac{\phi}{c}z} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{u_x}{1-\dfrac{\phi}{c}u_z} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{u_x}{1-\dfrac{v}{c^2}u_z} = \dfrac{u_x}{1-\dfrac{v}{c^2}u_z}\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2} \\ u_y^{'} = \dfrac{y}{\gamma.t - \gamma\dfrac{\phi}{c}z} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{u_y}{1-\dfrac{\phi}{c}u_z} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{u_y}{1-\dfrac{v}{c^2}u_z} = \dfrac{u_y}{1-\dfrac{v}{c^2}u_z}\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2} \\ u_z^{'} = \dfrac{\gamma z - \gamma\phi ct}{\gamma.t - \gamma\dfrac{\phi}{c}z} = \dfrac{z-\phi ct}{t-\dfrac{\phi}{c}z} = \dfrac{u_z - \phi c}{1-\dfrac{\phi}{c}u_z} = \dfrac{u_z - v}{1-\dfrac{v}{c^2}u_z} \end{cases}$$

$$\left(u_x^{'}, u_y^{'}, u_z^{'}\right) = \frac{1}{1-\dfrac{v}{c^2}u_z}\left(u_x\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}, u_y\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}, u_z\right) - \frac{1}{1-\dfrac{v}{c^2}u_z}(0,0,v)$$

**La Transformación de Galileo como caso particular de la transformación de Lorentz cuando la velocidad relativa v es muy pequeña comparada con la velocidad de la luz**

Efectivamente, si es $v << c$ entonces $\phi = \dfrac{v}{c} \to 0$, por lo cual $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} \to 1$

Y la transformación de Lorentz quedaría:

$$\begin{cases} t' = \gamma . t - \gamma \dfrac{\phi}{c} x \\ x' = \gamma x - \gamma \phi c t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t' = t \\ x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

y lo mismo en los casos restantes.

La transformación de Galileo es, por consiguiente válida, para movimientos relativos de los cuerpos de observación en donde la velocidad rectilínea y uniforme se puede despreciar en comparación con la velocidad de la luz.

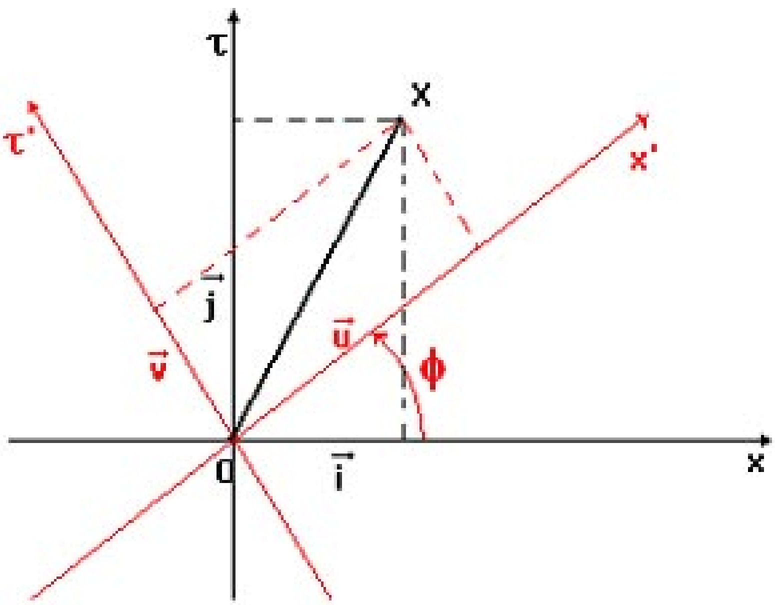
**La transformación de Lorentz es una rotación en un plano espacio-temporal del Universo de Minkowski**

El espacio-tiempo de Minkowski es un espacio cuatridimensional, cuyas dimensiones están definidas por las tres dimensiones espaciales (x,y,z) y la dimensión temporal, establecida por la multiplicación del tiempo por la velocidad de la luz y la unidad imaginaria de los números complejos ( $\tau = ict$ ) .

Un sistema de referencia en este espacio ( $\tau, x, y, z$ ) define en total seis planos:

$$\tau x, \tau y, \tau z, xy, xz, yz$$

los tres primeros, que involucran al tiempo, son los planos espacio-temporales. Si consideramos, por ejemplo, el plano espacio-temporal $\tau x$ , en la figura mostramos como escribir la posición de un vector OX contenido en ese plano:




ROTACIÓN EN EL PLANO $\tau x$

Se tendría, considerando vectores unitarios $\{\vec{i},\vec{j}\}$ para el sistema de referencia $\tau x$, y los vectores unitarios $\{\vec{u},\vec{v}\}$ para el sistema rotado $\tau' x'$:

$$0\overline{x} = x\vec{i} + \tau\vec{j} = x'\vec{u} + \tau'\vec{v}$$

despejando los unitarios $\{\vec{u},\vec{v}\}$ en función de los unitarios $\{\vec{i},\vec{j}\}$ (ver figura):

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \cos\phi.\vec{i} + sen\phi.\vec{j} \\ \vec{v} &= -sen\phi.\vec{i} + \cos\phi.\vec{j} \end{aligned}$$

y al sustituir:

$$\begin{aligned} 0\overline{x} &= x.\vec{i} + \tau.\vec{j} = x'\vec{u} + \tau'\vec{v} = x'\left(\cos\phi.\vec{i} + sen\phi.\vec{j}\right) + \tau'\left(-sen\phi.\vec{i} + \cos\phi.\vec{j}\right) = \\ &= \left(x'\cos\phi - \tau' sen\phi\right)\vec{i} + \left(x' sen\phi + \tau'\cos\phi\right)\vec{j} \end{aligned}$$

identificando componentes:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\phi - \tau' sen\phi \\ \tau &= x' sen\phi + \tau'\cos\phi \end{aligned}$$

que son las ecuaciones de la rotación o giro en el plano antedicho. Si consideramos x'=0, se tiene:

$$\begin{matrix} x = -\tau'.sen\phi \\ \tau = \tau'.\cos\phi \end{matrix} \Rightarrow \frac{x}{\tau} = -tg\phi \Rightarrow \frac{x}{ict} = -tg\phi \Rightarrow \frac{x}{ct} = -i.tg\phi \Rightarrow tg\phi = i\frac{v}{c}$$

habiendo llamado $v = x/t$. Despejamos el seno y coseno en función de la tangente:

$$tg\phi = i\frac{v}{c} \Rightarrow \begin{cases} sen\phi = \dfrac{i\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\ \cos\phi = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \end{cases}$$

sustituyendo en las ecuaciones de la rotación:

$$\begin{aligned} x &= x'\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - \tau'\frac{i\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\ \tau &= x'\frac{i\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} + \tau'\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \end{aligned}$$

y al simplificar queda:

$$x = x'\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - \tau'\frac{i\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = x'\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - ict'\frac{i\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\tau = x'\frac{i\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} + \tau'\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{i\frac{vx'}{c}+ict'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ict = \frac{i\frac{v}{c}x'+ict'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \Rightarrow t = \frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \Rightarrow t' = \frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Obteniéndose, por consiguiente, las fórmulas de la transformación de Lorentz para el caso de velocidad relativa coincidente con la dirección positiva del eje x:

$$\begin{cases} t' = \dfrac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\ x' = \dfrac{x-vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Obviamente, el caso de velocidad relativa en la dirección del eje y correspondería a una rotación del plano espacio-temporal $\tau y$, y finalmente, el caso de velocidad relativa en la dirección del eje z se obtiene como una rotación en el plano espacio-temporal $\tau z$.

**La estructura de grupo**

Sabemos que el producto de dos rotaciones es también una rotación, que la rotación neutra corresponde a la que efectúa un ángulo de 360º, y que la rotación opuesta de una rotación dada es la rotación del mismo ángulo y contrario sentido. Se tiene en definitiva que el conjunto de las rotaciones en el plano espacio-temporal es un grupo, al que podemos asociar el conjunto de las correspondientes transformaciones de Lorentz, que se denomina Grupo Propio de Lorentz.

El Grupo de Lorentz está formado, además de las rotaciones espacio-temporales, por las reflexiones espaciales y las inversiones temporales, y es un subgrupo del Grupo de Poincaré, que contendría además las traslaciones en el espacio de Minkowski.

**Documentación**

Einstein, A., Teoría de la Relatividad especial y general.
Landau, L.D.-Lifshitz, E.M., Curso de Física Teórica, vol II (Teoría Clásica de los campos), pps 14-15, Ed. Reverté

Carlos S. Chinea
casanchi@terra.es