

Capítulo 1

Ondas electromagnéticas

Alberto Carramiñana, 27 de agosto de 2018.

1.1. Electrodinámica clásica

1.1.1. Ecuaciones de maxwell

Formulaciones

Las ecuaciones Maxwell permiten calcular los campos eléctrico y magnético, $\vec{E}(\vec{r}, t)$ y $\vec{B}(\vec{r}, t)$ respectivamente, a partir de las densidades de carga y de corriente eléctrica, $\rho(\vec{r}, t)$ y $\vec{j}(\vec{r}, t)$. Se pueden escribir en más de un sistema de unidades. En particular en el *sistema gaussiano* tienen la siguiente expresión:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (1.4)$$

Este sistema presupone unidades cgs y la carga dada en términos de la *unidad electrostática de carga*, ue [$=g^{1/2}cm^{3/2}s^{-1}$], también denominada *stat-coulomb*. La carga elemental, correspondiente a la del electrón, es

$$-e \simeq 4.803\,204 \times 10^{-10} \text{ ues.}$$

Los campos eléctrico y magnético quedan expresados en statVolt/cm [$=g^{1/2}cm^{-1/2}s^{-1}$]. Este sistema integra como constante la velocidad de la luz, $c = 299\,792\,458$ m/s.

Estas ecuaciones pueden ser expresadas en el sistema internacional (SI),

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \rho/\varepsilon_0, & \nabla \cdot \vec{B} &= 0, \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.\end{aligned}\quad (1.5)$$

Este sistema emplea diferentes unidades para los campos eléctrico y magnético, con $E_{SI} = cE_{cgs}$, introduciendo las constantes $\varepsilon_0 = 1/4\pi c$, la permitividad del vacío, $\mu_0 = 4\pi/c$, la permeabilidad magnética del vacío, de las cuales *se calcula* la velocidad de la luz, $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$.

Las dos formulaciones anteriores son para campos en el vacío, o campos descritos a nivel microscópico. La formulación macroscópica para un medio de permitividad ε y permeabilidad magnética μ es,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{D} &= \rho, & \nabla \cdot \vec{B} &= 0, \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \nabla \times \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},\end{aligned}\quad (1.6)$$

con $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, el campo de desplazamiento, y $\vec{H} = \vec{B}/\mu$, el campo magnético y \vec{B} la inducción magnética. En lo que sigue se emplearán las expresiones gaussianas, ecuaciones 1.1 a 1.4.

Principio de superposición e invariancia

Las ecuaciones de Maxwell, siendo lineales, cumplen el *principio de superposición*: la suma de dos soluciones es también una solución. Las ecuaciones son invariantes ante transformaciones de Lorentz y, por tanto, consistentes con la relatividad especial (capítulo 4).

Ley de Coulomb - caso electrostático

La *ley de Coulomb* expresa el campo eléctrico originado por una carga puntual en reposo,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{r^2} \hat{r}, \quad (1.7)$$

situando el origen de coordenadas en q . El campo eléctrico puede describirse en términos de *líneas de campo* que parten radialmente de la carga. Las líneas convergen o divergen de la carga, dependiendo del signo de la misma (figura 1.1). Esta expresión se deriva de la ecuación de Maxwell 1.1, integrada sobre un volumen esférico centrado en q :

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \vec{E} \, dV = \int_{\mathcal{V}} 4\pi\rho \, dV \Rightarrow \oint_{\mathcal{A}(\mathcal{V})} (\vec{E} \cdot \hat{r}) \, da = E_r 4\pi r^2 = 4\pi q, \quad (1.8)$$

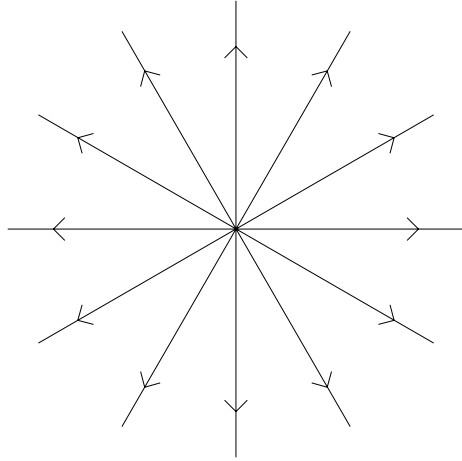


Figura 1.1: Las líneas de campo eléctrico divergen de una carga puntual positiva. Para una carga negativa se invierten las flechas.

siendo q la integral de $\rho(\vec{r})$ sobre el volumen \mathcal{V} que rodea a la carga. El campo se considera radial y constante sobre el volumen esférico centrado en q , donde el vector normal a la superficie es radial, $\hat{n} = \hat{r}$, y el área de la esfera $A = 4\pi r^2$, con lo que recobramos la ley de Coulomb (1.7).

De acuerdo al principio de superposición el campo electrostático de un conjunto discreto de N cargas $\{q_i\}$ situadas en $\{\vec{r}_i\}$, está dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}.$$

Para el caso de una distribución continua de cargas $\rho(\vec{r})$ el campo electrostático queda como,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'. \quad (1.9)$$

En el caso estático la ecuación 1.3 ($\nabla \times \vec{E} = 0$) permite definir el potencial electrostático $\phi(\vec{r})$ como $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi$, calculable mediante la ecuación de Poisson, $\nabla^2\phi = -4\pi\rho$. Para una carga puntual situada en \vec{r}_0 , la solución es,

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}, \quad (1.10)$$

consistente con las ecuaciones 1.7 y 1.9.

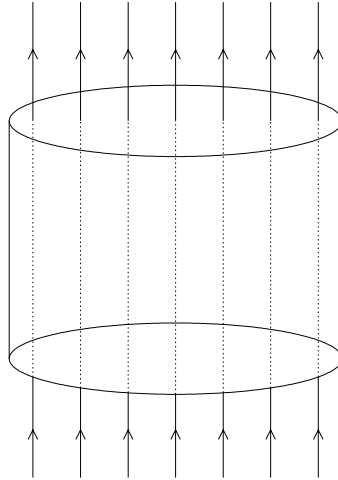


Figura 1.2: Líneas de campo magnético atravesando un volumen cilíndrico. El número de líneas entrando por un lado de una superficie iguala al número de líneas salientes; la divergencia de \vec{B} es nula.

La ecuación 1.2, $\nabla \cdot B = 0$, implica *la inexistencia de cargas magnéticas*. Al integrarla sobre un volumen tenemos el mismo número de líneas saliendo y entrando a través de la superficie \mathcal{A} que encierra al volumen en consideración, es decir

$$\oint_{\mathcal{A}} \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0. \quad (1.11)$$

lo cual puede ilustrarse con un volumen de simetría cilíndrica (figura 1.2), en donde las líneas que entran ($\vec{B} \cdot d\vec{a} < 0$) por la parte inferior de una superficie son las mismas que salen ($\vec{B} \cdot d\vec{a} > 0$) por la parte superior: las líneas de campo magnético no divergen o convergen en ningún punto. Un punto de convergencia correspondería con una carga magnética - o monopolo. Otra consecuencia de la ec. 1.2 es la posibilidad de escribir \vec{B} en términos del potencial vectorial \vec{A} como $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, que por definición satisface $\nabla \cdot \vec{B} = 0$.

Ley de Ampere - caso magnetostático

En el caso estático, sin dependencia temporal, la ecuación 1.4 se escribe como

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j},$$

con $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r})$. Esta ecuación proviene de la ley de Ampere, que se recupera al integrar sobre una superficie normal a \vec{j} ,

$$\int_A (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{a} = \frac{4\pi}{c} I \quad \Rightarrow \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{4\pi}{c} I. \quad (1.12)$$

Si consideramos una superficie acotada por un círculo de radio R , normal \hat{n} y vector tangente $\hat{\phi}$ la ley de Ampere resulta en

$$\vec{B} = \frac{2I}{Rc} \hat{\phi},$$

al dividir por $2\pi R$, la circunferencia de C . El campo magnético correspondiente a una corriente I que lleva un cable lineal infinito decae como $1/R$, siendo R la distancia a la recta.

Maxwell generalizó la ley de Ampere al introducir *la corriente de desplazamiento* en la ecuación 1.4. El término añadido por Maxwell corresponde a la inducción de un campo magnético por un campo eléctrico variable en el tiempo - fuera del caso magnetostático.

Ley de inducción de Faraday

La ecuación 1.3 corresponde a *la ley de inducción de Faraday*, la cual describe la inducción de un campo eléctrico por un campo magnético dependiente del tiempo. Al integrar sobre una superficie obtenemos que el voltaje inducido, $\phi(\vec{r}, t)$, está dado por el cambio con el tiempo del flujo magnético, Φ_m :

$$\phi(\vec{r}, t) = - \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_A \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left(\int_A \vec{B} \cdot d\vec{a} \right) = \frac{1}{c} \frac{d\Phi_m}{dt}, \quad (1.13)$$

con C la trayectoria definida por la frontera de la superficie A . Un campo magnético dependiente del tiempo que atraviesa un circuito induce un campo eléctrico, o voltaje, (fig. 1.3).

1.1.2. Ecuación de continuidad

De las ecuaciones de Maxwell puede obtenerse la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0, \quad (1.14)$$

que describe la conservación de carga eléctrica. La integral de la expresión 1.14 sobre un volumen cerrado V acotado por una superficie A implica,

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_A \vec{j} \cdot d\vec{a},$$

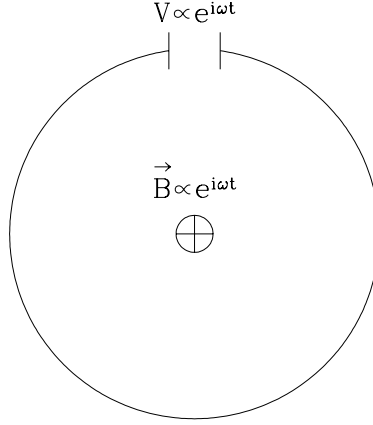


Figura 1.3: Un campo magnético con dependencia armónica en el tiempo induce un voltaje con misma dependencia temporal al atravesar un circuito.

el cambio de la carga Q contenida en V está dada por la “entrada” y “salida” de líneas de corriente a través de la superficie \mathcal{A} : donde converge (diverge) la densidad de corriente aumenta (disminuye) la densidad de carga.

1.1.3. Fuerza de Lorentz y Teorema de Poynting

En presencia de campos electromagnéticos actúa sobre toda carga q , moviéndose con velocidad \vec{v} , la denominada fuerza de Lorentz:

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right). \quad (1.15)$$

La fuerza de Lorentz proporciona una aceleración paralela al campo eléctrico y perpendicular al campo magnético. En el caso de campos con una dirección fija la tendencia de una carga es moverse en la dirección de \vec{E} y girar alrededor de las líneas de campo magnético \vec{B} .

El teorema de Poynting proporciona una relación análoga a la ecuación de continuidad, que se deriva de estimar el trabajo que realiza la fuerza de Lorentz sobre un conjunto de cargas discretas. Definiendo la densidad de energía del campo electromagnético,

$$u \equiv \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2), \quad (1.16)$$

y el flujo de energía electromagnética, o vector de Poynting:

$$\vec{S} \equiv \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}), \quad (1.17)$$

obtenemos de las ecuaciones de Maxwell la relación:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (1.18)$$

La diferencia principal entre la ecuación 1.18 y la ecuación 1.14 radica en el término de la derecha: mientras que la carga eléctrica es una cantidad que se conserva, la energía electromagnética puede no conservarse y ser disipada o producida. El principio de conservación de la energía se mantiene ya que la energía electromagnética disipada se convierte en otro tipo de energía, como mecánica o térmica. El término $\vec{j} \cdot \vec{E}$ corresponde con la *ley de Ohm*.

1.1.4. Potenciales electromagnéticos

Las ecuaciones de Maxwell pueden escribirse alternativamente en términos de los potenciales electromagnéticos, \vec{A} y ϕ , derivados de las dos ecuaciones homogéneas. El potencial vectorial \vec{A} define al campo magnético,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad (1.19)$$

satisfaciendo automáticamente la ecuación 1.3, ya que la divergencia de un rotacional es nula. El campo eléctrico puede definirse entonces a partir de ambos potenciales, escalar y vectorial:

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (1.20)$$

dado que la divergencia de un gradiente es cero. Con estas definiciones, la dos ecuaciones homogéneas de Maxwell se satisfacen automáticamente. La substitución de los potenciales en las ecuaciones inhomogéneas da:

$$\nabla^2 \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) = -4\pi\rho, \quad (1.21)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (1.22)$$

Estas ecuaciones pueden simplificarse aprovechando que los potenciales no están definidos de manera unívoca. Dada una función escalar arbitraria ψ , podemos reemplazar el potencial vectorial \vec{A} por $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi$ y el potencial escalar $\phi \rightarrow \phi' = \phi - (1/c)(\partial\psi/\partial t)$, sin dejar de cumplir con las ecuaciones homogéneas de Maxwell. El seleccionar la función ψ de manera a cumplir ciertas condiciones corresponde a la elección de una *norma*. En la práctica hay dos normas que permiten simplificar las ecuaciones 1.21 y 1.22: la *norma de Coulomb* y la *norma de Lorentz*.

La norma de Coulomb:

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0, \quad (1.23)$$

es conveniente para tratar problemas de electrostática. La primera de las ecuaciones de Maxwell queda como una ecuación de Poisson, $\nabla^2 \phi = -4\pi\rho$, de solución general

$$\phi(\vec{r}, t) = \int \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'. \quad (1.24)$$

En el caso estacionario ($\partial\phi/\partial t = 0$, $\partial\vec{A}/\partial t = 0$), el potencial vectorial también satisface una ecuación de Poisson, $\nabla^2 \vec{A} = -4\pi\vec{j}/c$.

La norma de Lorentz:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0, \quad (1.25)$$

permite escribir las dos ecuaciones inhomogéneas de Maxwell en forma de ecuaciones de onda con fuentes:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \quad \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (1.26)$$

Las ecuaciones 1.26 pueden integrarse, quedando ϕ y \vec{A} en términos de las densidades de carga y corriente:

$$\phi(\vec{r}, t) = \int \frac{\rho(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r', \quad (1.27)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r', \quad (1.28)$$

Las fuentes de los campos deben ser evaluadas en $t_{ret} = t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c$, manifestando el retraso temporal causado por la propagación a velocidad finita de la interacción electromagnética (cap. 4).

(*Shu 11; Ryb 2.1; Jackson 6*)

1.2. Ondas electromagnéticas en el vacío

1.2.1. Ecuación de onda

En ausencia de cargas y corrientes las ecuaciones de Maxwell dan lugar a una ecuación de onda para los campos eléctrico y magnético:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.29)$$

Bajo la norma de Lorentz obtenemos el mismo tipo de ecuación, una ecuación de onda, para ambos potenciales electromagnéticos. La solución a la ecuación de onda puede deducirse por separación de variables, introduciendo la dependencia armónica,

$$\vec{E} = \hat{e}E_0 \exp \left\{ i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \right\}, \quad \vec{B} = \hat{b}B_0 \exp \left\{ i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \right\}, \quad (1.30)$$

la ecuación de onda resulta en la relación de dispersión,

$$\omega^2 - k^2c^2 = 0. \quad (1.31)$$

Eligiendo ambas cantidades positivas y la solución, $k = +\omega/c$, reducimos las ecuaciones de Maxwell:

$$\vec{k} \cdot \hat{e} = 0, \quad (\vec{k} \times \hat{e}) E_0 = +\hat{b} (\omega/c) B_0 \quad (1.32)$$

$$\vec{k} \cdot \hat{b} = 0, \quad (\vec{k} \times \hat{b}) B_0 = -\hat{e} (\omega/c) E_0, \quad (1.33)$$

desprendiéndose $E_0 = B_0$. Los vectores unitarios $\{\hat{k}, \hat{e}, \hat{b}\}$ son linealmente independientes, formando una base ortonormal. Los campos eléctrico y magnético son perpendiculares a la dirección de propagación de la onda electromagnética. El comportamiento de los vectores \hat{e} y \hat{b} define las características de polarización de la onda (§1.2.2), mientras que el vector \vec{k} la caracteriza espectralmente y en su propagación.

Un vector dado \vec{k} describe la propagación de una *componente monocromática*. La solución más general de la ecuación de onda es una superposición de ondas monocromáticas en todas las direcciones,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int \hat{e}_{\pm}(\vec{k}) E_{\pm}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} \mp \omega t)} d^3k. \quad (1.34)$$

La ecuación de onda se cumple si $k^2 = \omega^2/c^2$ dentro de la integral. Cada valor de \vec{k} representa una componente espectral y el signo \pm indica las dos posibles orientaciones de dicha componente espectral.

La densidad y el flujo de energía de las ondas electromagnéticas, se calculan con la expresiones 1.16 y 1.17, resultando en

$$u = E_0^2/4\pi, \quad \vec{S} = (cE_0^2/4\pi) \hat{k}.$$

1.2.2. Polarización

Polarización de luz monocromática

El comportamiento con el tiempo y el espacio de los vectores \vec{E} y \vec{B} , se describe en términos de la polarización de la onda. Basta concentrarse en

uno de los campos ya que el otro es perpendicular a él en todo momento. Al ser la densidad de energía de la onda, $\propto |\vec{E}(t)|^2 + |\vec{B}(t)|^2 = \text{constante}$, tenemos que $|\vec{E}|$ aumenta $|\vec{B}|$ disminuye, y viceversa. Para la descripción de una onda *monocromática* propagándose en la dirección $\hat{k} = \hat{z}$ (ec. 1.30), podemos emplear vectores imaginarios expresados en función de \hat{x} y \hat{y} :

$$\hat{e}E_0 = \hat{x}\epsilon_x e^{i\varphi_x} + \hat{y}\epsilon_y e^{i\varphi_y}. \quad (1.35)$$

siendo ϵ_x y ϵ_y cantidades reales fijas. El campo eléctrico correspondiente está completamente caracterizado por los valores $\{\epsilon_x, \epsilon_y, \varphi_x, \varphi_y\}$. Podemos visualizar su comportamiento temporal si fijamos un punto, en particular $z = 0$, y suponemos que el campo medible es la parte real de \vec{E} ,

$$\vec{E}_{med} = \mathcal{R}(\vec{E}(0, t)) = \hat{x}\epsilon_x \cos(\omega t - \varphi_x) + \hat{y}\epsilon_y \cos(\omega t - \varphi_y). \quad (1.36)$$

Esta ecuación puede manipularse para dar

$$\left(\frac{E_x}{\epsilon_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{\epsilon_y}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x E_y}{\epsilon_x \epsilon_y}\right) \cos \Delta\varphi = \sin^2 \Delta\varphi, \quad (1.37)$$

donde $E_x = \epsilon_x \cos(\omega t - \varphi_x)$, $E_y = \epsilon_y \cos(\omega t - \varphi_y)$, con $\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x$. Podemos visualizar el comportamiento del vector \vec{E} , confinándolo a una “caja” de lados $\epsilon_x \times \epsilon_y$, donde:

- si $\epsilon_x = 0$ o $\epsilon_y = 0$ el vector \vec{E} está restringido al eje x o y , siendo dos casos particulares de polarización lineal;
- si $\Delta\varphi = 0$, entonces $(E_x/\epsilon_x - E_y/\epsilon_y)^2 = 0$, por lo que el vector \vec{E} está restringido a moverse a lo largo de una línea definida por las esquinas inferior izquierda y superior derecha de la caja. Este es un modo de *polarización lineal*.
- si $\Delta\varphi = \pi$, entonces $(E_x/\epsilon_x + E_y/\epsilon_y)^2 = 0$, y el vector \vec{E} está restringido a moverse a lo largo de una línea entre las esquinas superior izquierda e inferior derecha de la caja. Este es el modo de polarización lineal ortogonal al definido por $\Delta\varphi = 0$.
- si $\Delta\varphi = \pi/2$ o $\Delta\varphi = 3\pi/2$, obtenemos la ecuación de una elipse $(E_x/\epsilon_x)^2 + (E_y/\epsilon_y)^2 = 1$, y se tiene *polarización es elíptica*. Si además $\epsilon_x = \epsilon_y$ la elipse viene siendo un círculo y la *polarización es circular*. Para $\Delta\varphi = \pi/2$, tenemos $\vec{E} = \hat{x}\epsilon_x \cos(\omega t - \varphi_x) - \hat{y}\epsilon_y \sin(\omega t - \varphi_x)$, que corresponde a rotación en el sentido de las manecillas del reloj, o

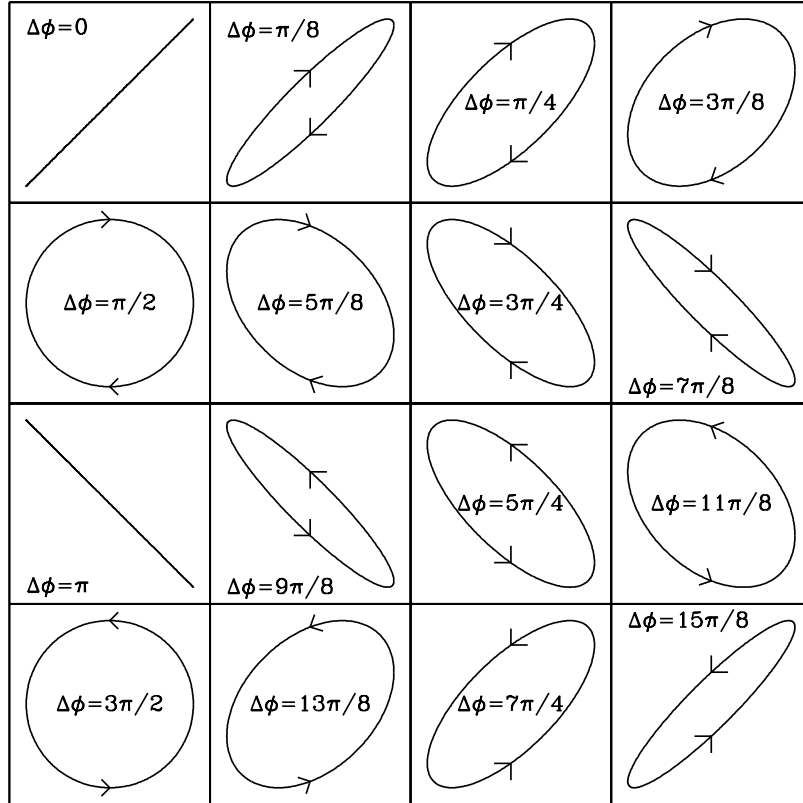


Figura 1.4: Modos de polarización elíptica para $\Delta\varphi$ entre 0 y 2π , y considerando $\epsilon_x = \epsilon_y \Rightarrow Q = 0$. A la izquierda, $\Delta\varphi = n\pi/2$, obtenemos polarización lineal, $V = 0$, o circular, $U = 0$.

polarización izquierda. Si $\Delta\varphi = 3\pi/2$, tenemos $\vec{E} = \hat{x}\epsilon_x \cos(\omega t - \varphi_x) + \hat{y}\epsilon_y \sin(\omega t - \varphi_x)$ que corresponde a rotación en el sentido inverso al de las manecillas del reloj, o *polarización derecha*.

Esto se ilustra en la figura 1.4.

Parámetros de Stokes

La polarización de una onda monocromática se describe comúnmente en términos de los cuatro parámetros de Stokes, medibles observacionalmente:

$$I \equiv \epsilon_x^2 + \epsilon_y^2, \quad Q \equiv \epsilon_x^2 - \epsilon_y^2, \quad U \equiv 2\epsilon_x\epsilon_y \cos \Delta\varphi, \quad V \equiv 2\epsilon_x\epsilon_y \sin \Delta\varphi. \quad (1.38)$$

Polarización	$\Delta\varphi$	ϵ_x, ϵ_y	Q	U	V	χ	β
Circular izquierda	$\pi/2$	$\epsilon_x = \epsilon_y$	0	0	$+I$	0/0	$+\pi/4$
Circular derecha	$3\pi/2$	$\epsilon_x = \epsilon_y$	0	0	$-I$	0/0	$-\pi/4$
Elíptica izquierda	$0 < \Delta\varphi < \pi$	$\epsilon_x \neq \epsilon_y$	$\neq 0$	> 0	$\neq 0$	> 0	$\neq 0$
Elíptica derecha	$\pi < \Delta\varphi < 2\pi$	$\epsilon_x \neq \epsilon_y$	$\neq 0$	< 0	$\neq 0$	< 0	$\neq 0$
Lineal (x)	$0 - 2\pi$	$\epsilon_y = 0$	$+I$	0	0	0	0
Lineal (y)	$0 - 2\pi$	$\epsilon_x = 0$	$-I$	0	0	0	0
Lineal (xy)	0	$\epsilon_x = \epsilon_y$	0	$+I$	0	$+\pi$	0
Lineal ($-xy$)	π	$\epsilon_x = \epsilon_y$	0	$-I$	0	$-\pi$	0

Cuadro 1.1: Algunos modos de polarización para una onda monocromática con los parámetros físicos y de Stokes correspondientes.

Se cumple la igualdad $I^2 = Q^2 + U^2 + V^2$ donde I representa la amplitud de la onda. Los parámetros $\{I, Q, U, V\}$ tienen el siguiente comportamiento:

- **Polarización lineal:** es sobre el eje x para $\epsilon_x = 0$, y sobre el eje y para $\epsilon_y = 0$. Estos casos corresponden a $U = V = 0$ con $Q = \pm I$, respectivamente. También ocurre para $\sin(\Delta\varphi) = 0$, es decir $V = 0$, con $U = 2\epsilon_x\epsilon_y \geq 0$, y $\sin(\Delta\varphi) = \pi \Rightarrow V = 0, U \leq 0$. En resumen, $V = 0$ indica la polarización lineal, con distintos valores de Q y U según el eje de polarización.
- **Polarización circular:** corresponde a $\epsilon_x = \epsilon_y$, con $\Delta\varphi = \pi/2$ o $3\pi/2$. En ese caso tenemos $Q = U = 0$, con $V = I$ para polarización circular izquierda y $V = -I$ para polarización circular derecha.

El modo más general de polarización es elíptico, que tiene de manera natural como límites el lineal y el circular. Se puede describir con los ángulos de polarización, χ , y de elipticidad, β , mediante

$$Q = I \cos 2\beta \cos 2\chi, \quad U = I \cos 2\beta \sin 2\chi, \quad V = I \sin 2\beta, \quad (1.39)$$

de forma que $\tan 2\chi \equiv U/Q$, $\sin 2\beta \equiv V/I$. La tabla 1.1 resume algunos modos de polarización y los parámetros correspondientes. Si pensamos en términos de una elipse de semiejes a, b rotada un ángulo χ , se puede demostrar que $a^2 = I \cos^2 \beta$, $b^2 = I \sin^2 \beta$. La excentricidad queda dada por $e^2 = 1 - \tan^2 \beta$, o por $e^2 = 1 - \cot^2 \beta$ para $\pi/4 \leq \beta \leq 3\pi/4$.

En general se tiene radiación no monocromática, para la que se miden

parámetros de Stokes promediados sobre tiempo y frecuencia:

$$\bar{I} = \langle \epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 \rangle, \quad \bar{Q} = \langle \epsilon_x^2 - \epsilon_y^2 \rangle, \quad \bar{U} = \langle 2\epsilon_x\epsilon_y \cos(\Delta\varphi) \rangle, \quad \bar{V} = \langle 2\epsilon_x\epsilon_y \sin(\Delta\varphi) \rangle. \quad (1.40)$$

En este caso $\bar{I}^2 \geq \bar{Q}^2 + \bar{U}^2 + \bar{V}^2$, definiéndose el grado de polarización como,

$$\Pi = \sqrt{\bar{Q}^2 + \bar{U}^2 + \bar{V}^2} / \bar{I}, \quad (1.41)$$

distinguiendo la componente de luz polarizada, $\Pi\bar{I}$, de la no polarizada, o “natural”, $(1 - \Pi)\bar{I}$.

(*Shu 11, 12; Ryb 1.1, 2*)

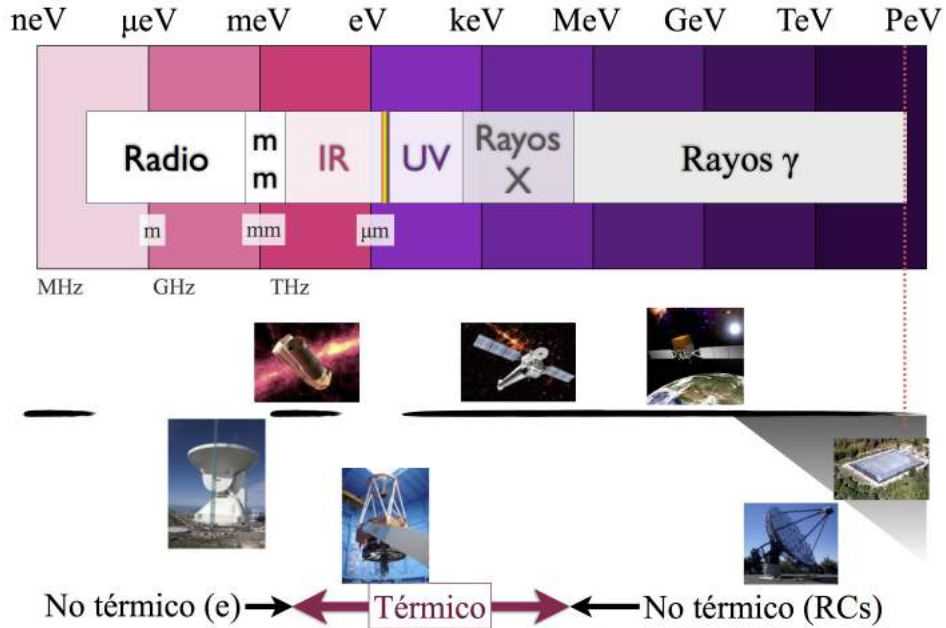
1.2.3. El espectro electromagnético

La relación de dispersión entre el número de onda, k , y la frecuencia angular, ω , puede escribirse en términos de la longitud de onda, λ , y la frecuencia, ν , como $\lambda\nu = c$. Distintos valores de λ , o equivalentemente de ν definen distintas regiones del espectro electromagnético (Figura 1.5). Para este efecto es importante también la relación de Planck, entre la energía de un fotón y la frecuencia de la onda electromagnética correspondiente, $E = h\nu$. Las regiones del espectro se describen a continuación.

Ondas de radio y banda milimétrica

Históricamente la ondas de radio se han descrito en términos de frecuencias o por su longitud de onda. El uso más conocido involucra la radio y televisión comercial que se da en las bandas de AM (100 kHz a 30 MHz), FM (87.5 a 108 MHz) y televisión (VHF, alrededor de 50 MHz y UHF, por encima de 300 MHz). Cada país hace una asignación de bandas del espectro de ondas radio; en México el encargado de esta partición es el Instituto Federal de Telecomunicaciones, que mantiene de forma pública el “Cuadro Nacional de Atribución de Frecuencias”, que abarca desde 3 kHz hasta 300 GHz.

En términos de la observación astronómica, la atmósfera impone un límite inferior a las frecuencias que se estudian comúnmente, al absorber ondas de radio con $\nu \lesssim 50 - 100$ MHz, debido a la acción de cargas libres en la ionósfera. La atmósfera se vuelve transparente para ondas de radio en el rango $100 \text{ MHz} \lesssim \nu \lesssim 30 \text{ GHz}$, equivalente a $\lambda \gtrsim 1 \text{ cm}$. En las *bandas milimétrica*, $10 \text{ mm} \gtrsim \lambda \gtrsim 1 \text{ mm}$, y *submilimétrica*, $\lambda \lesssim 1 \text{ mm}$, toma importancia el efecto de la absorción por moléculas como O_2 y H_2O ; esto se ilustra en la figura 1.6 que muestra la transparencia en estas bandas en Mauna Kea, Hawái, un sitio con telescopios milimétricos y submilimétricos.



x

Figura 1.5: Ilustración del espectro electromagnético: arriba se muestran los rangos espectrales, en términos de energía y longitud de onda del fotón. En medio se ilustra la absorción de atmósfera mediante una línea horizontal interrumpida por las ventanas de transparencia, marcando encima de la línea telescopios espaciales y por debajo instrumentos terrestres. Abajo se ilustra el rango de emisión térmica y no térmica.

En términos astrofísicos, la banda milimétrica es también la frontera entre procesos no-térmicos (radio) y térmicos (mm).

Infrarrojo

La banda infrarroja se describe comúnmente en términos de longitudes de onda, siendo raro el uso de frecuencias por encima de 1 THz. El infrarrojo lejano cubre aproximadamente $1 \text{ mm} \gtrsim \lambda \gtrsim 20 \mu\text{m}$; el infrarrojo medio entre 20 y 2 micras, descrito por las bandas atmosféricas LMNQ; y el infrarrojo cercano entre 2 y $0.8 \mu\text{m} = 8000 \text{ \AA}$, descrito por las bandas JHK. El infrarrojo lejano es accesible solamente desde el espacio, empleando observatorios espaciales como *Spitzer* o *JWST*, y con telescopios en aviones, como SOFIA;

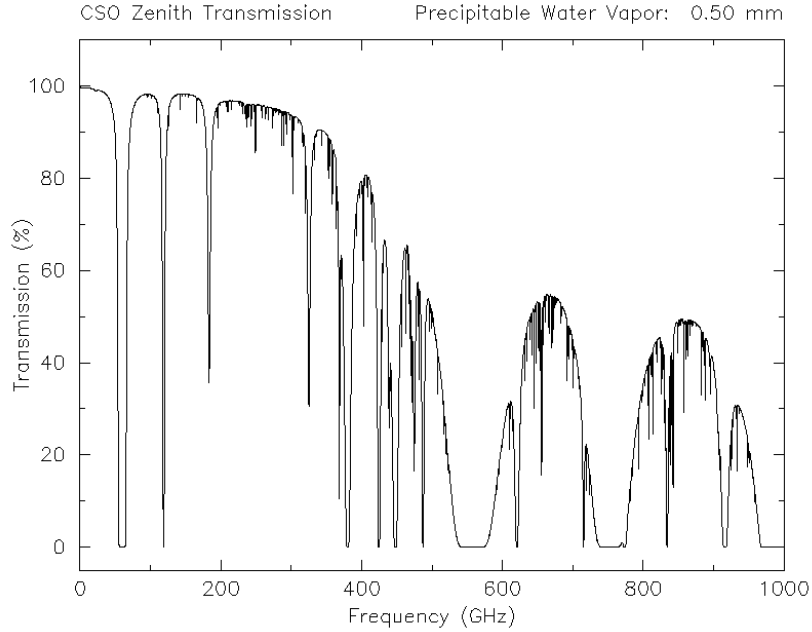


Figura 1.6: Transparencia atmosférica en el sitio del Caltech Submillimeter Observatory en Hawái, para una densidad de columna de vapor de agua de 0.5mm en la atmósfera.

el infrarrojo medio y cercano es parcialmente accesible desde sitios secos a gran altura.

Visible

El visible está definido por la respuesta del ojo humano, cuya respuesta abarca los colores del arcoíris, contenidos en el intervalo $8000 \text{ \AA} \gtrsim \lambda \gtrsim 4000 \text{ \AA}$, que corresponde también a fotones entre 1.5 y 3 eV. Observaciones fotométricas emplean tradicionalmente las bandas UBVRI, del sistema de Johnson, que corresponden aproximadamente a los colores ultravioleta (U), azul (B), visual (V) -entre el verde y el amarillo-, rojo (R) e infrarrojo cercano (I). Este sistema se ha expandido al infrarrojo para definir la bandas JHKLMNQ. La tabla 1 muestra los rangos de estas bandas y el flujo de un objeto de magnitud cero, expresado en Janskys¹.

¹1 Jy = $10^{-23} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1}$

	Visible						
Filtro	U	B	V	R	I		
λ_0 (Å)	3600	4400	5500	7000	9000		
$\Delta\lambda_0$ (Å)	68	98	89	220	240		
F_0 (Jy)	1880	4650	3950	2870	2240		
	IR cercano			IR medio			
Filtro	J	H	K	L ₂	M	N	Q
λ_0 (μm)	1.25	1.65	2.20	3.40	5.0	10.2	21.0
$\Delta\lambda_0$ (μm)	0.30	0.35	0.40	0.55	0.3	5	8
F_0 (Jy)	1770	636	629	312	183	43	10

Cuadro 1.2: Sistema de Johnson extendido al infrarrojo cercano e intermedio. Léna, “*Méthode Physiques de l’observation*”, 1996.

Ultravioleta

El ultravioleta cercano es observable desde la Tierra, en la banda U, hasta alrededor de $\lambda \gtrsim 3200\text{Å}$, donde el ozono atmosférico y otras moléculas imponen un corte al espectro accesible. Observaciones desde el espacio permiten estudiar la banda de 3000Å a $\lambda \simeq 911\text{Å}$, límite de ionización del hidrógeno, donde el medio interestelar mismo se vuelve opaco a la radiación por medio del efecto fotoeléctrico. Esto convierte al ultravioleta lejano en una banda mayormente inaccesible, en el que observaciones desde el espacio sólo son posibles en direcciones privilegiadas con baja densidad de columna de gas interestelar. Esto se extiende hasta alrededor de $\lambda \sim 120\text{Å}$, o $E \sim 100\text{eV}$, frontera con la banda de rayos X.

Rayos X

Los rayos X se describen en términos de energía con $h\nu \gtrsim 100\text{eV}$, hasta alrededor de 511keV , la masa en reposo del electrón ($E = mc^2$). Son observables exclusivamente desde el espacio, con el factor adicional de la absorción por efecto fotoeléctrico del medio interestelar en la banda de rayos X *blandos*, $0.1\text{--}1\text{keV}$. Los telescopios espaciales de rayos X, como *Chandra X-ray Observatory* y *XMM-Newton*, son instrumentos sofisticados de altísima precisión basados en el principio de enfocar haces mediante reflexión por incidencia rasante, funcional entre 0.1 y 10keV . Los rayos X *duros*, de decenas o cientos de keV , se observan normalmente sin colimación, empleando el efecto fotoeléctrico. La introducción de telescopios con máscara codificada

ha permitido mejorar considerablemente la resolución angular de telescopios como *BeppoSAX* e *INTEGRAL*. Más recientemente, NuSTAR ha extendido el principio de la óptica de incidencia rasante hasta energías $\gtrsim 10$ keV.

Rayos gamma

En principio la radiación γ comprende toda radiación electromagnética con energía mayor a 0.511 MeV, hasta valores arbitrariamente altos. Históricamente fue descubierta como uno de los tres productos de la radioactividad, junto con los rayos α , núcleos de helio de alta energía, y rayos β , positrones e^+ . Los rayos γ producidos por radioactividad corresponden a emisiones mono-energéticas por transiciones entre niveles de energía en núcleos atómicos con valores entre decenas de keV hasta algunos MeV. Fotones de mayores energías son producidos por aniquilación de partículas y antipartículas, $e^-e^+ \rightarrow \gamma\gamma$, o procesos que involucran partículas relativistas previamente aceleradas. Rayos gamma por debajo de 0.1 a 1 MeV pueden ser estudiados mediante el efecto fotoeléctrico; para energías entre 1-30 MeV se emplea el efecto Compton para su detección con telescopios como COMPTEL, instrumento a bordo del *Compton Gamma-Ray Observatory* (*CGRO*, 1991-2000), que realizó el único mapeo del cielo a la fecha en la banda 0.7-30 MeV. Rayos γ de alta energía, entre 30 MeV y unos 100 GeV, son estudiados con telescopios de producción de pares, como *CGRO-EGRET* en 1991-2000, y más recientemente con *Fermi-LAT*.

Es posible la detección de fotones con energía por encima de 100 GeV desde la Tierra a través de la detección de cascadas electromagnéticas empleando telescopios de tipo Cherenkov atmosférico, o con detectores de superficie, originalmente diseñados para la detección de rayos cósmicos mediante el mismo principio. Los telescopios Cherenkov atmosféricos, como VERITAS, HESS y MAGIC, registran la emisión debida a partículas cargadas que se mueven más rápido que la velocidad de la luz en el aire, $v > c/n$ con n el índice de refracción. La detección directa de partículas *secundarias* de estas cascadas se puede hacer con detectores Cherenkov de agua, como el High Altitude Water Cherenkov (HAWC) γ -ray observatory instalado en Sierra Negra. HAWC es capaz de detectar fotones con energías de $E \gtrsim 100$ TeV = 10^{14} eV, El observatorio de rayos cósmicos Pierre Auger ha puesto cotas para el flujo de fotones con energías $E > 2 \times 10^{18}$ eV.

1.3. Ondas electromagnéticas en un plasma

El medio interestelar no es estrictamente un vacío, siendo posible medir algunos efectos importantes de la propagación de ondas electromagnéticas por la presencia de cargas y corrientes. Consideremos un plasma formado por una densidad n_e de electrones de carga $-e$, y una densidad n_i de iones de carga $+Ze$,

$$\rho = n_e(-e) + n_i(Ze), \quad \vec{j} = n_e\vec{v}_e(-e) + n_i\vec{v}_i(Ze), \quad (1.42)$$

siendo \vec{v}_e y \vec{v}_i la velocidad típica de cada especie², que pueden diferir en el caso general, $\vec{v}_e \neq \vec{v}_i$. Planteamos $\rho = \rho_e + \rho_i = 0$, y un comportamiento oscilatorio para los campos electromagnéticos, podemos escribir las ecuaciones de Maxwell como,

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = \vec{k} \cdot \vec{B} = 0, \quad i\vec{k} \times \vec{E} = i\frac{\omega}{c}\vec{B}, \quad i\vec{k} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} - i\frac{\omega}{c}\vec{E}, \quad (1.43)$$

lo que equivale a escribir estas ecuaciones en el espacio de Fourier. Nuevamente se cumplen las relaciones de ortogonalidad: $(\vec{k} \perp \vec{E})$, $(\vec{k} \perp \vec{B})$ y $(\vec{E} \perp \vec{B})$. Una solución se obtiene con una densidad de corriente con un comportamiento oscilatorio, $\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}_0 \exp\{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)\}$, en respuesta a los campos, como se muestra en la siguiente sección.

1.3.1. Dispersión por electrones en un plasma

Dada la mayor movilidad de los electrones en relación a los iones³, consideramos sólo la contribución de los electrones a las corrientes. Resolvemos la ecuación de movimiento de un electrón no relativista sujeto a la fuerza de Lorentz,

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right), \quad (1.44)$$

para $\vec{B} = B\hat{z}$, y $\vec{E}_{\pm} = E_0 e^{-i\omega t}(\hat{x} \pm i\hat{y})/\sqrt{2}$. Nótese que \vec{E}_{\pm} se refiere a campos asociados a ondas electromagnéticas que se propagan en el plasma, mientras que \vec{B} es el campo magnético del medio interestelar. El término magnético de la onda electromagnética se desprecia para $|\vec{v}| \ll c$. Por otro lado, se considera que los campos eléctricos del medio interestelar son despreciables.

²Shu ignora el efecto de los iones. Aquí suponemos que ocasionan que la densidad total de carga sea nula, pero no tienen efecto en la densidad de corriente.

³cuando hay equipartición de energía tenemos $m_i v_i^2 \simeq m_e v_e^2$, de donde $v_i \ll v_e$.

Bajo las suposiciones anteriores, el movimiento de electrones restringidos al plano xy cumple,

$$\vec{v} = v_0 \left(\frac{\hat{x} \pm i\hat{y}}{\sqrt{2}} \right) e^{-i\omega t},$$

de donde

$$-i\omega m\vec{v} = -e\vec{E} \mp i\frac{eB}{c}\vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \frac{-ie\vec{E}}{m(\omega \pm \omega_\ell)}, \quad (1.45)$$

siendo $\omega_\ell \equiv eB/mc$ la frecuencia de Larmor. De aquí obtenemos la densidad de corriente,

$$\vec{j} = -n_e e\vec{v}_e + n_i Z_i e\vec{v}_i \simeq \frac{in_e e^2}{m(\omega \mp \omega_\ell)} \vec{E}, \quad (1.46)$$

despreciando la contribución de los iones. La proporcionalidad $\vec{j} \propto \vec{E}$ corresponde a una ley de Ohm (ec. 1.18) con conductividad imaginaria, que nos permite un planteamiento similar al empleado para el vacío,

$$i\vec{k} \times \vec{E} = -i \left(\frac{\omega}{c} \right) \varepsilon \vec{E}.$$

donde introducimos la constante dieléctrica,

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \mp \omega_\ell)}, \quad (1.47)$$

y definimos la *frecuencia de plasma*, $\omega_p \equiv \sqrt{4\pi n_e e^2/m_e} \simeq 5.6 \times 10^4 \text{ Hz } n_e^{1/2}$. La substitución en las ecuaciones 1.43 resulta en la relación de dispersión,

$$k^2 - \varepsilon (\omega/c)^2 = 0, \quad (1.48)$$

1.3.2. Propagación de ondas en un plasma

En entornos astrofísicos es común tener $\omega_p \gg \omega_\ell$, que nos permite estudiar primeramente la propagación en ausencia de campos magnéticos. Ignorando ω_ℓ podemos aproximar $\varepsilon \approx 1 - \omega_p^2/\omega^2$, con lo que la relación de dispersión puede escribirse como

$$k = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}. \quad (1.49)$$

El número de onda k es imaginario para $\omega < \omega_p$, lo que implica un comportamiento exponencial del campo, $\vec{E} \propto e^{\pm|k|z}$, que corresponde a la atenuación de la onda con una longitud característica,

$$\ell_p \sim 2\pi c/\omega_p \approx 33.6 \text{ km} \cdot n_e^{-1/2}.$$

La frecuencia ω_p define un valor mínimo por debajo del cuál ondas electromagnéticas no pueden propagarse en un plasma. En la ionósfera terrestre la densidad promedio de electrones a alturas entre 300 km y 2000 km es $\langle n_e \rangle \sim 10^4 \text{ cm}^{-3}$, con valores incluso $n_e \lesssim 10^6 \text{ cm}^{-3}$ en algunas capas definidas. La presencia de estos electrones libres se traduce en una frecuencia de corte de decenas MHz, motivo por el cual observaciones radioastronómicas desde la Tierra a frecuencias por debajo de 100 MHz son difíciles, en parte por los efectos de la ionósfera, y en parte por la interferencia de transmisiones de radio comunicaciones, radio FM y televisión. En forma análoga, la densidad media de los electrones del medio interestelar, $\langle n_e \rangle \approx 0.03 \text{ cm}^{-3}$, resulta en la atenuación de ondas electromagnéticas con $\nu \lesssim 2 \text{ kHz}$.

1.3.3. Medida de dispersión

De la relación de dispersión, $\varepsilon\omega^2 - k^2c^2 = 0$, calculamos la *velocidad de grupo* de la onda $v_g \equiv d\omega/dk = c\sqrt{\varepsilon} \leq c$, sabiendo que en el plasma interestelar $\varepsilon < 1$ (ec. 1.47). La onda se propaga más lentamente que en el vacío, con una velocidad dependiente de la frecuencia. Adicionalmente, si n_e es variable, las ondas pueden no viajar en línea recta.

Una aplicación relevante al medio interestelar se da en el estudio de pulsares, donde pulsos con distintas frecuencias ω viajan a distintas velocidades, ya que $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$, y llegan con retrasos diferenciales respecto a una propagación en el vacío. Supóngase un pulsar a una distancia d emitiendo una onda con frecuencia $\omega \gg \omega_p$. El tiempo requerido para que la onda de frecuencia ω llegue a la Tierra está dado por

$$t = \int_0^d \frac{dz}{v_g} \simeq \frac{d}{c} + \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi e^2}{m\omega^2 c} \right) \int_0^d n_e dz = \frac{d}{c} + \frac{2\pi e^2}{mc} \frac{\mathcal{D}}{\omega^2}. \quad (1.50)$$

La integral de la derecha define la *medida de dispersión*, \mathcal{D} o a veces DM, expresada comúnmente en unidades de cm^{-3}pc . El ajuste de Δt de acuerdo a la relación 1.50 nos da el valor de \mathcal{D} , la densidad de electrones integrada a lo largo de la visual. En la práctica, el desfasamiento temporal del pulso en distintas frecuencias, ilustrado en la figura 1.7, se ajusta conforme a la expresión 1.50. El valor medio de la densidad de electrones, deducido a partir de mediciones en pulsares con distancias conocidas, da $\langle n_e \rangle \approx 0.03 \text{ cm}^{-3}$. Es posible construir un modelo completo de la distribución de electrones libres en la Galaxia a partir de mediciones a pulsares (Taylor & Cordes 1993). El valor medio de la densidad de electrones es usado frecuentemente como una estimación de la distancia de pulsares, $d_{DM} = \mathcal{D}/(0.03 \text{ cm}^{-3})$. Esta

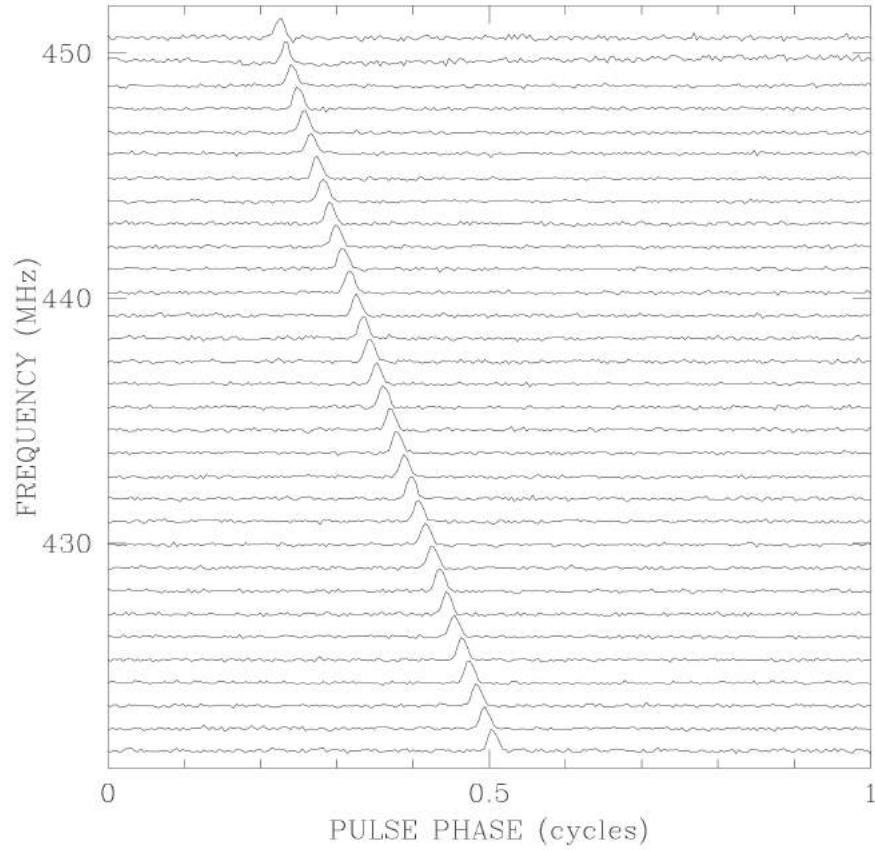


Figura 1.7: Retraso de la llegada del pulso del pulsar PSR B1749-28 medido en 32 canales, cada uno correspondiente a una frecuencia distinta de radio. Un ajuste de tipo $\Delta t \propto \nu^{-2} DM$ permite calcular la medida de dispersión y obtener una estimación de la distancia al pulsar.

estimación debe tomarse con precaución ya que puede estar afectada por sobre-densidades locales de electrones.

1.3.4. Rotación de Faraday

Si la frecuencia de la onda cumple $\omega \gg \omega_\ell$, pero el término magnético no es despreciable, podemos aproximar la relación 1.47 como

$$\varepsilon_\pm = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 \pm \frac{\omega_\ell}{\omega} \right). \quad (1.51)$$

Si además $\omega \gg \omega_p$, la relación de dispersión puede expresarse como,

$$k_\pm = k_0 \mp \Delta k, \quad (1.52)$$

donde $k_0 = \omega(1 - \omega_p^2/2\omega^2)/c$ corresponde al término de dispersión y,

$$\Delta k = \frac{\omega_p^2 \omega_\ell}{2\omega c}, \quad (1.53)$$

es la diferencia en números de onda de dos distintas polarizaciones circulares. Si uno considera una onda inicialmente polarizada a lo largo del eje \hat{x} , es decir $\vec{E} = \hat{x}E_0e^{-i\omega t}$, que recorre una distancia d a lo largo del eje \hat{z} , el eje de polarización rota un ángulo ψ dado por,

$$\psi = \frac{2\pi e^3}{m_e^2 c^2 \omega^2} RM, \quad (1.54)$$

donde RM es la *medida de rotación*, definida como

$$RM \equiv \int_0^d n_e B_{\parallel} dz. \quad (1.55)$$

La medición conjunta de dispersión y rotación de Faraday proporciona una estimación del campo magnético promediado con la densidad de electrones a lo largo de la dirección de la visual, $\langle B_{\parallel} \rangle = RM/DM$. En casos en los que no es posible medir DM , es posible estimar B_{\parallel} conociendo la distancia d al objeto y suponiendo una densidad de electrones, $\langle B_{\parallel} \rangle \approx RM/(\langle n_e \rangle d)$. Mediciones de DM han permitido a los radioastrónomos concluir que el campo magnético medio en la Galaxia es de alrededor de 3 microgauss.

(Shu 20; Ryb 8)