La invariancia de la masa en Relatividad Especial

Bert Janssen

Departamento de Física Teórica y del Cosmos
Universidad de Granada
18071 Granada
Granada, noviembre 2012

ABSTRACT

Se corrige un error que aparece con cierta frecuencia en la literatura divulgativa sobre la Teoría de la Relatividad Especial: el hecho de que supuestamente la masa de un objeto en movimiento aumenta con la velocidad relativa entre el observador y el objeto. Explicaremos en este texto que es más correcto afirmar que lo que aumenta es el momento y la energía del objeto, mientras que la masa es un invariante, independientemente del movimiento del observador como del objeto mismo.

1. Introducción

Con cierta frecuencia se puede encontrar en la literatura divulgativa sobre relatividad especial el concepto de *masa relativista* m_r de un objeto, definida como

$$m_r = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{1.1}$$

donde m_0 es la masa del objeto en resposo, v es la velocidad relativa entre el objeto y el observador y c es la velocidad de la luz. Originalmente esta fórmula fue introducida por Richard Tolman en 1912, quien creía que era la formula más adecuada para la masa de un objeto en movimiento. Conceptos relacionados fueron usados por Hendrik Anton Lorentz en su teoría del electrón, donde introdujo la masa transversal y la masa longitudinal de un objeto por la manera en que aparecían en las distintas componentes de la Segunda Ley de Newton,

$$F_x = m_L\, a_x, \qquad F_y = m_T\, a_y, \qquad F_z = m_T\, a_z, \tag{1.2}$$

donde

$$m_L = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}^{\,3}}, \qquad m_T = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{1.3}$$

Estas definiciones parecían respaldadas por los experimentos de Kaufmann, Bucherer y Neumann entre 1901 y 1905, que sugerían que la inercia de un objeto depende de su velocidad.

Sin embargo, el uso de los conceptos de masa relativista, masa longitudinal y masa transversal tienden a llevar a confusiones, dificultades e incluso errores, de modo que desde la mitad del Siglo XX se ha preferido trabajar con los conceptos de masa de reposo, energía y momento e interpretar los resultados de Kaufmann, Bucherer y Neumann de manera diferente. En 1948, el mismo Albert Einstein escribió en una carta al autor Lincoln Barnett, que en ese momento trabajaba en su libro divulgativo *The Universe and Doctor Einstein*:

> *"No es correcto introducir el concepto de la masa $M = m/\sqrt{1-v^2/c^2}$ de un cuerpo en movimiento, para el cual no se puede dar una definición clara. Es mejor no introducir ningún otro concepto de masa más que la masa en reposo m. En lugar de introducir M es mejor mencionar la expresión para el momento y la energía de un objeto en movimiento."*

En este escrito demostraremos que la introducción de la masa relativista surge de una formulación errónea de la Segunda Ley de Newton relativista y explicaremos los resultados de los experimentos de Kaufmann, Bucherer y Neumann en términos del momento y la energía relativista. En la sección 2 introduciremos dos formulaciones en general inequivalentes de la Segunda Ley de Newton en la mecánica newtoniana y explicaremos cuál de las dos es más correcta. En la sección 3 extenderemos esta formulación para que incluya también efectos relativistas y explicaremos la interpretación moderna de los resultados de Kaufmann, Bucherer y Neumann. Finalmente en la sección 4 explicaremos el error en la derivación de la Segunda Ley de Newton en términos de la masa relativista y demostraremos que en realidad la masa en reposo tiene un valor constante para cualquier observador inercial. En la sección 5 discutiremos dos paradojas generadas por el uso de la masa relativista y en la sección 6 resumiremos las conclusiones.

2. La Segunda Ley de Newton en la mecánica newtoniana

En la mecánica newtoniana se pueden encontrar dos expresiones distintas para la famosa Segunda Ley de Newton, que relaciona las fuerzas que actuan sobre un objeto con los cambios de velocidad de este objeto. La formulación más frecuente es

$$\vec{F} = m\vec{a}, \tag{2.1}$$

donde m es la masa del objeto y $\vec{a}$ es la aceleración debida a la fuerza $\vec{F}$ que actua sobre esta. Matemáticamente hablando la aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo,

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}, \tag{2.2}$$

y parametriza cómo cambia la velocidad $\vec{v}(t)$ con el tiempo.

La otra formulación de la Segunda Ley de Newton, menos frecuente, relaciona la fuerza actuando sobre un objeto con cambios del momento lineal:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \tag{2.3}$$

donde $\vec{p}$ es el momento lineal,

$$\vec{p} = m\vec{v}. \tag{2.4}$$

Las dos formulaciones (2.1) y (2.3) son equivalentes en el caso donde la masa del objeto es constante, puesto que entonces

$$\vec{F} \; = \; \frac{d\vec{p}}{dt} \; = \; \frac{d(m\vec{v})}{dt} \; = \; m\frac{d\vec{v}}{dt} \; = \; m\vec{a}. \tag{2.5}$$

Sin embargo, en el caso donde la masa de objeto cambia con el tiempo, $m = m(t)$ (por ejemplo, un cohete que va expulsando gases al acelerar, o un carro que va acumulando lluvia mientras que se mueve), las dos fórmulas (2.1) y (2.3) no son equivalentes. De (2.3) tendríamos que

$$\vec{F} \; = \; \frac{d(m(t)\vec{v})}{dt} \; = \; m(t)\vec{a} \; + \; \frac{dm(t)}{dt}\vec{v}. \tag{2.6}$$

En otras palabras, (2.1) es claramente un caso especial de (2.3), cuando la masa es constante, y la fórmula correcta es, en toda su generalidad, (2.3).[1]

Se puede demostrar esto con el experimento sencillo de un vagón de tren que se desliza sin rozamiento por un carril horizontal. En ausencias de fuerzas externas, (2.3) implica que el momento lineal $\vec{p} = m\vec{v}$ es constante a lo largo de movimiento. Si la masa del vagón también es constante, el vagón se mueve de manera uniforme rectilinea, con velocidad constante. Sin embargo cuando

[1] La razón por qué se encuentra más la formulación (2.1) es porque en la gran mayoría de los casos tratados, la masa de un objeto es constante, en cuyo caso esta formulación más intuitiva, efectivamente, se aplica.

empieza a llover, el vagón empezará a acumular agua y el aumento de masa repercutirá en el movimiento del vagón. Concretamente, si la lluvia cae perfectamente vertical, no ejercerá ninguna fuerza en la dirección de movimiento, de modo que el momento $\vec{p}$ aún se conserva. Sin embargo, al aumentar la masa del vagón, va a disminuir la velocidad $\vec{v}$ de tal forma que el producto $\vec{p} = m\vec{v}$ se mantenga constante. Este fenómeno se ha observado en numerosos casos y es un efecto importante en ingeniería aeroespacial.

3. La Segunda Ley de Newton en Relatividad Especial

La teoría de la relatividad especial modifica y generaliza la mecánica newtoniana a velocidades cercanas a la velocidad de luz, $v \sim c$. Concretamente afirma que la velocidad de la luz es la misma para todos los observadores inerciales y que además es la velocidad máxima con que se puede mover cualquier observador, objeto o incluso información.

Una consecuencia directa de esta última afirmación es que la formulación (2.1) no puede ser cierta, puesto que implicaría que una fuerza constante podriá acelerar una masa hasta velocidades arbitrariamente grandes, mucho más que la velocidad de la luz. Otra vez la formulación correcta de la Segunda Ley de Newton es el equivalente relativista de (2.3),

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \tag{3.1}$$

La gran diferencia entre la fórmula relativista (3.1) y la newtoniana (2.3) es la definición de momento $\vec{p}$. Concretamente el momento relativista está definido como

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{3.2}$$

donde m_0 es la masa del objeto, medida en el sistema que está en reposo con respecto a objeto y $\vec{v}$ es la velocidad relativa entre el objeto y el observador. Obsérvese que si el objeto se mueve con velocidades mucho más pequeñas que la velocidad de la luz, $v \ll c$, el factor en el denominador de (3.2) es prácticamente 1 y en este límite la diferencia entre (2.4) y (3.2) es despreciable. Sin embargo, cuando el objeto se mueve con una velocidad cercana a la velocidad de la luz, la presencia del factor en el denominador causará grandes correcciones a la expresión (3.2), de modo que el momento relativista de un objeto moviéndose a velocidades relativistas es mucho mayor que el momento newtoniano.

Nótese también que las expresiones (3.1) y (3.2) implican que ningún objeto puede alcanzar, ni sobrepasar la velocidad de la luz: al aplicar una fuerza $\vec{F}$ sobre un objeto resulta en un cambio del momento relativista $\vec{p}$ (más que en un cambio de la velocidad $\vec{v}$). Dado que la mayor contribución al momento relativista de un objeto que se mueve con velocidades cercanas a c viene del denominador de (3.2), cualquier fuerza finita aumentará sobre todo el factor $1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, más que el factor $m_0\vec{v}$. Además este efecto es mayor, cuando más que se acerca la velocidad del objeto a la de la luz. Para acelerar el objeto hasta la velocidad de la luz, hace falta una fuerza infinitamente grande, la cual no existe en la naturaleza. En la vieja interpretación de Tolman y Kaufmann, Bucherer y Neumann se creía que esto implicaba que la inercia del objeto crece en función de su velocidad, pero ahora vemos que es mucho más natural decir que lo que aumenta es el momento relativista (3.2).

4. La constancia de la masa en Relatividad Especial

Con cierta frecuencia se puede encontrar que algunos libros sobre relatividad especial intentan escribir la Segunda de Ley de Newton relativista (3.1) en una forma más cercana a (2.1). Para ello suelen definir la masa relativista de un objeto como

$$m_r = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{4.1}$$

y luego escribir (3.1) como

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \frac{m_0\vec{a}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_r\vec{a} \qquad \textbf{¡¡Fórmula errónea!!} \tag{4.2}$$

Sin embargo esta derivación es errónea, por la misma razón que (2.1) y (2.3) en general no son equivalentes. Concretamente, el error de (4.2) está en la segunda igualdad: la derivada d/dt no sólo actúa sobre la velocidad que aparece en el numerador, sino también en el factor v^2/c^2 en el denominador. Eso es precisamente lo que explicamos al final de la sección anterior: que una fuerza resulta a penas en un aumento de velocidad, pero aumenta muchísimo el momento relativista. La derivación correcta de (4.2) sería

$$\vec{F} \;=\; \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \;=\; \frac{m_0(\vec{v}\cdot\vec{a})\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}^{\,3}} \;+\; \frac{m_0\vec{a}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{4.3}$$

Observese que es por lo tanto el primer término el que impide escribir la Segunda Ley de Newton como (4.2), lo que hace la definición (4.1) innecesaria, e incluso confusa.

Finalmente hay otra manera de ver que la masa m_0 en relatividad especial es una cantidad constante, independiente del estado de movimiento del observador y del objeto. De la misma manera que hemos definido el momento relativista en (3.2) podemos definir la energía relativista como

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{4.4}$$

Para velocidades mucho más bajas que la velocidad de la luz, esta expresión se simplifica (a través de un desarrollo de Taylor en $\frac{v^2}{c^2}$) a

$$E \approx m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 + ... \tag{4.5}$$

En otras palabras, a velocidades cotidianas recuperamos la expresión netwoniana para la energía cinética, más el famoso término para la energía de reposo, $E = m_0c^2$. Sin embargo, lo más interesante es que las expresiones (3.2) y (4.4) combinan en la relación

$$\begin{aligned} E^2 - p_x^2c^2 - p_y^2c^2 - p_z^2c^2 \;&=\; \frac{m_0^2c^4}{1-\frac{v^2}{c^2}} \;-\; \frac{m_0^2v_x^2c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} \;-\; \frac{m_0^2v_y^2c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} \;-\; \frac{m_0^2v_z^2c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} \\ &=\; m_0^2c^4\,\frac{1-(v_x^2+v_y^2+v_z)/c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} \\ &=\; m_0^2c^4. \end{aligned} \tag{4.6}$$

En otras palabras, un observador puede determinar la masa de un objeto si conoce su energía E y su momento $\vec{p}$ relativista.

Ahora, tanto la energía (4.4) como el momento (3.2) de un objeto dependen de la velocidad v con que se mueven con respecto a un observador. Un observador $\mathcal{O}'$ que está en reposo respecto a la partícula verá una energía $E' = m_0c^2$ y un momento $\vec{p}\,' = 0$, mientras que el observador $\mathcal{O}$

verá un momento no-nulo y una energía más grande. Resulta que E y $\vec{p}$ están relacionados con E' y $\vec{p}\,'$ a través de una transformación de Lorentz

$$E' = \frac{E - vp_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad p'_x = \frac{p_x - vE/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad p'_y = p_y, \qquad p'_z = p_z. \tag{4.7}$$

Obsérvese ahora que la relación (4.6) es invariante bajo las transformaciones (4.7): el observador $\mathcal{O}'$, que mide energía E' y momento $\vec{p}\,'$ puede traducir sus resultados en terminos del E y $\vec{p}$ medidos por $\mathcal{O}$ como

$$\begin{aligned}
(E')^2 - (p'_x c)^2 - (p'_y c)^2 - (p'_z c)^2 \ &= \\
&= \left(\frac{E - vp_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)^2 - \left(\frac{p_x - vE/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)^2 c^2 - p_y^2c^2 - p_z^2c^2 \\
&= \frac{E^2 - 2vEp_x + v^2p_x^2}{1-v^2/c^2} - \frac{p_x^2c^2 - 2vEp_x + v^2E^2/c^2}{1-v^2/c^2} - p_y^2c^2 - p_z^2c^2 \\
&= \frac{(1-v^2/c^2)(E^2 - p_x^2c^2)}{1-v^2/c^2} - p_y^2c^2 - p_z^2c^2 \\
&= E^2 - p_x^2c^2 - p_y^2c^2 - p_z^2c^2 \\
&= m_0^2c^4.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

En otras palabras, un observador $\mathcal{O}$, que mide una energía E y un momento $\vec{p}$, y un obseravdor $\mathcal{O}'$, que mide una energía E' y un momento $\vec{p}\,'$, obtendrán el mismo valor para la masa m_0 del objeto:

$$E^2 - p_x^2c^2 - p_y^2c^2 - p_z^2c^2 \ = \ m_0^2c^4 \ = \ (E')^2 - (p'_x c)^2 - (p'_y c)^2 - (p'_z c)^2. \tag{4.9}$$

La masa m_0 de un objeto es por lo tanto un invariante, independiente del estado de movimiento del observador y del objeto mismo, puesto que su valor es el mismo cualquier conjunto de observadores conectados a través de una transformación de Lorentz.

5. Paradojas

Como ejemplo de que el concepto de masa relativista puede llegar a conclusiones erróneas, presentamos algunas paradojas que surgen al asumir que la masa aumenta como función de la velocidad relativa entre observador y objeto. En tal caso, la conclusión de que un objeto en movimiento tiende a formar un agujero negro parece casi inevitable: el aumento de masa, combinado con la dismunición de volumen debido a la contracción de Lorentz sugiere que cierto momento hay una gran cantidad de masa comprimida dentro de un radio menor que radio de Schwarzschild, por lo que se formaría un agujero negro.

Sin embargo, esta conclusión es errónea, básicamente por el hecho de que el efecto de aumento de masa relativista no existe, como hemos explicado arriba. La falsedad de esta conclusión se puede ver en la facilidad con que se pueden crear paradojas y contradicciones, si se asume lo contrario. Estas paradojas usan el Principio de la Relatividad, que afirma que cada uno de dos observadores en relativo movimiento uniforme puede considerarse a sí mismo en reposo y el otro moviéndose. Por lo tanto, las paradojas surgen debido al hecho de que el supuesto agujero negro sólo se manifestaría para el observador que se mueve con respecto a la masa considerada, mientras que el observador en reposo con respecto a esta masa no notaría nada particular, ya que no mediría un aumento de masa relativista. Sin embargo los hechos físicos, como los efectos que el supuesto agujero negro tendría sobre su entorno, deberían ser objetivos y no pueden depender del quien lo observa.

La paradoja de los granitos de arena

Supongamos que se colocan dos granitos de arena en el espacio vacío, a una distancia el uno del otro tan grande que la fuerza gravitatoria es completamente despreciable. De este modo los dos granitos no notan su mutua presencia y si inicialmente están en reposo entre ellos y con respecto a un observador $\mathcal{O}$, podemos suponer que seguirán en reposo entre ellos y con respecto a $\mathcal{O}$.

Un observador $\mathcal{O}'$ que se mueve con respecto a $\mathcal{O}$ y a los granitos de arena con una velocidad arbitrariamente cercana a la velocidad de la luz, se considerará a sí mismo en reposo y afirmará que son los granitos y el observador $\mathcal{O}$ los que se están moviendo con velocidades relativistas. Si la teoría del aumento de la masa y la formación de agujeros negros fuera correcta, el observador vería los granitos como dos agujeros negros con masas arbitrariamente grandes a una distancia arbitrariamente pequeña entre ellos, ya que la distancia relativa sufre una contracción de Lorentz. Los dos agujeros negros experimentarían una atracción gravitatoria enorme entre ellos y colapsarían en seguida, formando un solo agujero negro.

Por lo tanto, los dos observadores $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$ verían dos procesos físicos distintos y mutuamente incompatibles: desde un punto de vista las masas colapsan, desde otro punto de vista las masas siguen en reposo. Sin embargo la realidad es única: o colapsan o no colapsan, lo que nos lleva a una paradoja que sólo se puede resolver desestimando el aumento de masa realtivista.

La paradoja de las hormigas comunicadoras

Imaginamos una esfera (un globo terraqueo) maciza, de 3 metros de diámetro, en la que se colocan dos hormigas, una en el polo norte y otro en el polo sur. Las dos hormigas se comunican constantemente mandando señales entre ellas (por ejemplo dando golpes al globo de modo que las vibraciones se propaguen por el material, o simplemente por una fibra óptica que se extiende entre los polos a lo largo del meridiano de Greenwich).

Un observador externo, que ve pasar la esfera con velocidades relativistas, la vería Lorentz-contraido en la dirección del movimiento (digamos el plano ecuatorial en la dirección del meridiano de Greenwich), pero no en las direcciones transversales, ya que la contracción de Lorentz es puramente longitudinal. Por lo tanto, para este observador, el globo tiene la forma de un elipsoide, pero la distancia entre las hormigas sigue siendo 3 metros.

Si la teoría del aumento de masa y la formación de agujeros negros fuera correcta, podríamos imaginarnos que la esfera se moviera con la velocidad adecuada para que se formara un agujero negro con un horizonte con un tamaño más pequeño que el tamaño transversal de la esfera, digamos 1,5 metros, de modo que la zona cercana al ecuador estaría dentro del horizonte, pero los polos no (recuerda que la contracción de Lorentz sólo es longitudinal). En este caso el observador vería que las señales que intercambian las dos hormigas entran en el agujero negro cuando se acercan al ecuador, pero también salen de él cuando se acercan al otro polo, lo que contradice la propia definición de agujero negro.

6. Conclusiones

El concepto de masa relativista, definida en (4.1) a base de una derivación errónea de la Segunda Ley de Newton relativista, es un concepto innecesario y poco práctico, cuyo uso suele llevar a confusión y errores conceptuales. Es conceptualmente más correcto y más claro explicar la dinámica relativista en términos de la masa en reposo m_0, la energía y el momento relativista, E y $\vec{p}$, definidos respectivamente en (4.4) y (3.2). De esta manera, se trabaja con cantidades físicas que transforman de una manera bien definida bajo transformaciones de Lorentz, que relacionan distintos observadores inerciales. Concretamente, un cálculo sencillo demuesta que la masa en reposo de un objeto es un invariante, que tiene el mismo valor para todos los observadores, independientemente de su estado de movimiento o el del objeto mismo.

Bibliografía

- B. Janssen, *Teoría de la Relatividad General*,
(apuntes de la asignatura Relatividad General en la UGR)
`http://www.ugr.es/local/bjanssen/text/relatividad.pdf`
- L. Okun, *The concept of mass*, Physics Today, June 1989.
- J. Solbes, F.J. Botella, H. Pérez, F. Tarín, *Algunas consideraciones sobre la masa*, Revista Española de Física **16** (1), 2002.
- Wikipedia:
`http://en.wikipedia.org/wiki/Mass_in_special_relativity`
`http://en.wikipedia.org/wiki/Kaufmann-Bucherer-Neumann_experiments`