POLARIZACIÓN DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

Vemos a continuación cómo el campo eléctrico y también el campo magnético se polarizan elípticamente, a partir de la expresión matemática de las ondas electromagnéticas y del hecho de que cada uno de estos campos se propaga en un plano (ver "Ecuaciones de las ondas electromagnéticas", en esta misma web).

0. Introducción:

Sabemos del trabajo de estudio de las Ecuaciones de las Ondas Electromagnéticas que las soluciones de las ecuaciones de onda son de la forma

$$\vec{E} = \mathrm{Re}\left[\vec{\Gamma}_e . e^{jwt}\right] = \vec{E}_r \cos\omega t - \vec{E}_i sen\omega t, \qquad \vec{H} = \mathrm{Re}\left[\vec{\Gamma}_h . e^{jwt}\right] = \vec{H}_r \cos\omega t - \vec{H}_i sen\omega t$$

Siendo j la unidad imaginaria de los números complejos, y los vectores $\vec{E}_r, \vec{E}_i$ que aparecen en la expresión del vector campo eléctrico, así como los vectores $\vec{H}_r, \vec{H}_i$ de la expresión del vector campo magnético verifican que

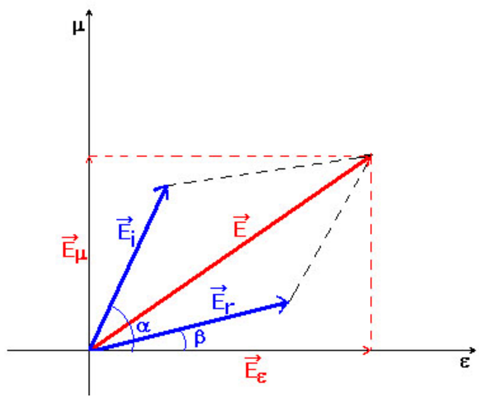
$$\vec{\Gamma}_e = \vec{E}_r + j.\vec{E}_i \qquad \vec{\Gamma}_h = \vec{H}_r + j.\vec{H}_i$$

Las ecuaciones $\vec{E} = \vec{E}_r \cos\omega t - \vec{E}_i sen\omega t,$ $\quad \vec{H} = \vec{H}_r \cos\omega t - \vec{H}_i sen\omega t$ [1]

nos indican que el vector campo eléctrico se mantiene siempre en un mismo plano y el vector campo magnético se mantiene también en un mismo plano, distinto en general del anterior.

Lo que vamos a ver ahora es que tanto el campo eléctrico como el campo magnético describen en el tiempo una elipse cada uno en su plano de propagación, es decir, que el campo electromagnético sufre una polarización elíptica.

Puesto que la expresión de ambos campos es la misma, haremos el cálculo solamente con el campo eléctrico y extenderemos el resultado al campo magnético por analogía.



En la figura hemos colocado un sistema de referencia en el plano de propagación del campo eléctrico, y hemos llamado α y β a los ángulos que sobre uno de los ejes del sistema definen ambos vectores $\vec{E}_i$ y $\vec{E}_r$, respectivamente.

1. Polarización. La elipse de polarización.

Si llamamos E_ε y E_μ a las componentes del campo eléctrico en el sistema de referencia de la figura, se tiene que podemos expresar los vectores en la forma:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \left(E_\varepsilon, E_\mu\right)\\ \vec{E}_r &= \left(E_r \cos\beta, E_r sen\beta\right)\\ \vec{E}_i &= \left(E_i \cos\alpha, E_i sen\alpha\right)\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación vectorial [1]:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_r \cos\omega t - \vec{E}_i sen\omega t = \left(E_r \cos\beta, E_r sen\beta\right).\cos\omega t - \left(E_i \cos\alpha, E_i sen\alpha\right).sen\omega t = \\ &= \left(E_r \cos\beta \cos\omega t - E_i \cos\alpha sen\omega t, E_r sen\beta \cos\omega t - E_i sen\alpha sen\omega t\right) = \left(E_\varepsilon, E_\mu\right)\end{aligned}$$

O sea, se tiene para la expresión de las componentes del campo eléctrico en dicho sistema:

$$\begin{aligned}E_\varepsilon &= E_r \cos\beta \cos\omega t - E_i \cos\alpha sen\omega t\\ E_\mu &= E_r sen\beta \cos\omega t - E_i sen\alpha sen\omega t\end{aligned} \qquad [2]$$

Veamos que tanto E_ε como E_μ pueden expresarse en la forma

$$\begin{aligned}E_\varepsilon &= E_{\varepsilon 0}.\cos\left(\varphi_\varepsilon + \omega t\right)\\ E_\mu &= E_{\mu 0}.\cos\left(\varphi_\mu + \omega t\right)\end{aligned}$$

Es decir, el vector campo eléctrico describe una elipse en el tiempo.

Bastará comprobar que las constantes introducidas, $E_{\varepsilon 0}, E_{\mu 0}, \varphi_\varepsilon, \varphi_\mu$, se obtienen inmediatamente desde las expresiones [2], esto es, en función de α, β, E_i, E_r:

$$E_\varepsilon = E_r \cos\beta \cos\omega t - E_i \cos\alpha sen\omega t = E_{\varepsilon 0}.\cos\left(\varphi_\varepsilon + \omega t\right) \qquad [3]$$
$$E_\mu = E_r sen\beta \cos\omega t - E_i sen\alpha sen\omega t = E_{\mu 0}.\cos\left(\varphi_\mu + \omega t\right) \qquad [4]$$

Si hacemos en [3]:

$$\omega t = 0 \rightarrow E_r \cos\beta = E_{\varepsilon 0}.\cos\varphi_\varepsilon \qquad [3.1]$$

$$\omega t = \frac{\pi}{2} \rightarrow -E_i \cos\alpha = E_{\varepsilon 0}.\cos\left(\varphi_\varepsilon + \frac{\pi}{2}\right) = -E_{\varepsilon 0}.sen\varphi_\varepsilon \qquad [3.2]$$

Si hacemos en [4]:

$$\omega t = 0 \rightarrow E_r sen\beta = E_{\mu 0}.\cos\varphi_\mu \qquad [4.1]$$

$$\omega t = \frac{\pi}{2} \rightarrow -E_i sen\alpha = E_{\mu 0}.\cos\left(\varphi_\mu + \frac{\pi}{2}\right) = -E_{\mu 0}.sen\varphi_\mu \qquad [4.2]$$

Si dividimos [3.2] por [3.1]: $\frac{sen\varphi_\varepsilon}{\cos\varphi_\varepsilon} = \frac{E_i \cos\alpha}{E_r \cos\beta} \rightarrow tg\varphi_\varepsilon = \frac{E_i \cos\alpha}{E_r \cos\beta}$

Si dividimos [4.2] por [4.1]: $\frac{sen\varphi_\mu}{\cos\varphi_\mu} = \frac{E_i sen\alpha}{E_r sen\beta} \rightarrow tg\varphi_\mu = \frac{E_i sen\alpha}{E_r sen\beta}$

Elevamos al cuadrado [3.2] y [3.1] y sumamos a continuación:

$$E_{\varepsilon 0}^2.\cos^2\varphi_\varepsilon + E_{\varepsilon 0}^2.sen^2\varphi_\varepsilon = E_r^2.\cos^2\beta + E_i^2.\cos^2\alpha \rightarrow$$
$$\rightarrow E_{\varepsilon 0}^2 = E_r^2.\cos^2\beta + E_i^2.\cos^2\alpha \rightarrow E_{\varepsilon 0} = +\sqrt{E_r^2.\cos^2\beta + E_i^2.\cos^2\alpha}$$

Elevamos al cuadrado [4.2] y [4.1] y sumamos a continuación:

$$E_{\mu 0}^2.\cos^2\varphi_\mu + E_{\mu 0}^2.sen^2\varphi_\mu = E_r^2.sen^2\beta + E_i^2.sen^2\alpha \rightarrow$$
$$\rightarrow E_{\varepsilon 0}^2 = E_r^2.sen^2\beta + E_i^2.sen^2\alpha \rightarrow E_{\mu 0} = +\sqrt{E_r^2.sen^2\beta + E_i^2.sen^2\alpha}$$

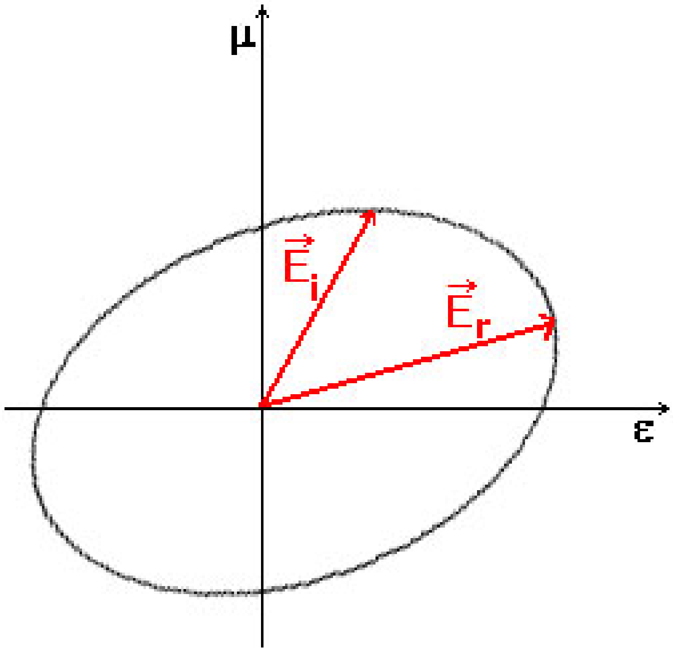
Por tanto, las componentes del vector campo eléctrico en un sistema de referencia del plano (ε, μ) de propagación puede expresarse por

$$\begin{aligned} E_\varepsilon &= E_{\varepsilon 0}.\cos(\varphi_\varepsilon + \omega t) \\ E_\mu &= E_{\mu 0}.\cos(\varphi_\mu + \omega t) \end{aligned} \qquad [5]$$

siendo

$$E_{\varepsilon 0} = +\sqrt{E_r^2.\cos^2\beta + E_i^2.\cos^2\alpha} \qquad E_{\mu 0} = +\sqrt{E_r^2.sen^2\beta + E_i^2.sen^2\alpha}$$
$$\varphi_\varepsilon = arctg\left(\frac{E_i \cos\alpha}{E_r \cos\beta}\right) \qquad \varphi_\mu = arctg\left(\frac{E_i sen\alpha}{E_r sen\beta}\right) \qquad [6]$$

Las ecuaciones [5] indican que el vector campo eléctrico $\vec{E}$ describe en el tiempo una elipse plana que llamamos elipse de polarización del campo.



2. El caso de linealidad:

Veamos que si se verifica que $\varphi_\varepsilon = \varphi_\mu$ entonces la elipse de polarización se reduce a una línea recta, por tener en este caso los vectores $\vec{E}_i$ y $\vec{E}_r$ la misma dirección:

$$\varphi_\varepsilon = \varphi_\mu \to tg\varphi_\varepsilon = tg\varphi_\mu \to \frac{E_i \cos\alpha}{E_r \cos\beta} = \frac{E_i sen\alpha}{E_r sen\beta} \to \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{sen\alpha}{sen\beta} \to \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \frac{sen\beta}{\cos\beta} \to$$
$$\to tg\alpha = tg\beta \to \begin{cases} \alpha = \beta \\ \alpha = \beta \pm \pi \end{cases}$$

Si $\alpha = \beta \to \vec{E}_i$ y $\vec{E}_r$ tienen la misma dirección y sentido.

Si $\alpha = \beta \pm \pi \to \vec{E}_i$ y $\vec{E}_r$ tienen la misma dirección y contrario sentido.

Por tanto, el caso $\varphi_\varepsilon = \varphi_\mu$ corresponde a una polarización lineal del campo eléctrico.

3. El caso de polarización circular:

Este caso corresponde a la situación en que es $\begin{cases} E_{\varepsilon 0} = E_{\mu 0} \\ \varphi_\varepsilon = \varphi_\mu \pm \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$. Veamos como sería la polarización en estas condiciones.

- De ser $E_{\varepsilon 0} = E_{\mu 0}$ y teniendo en cuenta [6] se verifica que

$$E_r^2.\cos^2\beta + E_i^2.\cos^2\alpha = E_r^2.sen^2\beta + E_i^2.sen^2\alpha \to E_r^2(\cos^2\beta - sen^2\beta) = -E_i^2(\cos^2\alpha - sen^2\alpha)$$

O sea: $E_r^2.\cos 2\beta = -E_i^2.\cos 2\alpha$

- De ser $\varphi_\varepsilon = \varphi_\mu \pm \dfrac{\pi}{2} \to tg\varphi_\varepsilon = tg\left(\varphi_\mu \pm \dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{1}{tg\varphi_\mu}$, teniendo en cuenta [6]:

$$\frac{E_i \cos\alpha}{E_r \cos\beta} = -\frac{E_r sen\beta}{E_i sen\alpha} \to E_r^2 sen\beta.\cos\beta = -E_i^2 sen\alpha.\cos\alpha \to E_r^2 sen2\beta = -E_i^2 sen2\alpha$$

O sea: $E_r^2.sen2\beta = -E_i^2.sen2\alpha$

En definitiva, en este caso se verifican las relaciones

$$\begin{cases} E_r^2.sen2\beta = -E_i^2.sen2\alpha \\ E_r^2.\cos 2\beta = -E_i^2.\cos 2\alpha \end{cases} \qquad [7]$$

de donde se deduce que $tg2\beta = tg2\alpha \to 2\alpha = 2\beta \;\; o\ bien\ 2\alpha = 2\beta \pm \pi$

Si es $2\alpha = 2\beta \to \alpha = \beta$, que corresponde al caso de linealidad, visto antes.

Si es $2\alpha = 2\beta \pm \pi$ será entonces $sen2\alpha = -sen2\beta$, por tanto, de [7] es $E_r = E_i$, es decir, la elipse de polarización es ahora una circunferencia.

4. Los ejes principales de la elipse de polarización:

Los ejes principales de la elipse de polarización la cortan en aquellos puntos en los que el vector de posición, vector campo eléctrico, $\vec{E}$, es perpendicular a la tangente, esto es, es perpendicular al vector $\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$:

$$\vec{E}.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

Podemos encontrar los instantes t_p en los que el vector campo eléctrico pasa por los puntos de corte de la elipse con los ejes principales.

Se tiene que

$$\vec{E} = \vec{E}_r.\cos\omega t - \vec{E}_i.sen\,\omega t \to \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\omega \vec{E}_r sen\,\omega t - \omega \vec{E}_i \cos\omega t$$

Por tanto:

$$\vec{E}.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \left(\vec{E}_r.\cos\omega t - \vec{E}_i.sen\omega t\right).\left(-\omega \vec{E}_r sen\omega t - \omega \vec{E}_i \cos\omega t\right) = \vec{E}_r^2 \cos\omega t.sen\omega t +$$
$$+ \vec{E}_i.\vec{E}_r \cos^2\omega t - \vec{E}_i.\vec{E}_r sen^2\omega t - \vec{E}_i^2 sen\omega t.\cos\omega t = 0$$

O sea:

$$\frac{1}{2}\left(\vec{E}_r^2 - \vec{E}_i^2\right).sen\left(2\omega t_p\right) + \vec{E}_i.\vec{E}_r.\cos\left(2\omega t_p\right) = 0$$

de lo cual

$$tg\left(2\omega t_p\right) = \frac{sen\left(2\omega t_p\right)}{\cos\left(2\omega t_p\right)} = \frac{\vec{E}_i.\vec{E}_r}{\frac{1}{2}\left(\vec{E}_i^2 - \vec{E}_r^2\right)} = \frac{2\vec{E}_i.\vec{E}_r}{\left(\vec{E}_i^2 - \vec{E}_r^2\right)}$$

En definitiva:

$$t_p = \frac{1}{2\omega}.arctg\left(\frac{2\vec{E}_i.\vec{E}_r}{\left(\vec{E}_i^2 - \vec{E}_r^2\right)}\right)$$

5. Documentación:

Básicos:
ADLER, Richard - CHU, Lan Jen, y FANO, Robert M.
Electromagnetic Energy Transmission and Radiation.
Edit John Wiley and Sons, Inc. 1968, New York.
PANOFSKY, Wolfgang y PHILIPS, Melba
Classical Electricity and Magnetism.
Edit Adisson-Wesley, 2ª Edición, 1962, Cambridge. Massachusetts
LANGMUIR, Robert V.
Electromagnetic Fields and Waves.
Edit Mc Graw Hill, 1961. New york

Ampliación:
FELSEN, L.B. y MARCUVITZ, N.
Radiation and scattering of Waves.
Edit IEE. 1994. Cambridge. N. Jersey
COLLIN, R.E.
Field Theory of Guided Waves
Edit IEE, 1991, Cambridge. New Jersey
BALANIS, C.A.
Advanced Engineering Mathematics
Edit John Wiley, 1989. New York
VAN BLADEL, J.
Singular Electromagnetic Fields and Sources
Edit Oxford University Press, 1991. Oxford, U.K.