SOBRE EL PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA DE LA RELATIVIDAD GENERAL

Fue a partir de 1906 cuando Albert Einstein comenzó a desarrollar su Principio de Equivalencia de la masa gravitatoria y la masa inerte. Sus cálculos le mostraban cómo objetos con diferentes energías caerían con aceleración diferente, contradiciendo el Principio de Galileo ("Todos los cuerpos caen con la misma aceleración"), que es en realidad la afirmación de la igualdad de la masa gravitatoria y la inerte. Encontró Einstein sospechosa la forma en que el mismo Newton explicaba la ley de Galileo, pues se limitaba a utilizar el concepto de masa en dos sentidos, por una parte como causa y medida del campo gravitatorio en el cuerpo, y por otra como resistencia del cuerpo a la aceleración que le impone una fuerza cualquiera exterior. Newton introducía la igualdad de la masa gravitatoria y la inerte como algo que representa una coincidencia numérica accidental.

Es sabido que el Principio de Relatividad Especial vino a sustituir al Principio de Relatividad de Galileo, sin embargo era necesario construir una teoría relativista de la gravitación. El paso dado por Einstein en este sentido fue la introducción de su Principio de Equivalencia entre la Gravitación y la Inercia de los cuerpos, llegando, ya en 1913 a establecer el hecho de que un campo gravitatorio habría de identificarse con el conjunto de las 10 componentes del tensor métrico de un espacio-tiempo de Riemann.

Con el Principio de Equivalencia de Einstein se convertía a la ley de transformación de coordenadas en algo fundamental, en la piedra angular de la relatividad, y no en el resultado de un simple accidente numérico.

Lo que se conoce hoy como Principio de Equivalencia es la afirmación de que es cierto el siguiente enunciado:

> **En cada punto del espacio-tiempo en el que exista un campo gravitatorio arbitrario, función continua de puntos, es posible siempre escoger un sistema de coordenadas localmente inercial tal que, en un entorno suficientemente pequeño del punto, las leyes de la naturaleza toman la misma forma que en los sistemas inerciales de la relatividad especial en ausencia de fuerzas gravitatorias.**

Esto nos permitiría expresar que:

a) Para una partícula de masa m≠0:

Ecuaciones del movimiento en un sistema de coordenadas arbitrarias $\left\{x^m\right\}_n$:

$$\frac{d^2x^m}{ds^2} = -\Gamma^m_{sr}\frac{dx^s}{ds}.\frac{dx^r}{ds}$$

donde las expresiones Γ^m_{sr} corresponden a los símbolos de conexión métrica de Christoffel de segunda especie, y $ds = -\gamma_{jk}dx^j dx^k$ es el intervalo propio, en donde γ_{jk} es la matriz métrica de Minkowski. Así, si es g_{ab} la matriz de la métrica del espacio tiempo en el campo gravitatorio, los símbolos de segunda especie de Christoffel vienen dados por las expresiones

$$\Gamma^m_{sr} = \frac{1}{2}g^{mq}\left\{\frac{\partial g_{ms}}{\partial x^r} + \frac{\partial g_{mr}}{\partial x^s} - \frac{\partial g_{sr}}{\partial x^m}\right\}$$

El principio de equivalencia indica que existe un sistema de coordenadas localmente inerciales $\left\{\mu^p\right\}_n$, denominadas también normales o geodésicas, tal que en un punto arbitrario M_0 y en un entorno del mismo se anulan los símbolos de conexión métrica quedando las ecuaciones del movimiento reducidas a

$$\frac{d^2\mu^p}{ds^2} = 0$$

donde ds representa el intervalo propio $ds^2 = -\gamma_{jk}d\mu^j d\mu^k$, y las γ_{jk} representan las componentes de la matriz métrica de Minkowski.

Si admitimos el Principio de Equivalencia y, por consiguiente la existencia de un sistema localmente inercial, podemos obtener de inmediato las ecuaciones del movimiento en cualquier otro sistema de coordenadas arbitrarias. Pues para cualquier otro sistema de coordenadas, $\left\{x^r\right\}$, las coordenadas normales se pueden expresar en función de ellas, $\mu^p = \mu^p(x^r)$, por lo cual podemos referir las antedichas ecuaciones del movimiento de la partícula a estas otras coordenadas arbitrariamente elegidas:

$$\frac{d^2\mu^p}{ds^2} = 0 \Rightarrow \frac{d}{ds}\frac{d\mu^p}{ds} = 0 \Rightarrow \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\mu^p}{\partial x^r}\frac{\partial x^r}{\partial s}\right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\mu^p}{\partial x^r}\right).\frac{\partial x^r}{\partial s} + \frac{\partial\mu^p}{\partial x^r}.\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial x^r}{\partial s}\right) = 0$$

o bien:

$$\frac{\partial^2\mu^p}{\partial x^s\partial x^r}.\frac{\partial x^s}{\partial s}.\frac{\partial x^r}{\partial s} + \frac{\partial\mu^p}{\partial x^r}.\frac{\partial^2 x^r}{\partial s^2} = 0$$

multiplicando por $\frac{\partial x^m}{\partial\mu^p}$:

$$\frac{\partial x^m}{\partial \mu^p}.\frac{\partial^2 \mu^p}{\partial x^s \partial x^r}.\frac{\partial x^s}{\partial s}.\frac{\partial x^r}{\partial s}+\frac{\partial x^m}{\partial \mu^p}.\frac{\partial \mu^p}{\partial x^r}.\frac{\partial^2 x^r}{\partial s^2}=0$$

y siendo

$$\frac{\partial x^m}{\partial \mu^p}.\frac{\partial \mu^p}{\partial x^r}=\delta_{mr} \qquad \frac{\partial x^m}{\partial \mu^p}.\frac{\partial^2 \mu^p}{\partial x^s \partial x^r}=\Gamma^m_{sr}$$

se tiene en definitiva:

$$\frac{d^2 x^m}{ds^2}+\Gamma^m_{sr}\frac{dx^s}{ds}.\frac{dx^r}{ds}=0$$

que son las ecuaciones del movimiento de la partícula en el sistema de coordenadas arbitrario.

b) Para una partícula de masa nula (fotón):

En el caso de una partícula de este tipo el tiempo propio es cero, pues son partículas que se desplazan a velocidad de la luz:

$$ds^2 = dx^1 + dx^2 + dx^3 - c^2 dt^2 = 0$$

y expresado en la métrica del campo gravitatorio, será, en un sistema de coordenadas cualquiera:

$$d\rho^2 = g_{ab} dx^a dx^b$$

donde, siendo $dx^0 = dt$, podemos desarrollar:

$$g_{oo} dt^2 + 2g_{a0} dx^a dt + g_{ab} dx^a dx^b = 0$$

que es, con respecto a dt, una ecuación algebraica de segundo grado. Solución:

$$dt = \frac{1}{g_{00}}\left[-g_{a0}dx^a - \left[\left(g_{a0}g_{b0} - g_{00}g_{ab}\right)dx^a dx^b\right]^{\frac{1}{2}}\right]$$

El signo negativo delante de la raiz cuadrada se debe a la necesidad de que resulte un valor positivo para $g_{00} < 0$, siempre que exista algún $dx^a \neq 0$.

Un ejemplo simple:

Si consideramos el campo gravitatorio constante y uniforme en la superficie de nuestro planeta y un ascensor en caída libre por el efecto de dicho campo, podemos considerar la existencia de dos observadores del proceso: un observador O' dentro del ascensor que mide sus observaciones con respecto a un sistema de coordenadas $\{x'^m\}$ solidario al mismo, y otro observador exterior, O, en la superficie del planeta, que mide sus observaciones en un sistema de coordenadas $\{x^m\}$ solidario a la superficie de la Tierra.

Puesto que el sistema $\{x'^m\}$ se mueve con el ascensor, la relación de estas coordenadas con las del sistema $\{x^m\}$ viene dada por $x' = x - \frac{1}{2}gt^2$.

El Observador O exterior encuentra que las ecuaciones del movimiento de caída del ascensor es:

$$m.\frac{d^2x}{dt^2} = m.g + \sum_{k=1}^{N} f_{ek}$$

donde g es la aceleración del campo gravitatorio constante y uniforme y $\sum_{k=1}^{N} f_{ek}$ representa la suma de posibles fuerzas exteriores.

De no existir fuerzas exteriores diferentes de la gravitatoria, las ecuaciones del movimiento son, simplemente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g$$

El observador O', sin embargo, obtiene:

$$m.\frac{d^2x'}{dt^2} = m\left(\frac{d^2x}{dt^2} - g\right) = mg + \sum_{k=1}^{N} f_{ek} - mg = \sum_{k=1}^{N} f_{ek}$$

O sea, el observador O' obtiene:

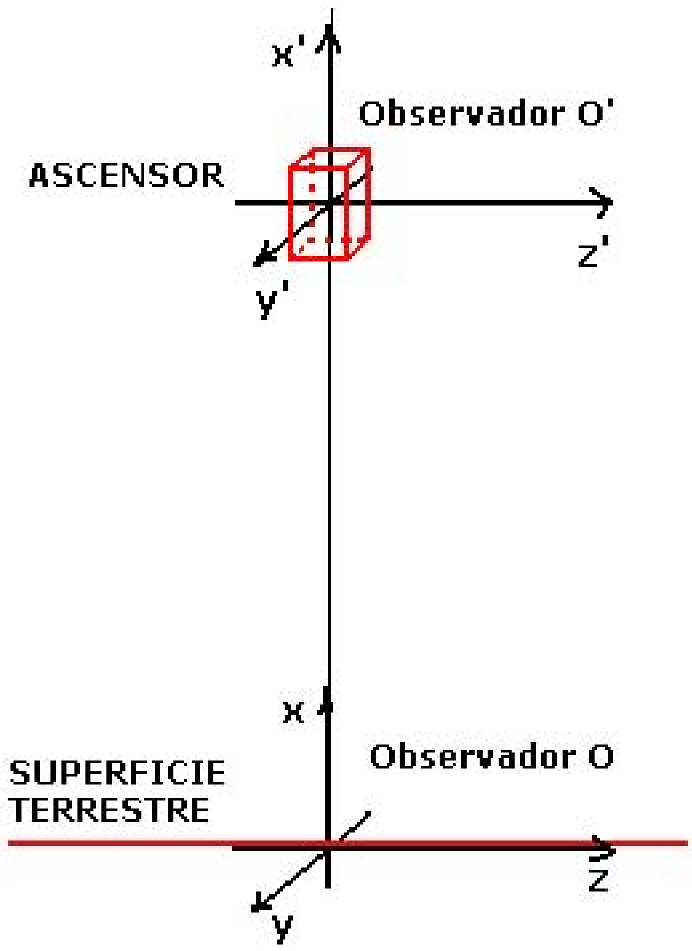
$$m.\frac{d^2x'}{dt^2} = \sum_{k=1}^{N} f_{ek}$$

y, si no hay fuerzas exteriores distintas de la gravitación, es:

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = 0$$

(este sistema $\{x'^m\}$, solidario al ascensor en caída libre, sería, por consiguiente, el sistema localmente inercial o geodésico).

En definitiva, el observador O detecta el campo gravitatorio actuante sobre el ascensor, así como las fuerzas exteriores que pudieran existir. El observador O', sin embargo, no detecta el campo gravitatorio, aunque si detecta las mismas fuerzas externas actuantes que detecta el observador O.


x'
Observador O'
ASCENSOR
z'
y'
x
Observador O
SUPERFICIE
TERRESTRE
z
y