LAS ECUACIONES DE LAS ONDAS ELECTROMAGNETICAS

Las ecuaciones de Maxwell implican que tanto el campo eléctrico como el campo magnético se propagan en forma de ondas; ondas cuya amplitud decrece al avanzar en medios de conductividad no nula. Veamos una forma simple de obtener tales ecuaciones.

1. El medio de propagación:

Para obtener la estructura matemática de las ondas electromagnéticas, es decir, las ondas de propagación del campo eléctrico y del campo magnético, podemos partir de las cuatro ecuaciones de Maxwell, que en el vacío y en el sistema CGS Gauss, pueden expresarse por

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = 4\pi\rho, \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}, \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \qquad \vec{\nabla}.\vec{H} = 0$$

($\vec{J}$ es la densidad de corriente, ρ es la densidad de carga eléctrica, c es la velocidad de la luz)

Pueden definirse los vectores "Desplazamiento", $\vec{D}$, e "Inducción Magnética", $\vec{B}$, por la relación particular con el vector Campo Eléctrico y Campo Magnético, respectivamente, de modo que las ecuaciones de Maxwell pueden expresarse por

$$\vec{\nabla}.\vec{D} = \rho, \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \qquad \vec{\nabla}.\vec{H} = 0$$

Siendo el conjunto de las relaciones del desplazamiento $\vec{D}$ con el vector campo eléctrico, y de la inducción magnética $\vec{B}$ con el vector campo magnético lo que realmente define el tipo de medio en el que se efectúa la propagación del campo electromagnético.

1.1. Medio lineal:

En un medio lineal las relaciones entre las componentes del vector desplazamiento y del vector campo son relaciones lineales, esto es, puede escribir matricialmente que

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}$$

la matriz cuadrada de paso $\varepsilon = (\varepsilon_{ik})_3$ se llama "matriz dieléctrica del medio".
Con una relación análoga respecto al vector "campo magnético" en los medios que son lineales:

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix}$$

la matriz cuadrada de paso $\mu = (\mu_{ik})_3$ se llama "matriz inducción del medio".

2.2. Medios homogéneos:

Un medio se dice que es homogéneo si tiene las mismas propiedades electromagnéticas en todos sus puntos, esto es, si las matrices dieléctrica y de inducción son constantes.

$$\text{Medio homogéneo} \Leftrightarrow \begin{cases} e = const \\ m = const \end{cases}$$

2.3. Medios isótropos:

Un medio se dice que es isótropo si todas las direcciones son equivalentes en la propagación del campo. En un medio lineal e isótropo existe una proporcionalidad directa entre las componentes del vector desplazamiento y el vector campo eléctrico, o bien, entre las componentes del vector inducción magnética y el campo magnético:

$$\text{Medio isótropo y lineal} \Leftrightarrow e = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}, \qquad m = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

2.4. Los medios “dulces” o HLI:

Los medios que presentan estas tres características, es decir, homogeneidad, linealidad e isotropía (HLI), se denominan “medios dulces”.

El ejemplo más simple de medio dulce o HLI es el vacío:

Constante dieléctrica e inducción magnética del vacío:

$$e_0 = \begin{pmatrix} e_0 & 0 & 0 \\ 0 & e_0 & 0 \\ 0 & 0 & e_0 \end{pmatrix} \qquad m_0 = \begin{pmatrix} m_0 & 0 & 0 \\ 0 & m_0 & 0 \\ 0 & 0 & m_0 \end{pmatrix}$$

Relaciones vectoriales:

$$\vec{D} = e_0 \vec{E}, \qquad \vec{B} = m_0 \vec{H}$$

3. La ecuación de continuidad:

Se obtiene una relación muy sencilla entre la densidad de corriente $\vec{J}$ y la densidad de carga eléctrica ρ sin más que aplicar el operador nabla a la última de las ecuaciones de Maxwell, recordando que la divergencia del rotacional es cero:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{H}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \Rightarrow 0 = \vec{\nabla}\vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\vec{D} \Rightarrow 0 = \vec{\nabla}\vec{J} + \frac{\partial r}{\partial t}$$

o sea:

$$\vec{\nabla}\vec{J} + \frac{\partial r}{\partial t} = 0$$

Esta es la ecuación de continuidad, que podemos integrar fácilmente con la condición de proporcionalidad entre el vector densidad de corriente y el vector campo eléctrico mediante la constante de conductividad del medio

$$\vec{J} = s.\vec{E}$$

(s :conductividad del medio de propagación)

Se tiene, en definitiva:

$$\vec{\nabla}\vec{J} + \frac{\partial r}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\left(s\vec{E}\right) + \frac{\partial r}{\partial t} = 0 \Rightarrow s\vec{\nabla}\vec{E} + \frac{\partial r}{\partial t} = 0 \Rightarrow s\frac{r}{e_0} + \frac{\partial r}{\partial t} = 0 \Rightarrow r = r_0 . \in^{-\frac{s}{e_0}t}$$

Esta carga se hace prácticamente cero en cuanto pasen 4 constantes de tiempo, por lo que pueden existir campos eléctricos y magnéticos sin que exista carga eléctrica.

4. Las ecuaciones de onda:

Si suponemos que se trata de un campo electromagnético propagándose en un medio dulce, se pueden obtener fácilmente las ecuaciones diferenciales de propagación tanto del campo eléctrico $\vec{E}$, como del campo magnético $\vec{H}$:

a) Ecuación vectorial diferencial de onda para el campo eléctrico:

Partimos de la segunda ecuación de Maxwell $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ a la que hallamos el rotacional:

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}\right) = -\vec{\nabla} \wedge \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}.\vec{E}\right) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \wedge \vec{B}$$

O bien:

$$\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}.\vec{E}\right) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -m \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \wedge \vec{H}$$

si sustituimos ahora usando la cuarta de las ecuaciones de Maxwell, y tenemos en cuenta que el gradiente de la divergencia es nulo, se tendrá:

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{E} = -m \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = -m \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} - m \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} \Rightarrow -\vec{\nabla}^2 \vec{E} = -ms \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - me \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

por tanto, queda

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 \vec{E} - ms \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - me \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0}$$

b) Ecuación vectorial diferencial de onda para el campo magnético:

Partimos ahora de la tercera de las ecuaciones de Maxwell, $\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, a la que también aplicamos el rotacional: con la condición de $\vec{J} = s.\vec{E}$:

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{H}\right) = \vec{\nabla} \wedge \left(s\vec{E}\right) + e \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \wedge \vec{E}$$

o sea:

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{H}\right) - \vec{\nabla}^2 \vec{H} = s\vec{\nabla} \wedge \vec{E} + e \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \wedge \vec{E}$$

Sustituyendo la segunda de las ecuaciones de Maxwell y anulando al gradiente de la divergencia:

$$-\vec{\nabla}^2\vec{H} = -sm\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - em\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$$

Por tanto:

$$\boxed{\vec{\nabla}^2\vec{H} - sm\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - em\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0}$$

Las ecuaciones diferenciales vectoriales que describen la propagación del campo electromagnético en un medio dulce (lineal, homogéneo e isótropo), cuyos vectores campo son $\vec{E}$ y $\vec{H}$, con conductividad s y constantes dieléctrica y de inducción dadas por e y m, vienen dadas por las expresiones

$$\vec{\nabla}^2\vec{E} - me\left[\frac{s}{e}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\right] = 0$$

$$\vec{\nabla}^2\vec{H} - me\left[\frac{s}{e}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} + \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}\right] = 0$$

El estudio de las soluciones de estas ecuaciones diferenciales nos permitirá determinar de qué forma se propaga el campo.

5. La forma sinusoidal de las soluciones:

La solución de las ecuaciones de onda depende fundamentalmente de las condiciones de contorno impuestas.

Sin embargo, por el Teorema de la serie de Fourier o de la integral de Fourier, sabemos que toda solución periódica o no periódica, respectivamente, puede obtenerse como suma de senos y cosenos, y, por otra parte, al tratarse de soluciones de ecuaciones lineales sabemos, por el teorema de superposición, que si dos funciones son soluciones de la ecuación también los será su suma.

Así, entonces, la solución de la ecuación de onda del campo eléctrico será:

$$\vec{E} = \left(E_x, E_y, E_z\right) =$$
$$= \left(E_x(x,y,z).\cos(wt + j_x),\ E_x(x,y,z).\cos(wt + j_y),\ E_z(x,y,z).\cos(wt + j_z)\right) =$$

$$= \left(E_x(x,y,z).\mathrm{Re}\left[\in^{ij_x}\in^{iwt}\right],\ E_y(x,y,z).\mathrm{Re}\left[\in^{ij_y}\in^{iwt}\right],\ E_z(x,y,z).\mathrm{Re}\left[\in^{ij_z}\in^{iwt}\right]\right) =$$

$$= \left(\mathrm{Re}\left[e_x \in^{iwt}\right],\ \mathrm{Re}\left[e_y \in^{iwt}\right],\ \mathrm{Re}\left[e_z \in^{iwt}\right]\right) = \mathrm{Re}\left[\vec{e}. \in^{iwt}\right]$$

donde es:

$$\vec{e} = \left(e_x, e_y, e_z\right)$$

y también:

$$e_x = E_x(x,y,z).\in^{ij_x},\quad e_y = E_y(x,y,z).\in^{ij_y},\quad e_z = E_x(x,y,z).\in^{ij_z}$$

y, separando las partes reales y las imaginarias:

$$e_x = e_{xr} + ie_{xi},\quad e_y = e_{yr} + ie_{yi},\quad e_z = e_{zr} + ie_{zi}$$

$$\vec{e} = \left(e_{xr} + e_{yr} + e_{zr}\right) + i.\left(e_{xi} + e_{yi} + e_{zi}\right) = E_r + iE_i$$

En resumen:

$$\vec{E} = \mathrm{Re}\left[\vec{e} \in^{iwt}\right] = \mathrm{Re}\left[\left(\vec{E}_r + i\vec{E}_i\right)\left(\cos wt - i sen wt\right)\right] = \vec{E}_r \cos wt - \vec{E}_i sen wt$$

y, en definitiva, es

$$\vec{E} = \vec{E}_r \cos wt - \vec{E}_i sen wt$$

Por analogía, se tiene para el campo magnético una expresión análoga:

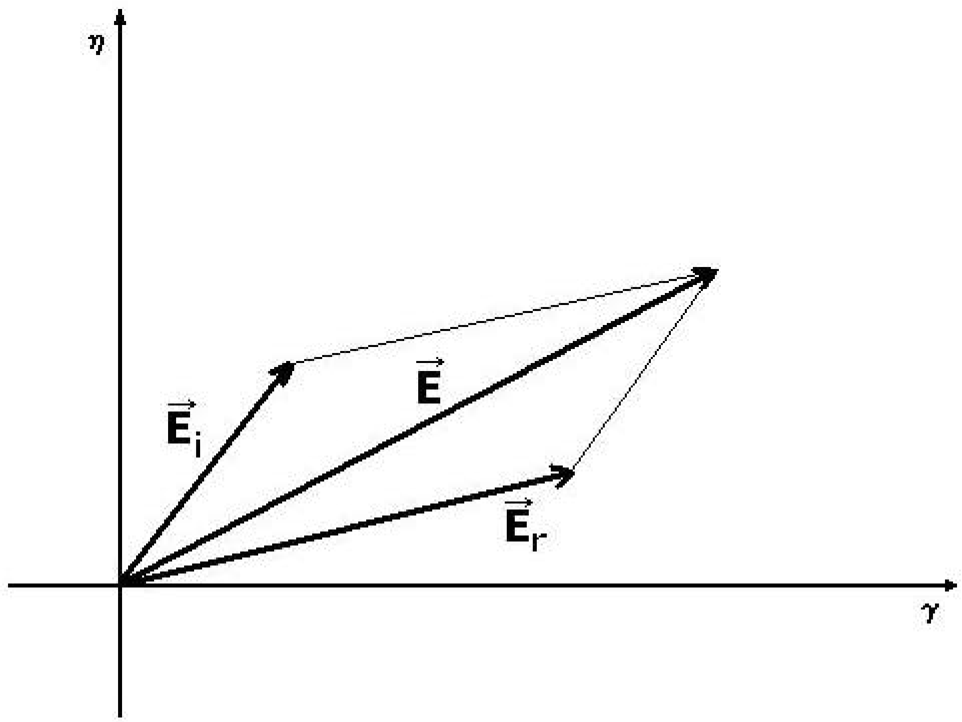
$$\vec{H} = \vec{H}_r \cos wt - \vec{H}_i sen wt$$

Las soluciones vectoriales de las ecuaciones diferenciales vectoriales de onda, han de ser, pues:

$$\vec{E} = \vec{E}_r \cos wt - \vec{E}_i senwt$$

$$\vec{H} = \vec{H}_r \cos wt - \vec{H}_i senwt$$

que nos indican el carácter coplanario de los vectores $\vec{E}, \vec{E}_r, \vec{E}_i$ por una parte, y de los vectores $\vec{H}, \vec{H}_r, \vec{H}_i$, por otra



Los vectores campo eléctrico, $\vec{E}$, y sus componentes real, E_r, e imaginaria, E_i, están siempre en un mismo plano (γ, η).

Lo mismo ocurre con el vector campo magnético, $\vec{H}$, y sus componentes real e imaginaria H_r y H_i. También se encuentran estos vectores en un mismo plano.

Podemos, en definitiva, afirmar, a la vista de las ecuaciones de onda, que el campo eléctrico se propaga en un plano y el campo magnético se propaga en otro plano.

6. Referencias:

Básicos:

ADLER, Richard - CHU, Lan Jen, y FANO, Robert M.
Electromagnetic Energy Transmission and Radiation.
Edit John Wiley and Sons, Inc. 1968, New York.

PANOFSKY, Wolfgang y PHILIPS, Melba
Classical Electricity and Magnetism.
Edit Adisson-Wesley, 2ª Edición, 1962, Cambridge. Massachusetts

LANGMUIR, Robert V.
Electromagnetic Fields and Waves.
Edit Mc Graw Hill, 1961. New york

Ampliar:

FELSEN, L.B. y MARCUVITZ, N.
Radiation and scattering of Waves.
Edit IEE. 1994. Cambridge. N. Jersey

COLLIN, R.E.
Field Theory of Guided Waves
Edit IEE, 1991, Cambridge. New Jersey

BALANIS, C.A.
Advanced Engineering Mathematics
Edit John Wiley, 1989. New York

VAN BLADEL, J.
Singular Electromagnetic Fields and Sources
Edit Oxford University Press, 1991. Oxford, U.K.