

El Modelo Quark (IV)

Modelo SU(3) de sabor

Rubén Sánchez-Ramírez

1. Representaciones irreducibles de SU(3)

1.1. Generadores

Los generadores de SU(3), T_a , se definen a partir de las matrices de Gell-Mann

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

con

$$T_a = \frac{\lambda_a}{2} \quad (4.2)$$

Observemos que T_1 , T_2 y T_3 generan SU(2) dentro de SU(3).

El álgebra se genera a partir de las relaciones de conmutación

$$[T_i, T_j] = if_{ijk} T_k \quad (4.3)$$

donde las f_{ijk} son las constantes de estructura, cuyos valores no nulos son

ijk	123	147	156	246	257	345	367	458	678
f_{ijk}	1	1/2	-1/2	1/2	1/2	1/2	-1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$

1.2. Generadores de Cartan

Resulta inmediato comprobar que T_3 y T_8 son diagonales, y por tanto son los generadores buscados. No obstante también podemos obtener a partir de (3.96) que

$$H_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad H_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

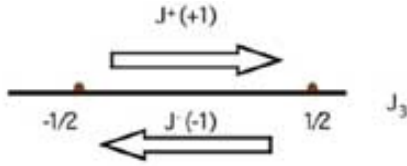


Figura 4.1: Esquema de la acción de los operadores J^+ y J^- en $SU(2)$.

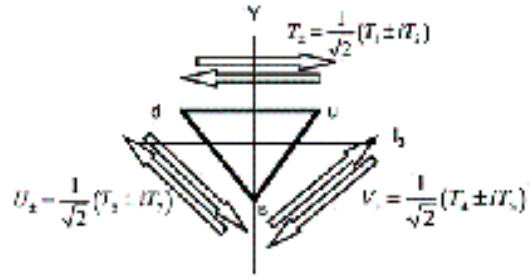


Figura 4.2: Esquema de la acción de los operadores escalera en $SU(3)$. Cada pareja de operadores genera un subespacio $SU(2)$ análogo al representado en la figura 4.1.

1.3. Operadores Escalera

Podemos definirlos a partir de las matrices de Gell-Mann de la siguiente manera

$$T^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (T_1 \pm iT_2) \quad (4.5)$$

$$V^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (T_4 \pm iT_5) \quad (4.6)$$

$$U^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (T_6 \pm iT_7) \quad (4.7)$$

mostrando con un poco de álgebra que esta definición es consistente con la definición 3.34. Sus relaciones de conmutación con H_1 y H_2 son

$$[H_1, T^\pm] = \pm T^\pm \quad [H_2, T^\pm] = 0 \quad (4.8)$$

$$[H_1, U^\pm] = \pm \frac{1}{2} U^\pm \quad [H_2, U^\pm] = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} U^\pm \quad (4.9)$$

$$[H_1, V^\pm] = \pm \frac{1}{2} V^\pm \quad [H_2, V^\pm] = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} V^\pm \quad (4.10)$$

a partir de las cuales es inmediato encontrar su acción, representada en la figura 4.2.

1.4. Raíces simples

A partir de (3.99) y recordando que el índice corre ordenadamente a partir del peso máximo, es inmediato llegar a

$$\vec{\alpha}^1 = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle \quad \vec{\alpha}^2 = \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle \quad (4.11)$$

1.5. Matriz de Cartan

Desarrollando (3.84) se obtiene

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

1.6. Pesos fundamentales

Aplicando (3.86), se plantean las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{2\bar{\alpha}^1 \cdot \bar{\mu}^1}{(\alpha^1)^2} = 1 \quad \frac{2\bar{\alpha}^1 \cdot \bar{\mu}^2}{(\alpha^1)^2} = 0 \\ \frac{2\bar{\alpha}^2 \cdot \bar{\mu}^1}{(\alpha^1)^2} = 0 \quad \frac{2\bar{\alpha}^2 \cdot \bar{\mu}^2}{(\alpha^1)^2} = 1 \end{aligned} \quad (4.13)$$

cuya resolución nos dan los pesos fundamentales

$$\bar{\mu}^1 = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right\rangle \quad (4.14)$$

$$\bar{\mu}^2 = \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}} \right\rangle \quad (4.15)$$

A partir de ellos es posible generar todas las representaciones de SU(3) mediante las reflexiones de Weyl. El desarrollo de (3.90) para las dos raíces simples y teniendo presente (3.100) y que

$$\bar{v} = q_1 \bar{\mu}^1 + q_2 \bar{\mu}^2 = q_1 \left(\frac{2}{3} \bar{\alpha}^1 + \frac{1}{3} \bar{\alpha}^2 \right) + q_2 \left(\frac{1}{3} \bar{\alpha}^1 + \frac{2}{3} \bar{\alpha}^2 \right) = \bar{\mu} - i \bar{\alpha}^1 - j \bar{\alpha}^2 \quad (4.16)$$

nos da

$$\bar{\mu} - i \bar{\alpha}^1 - j \bar{\alpha}^2 - \frac{2 \left\{ \bar{\alpha}^1 \cdot \left[q_1 \left(\frac{2}{3} \bar{\alpha}^1 + \frac{1}{3} \bar{\alpha}^2 \right) + q_2 \left(\frac{1}{3} \bar{\alpha}^1 + \frac{2}{3} \bar{\alpha}^2 \right) - i \bar{\alpha}^1 - j \bar{\alpha}^2 \right] \right\} \cdot \bar{\alpha}^1}{(\bar{\alpha}^1)^2} \Rightarrow$$

$$\bar{\mu} + (i - j - q^1) \bar{\alpha}^1 - j \bar{\alpha}^2 \quad (4.17)$$

y

$$\bar{\mu} - i \bar{\alpha}^1 - j \bar{\alpha}^2 - \frac{2 \left\{ \bar{\alpha}^2 \cdot \left[q_1 \left(\frac{2}{3} \bar{\alpha}^1 + \frac{1}{3} \bar{\alpha}^2 \right) + q_2 \left(\frac{1}{3} \bar{\alpha}^1 + \frac{2}{3} \bar{\alpha}^2 \right) - i \bar{\alpha}^1 - j \bar{\alpha}^2 \right] \right\} \cdot \bar{\alpha}^2}{(\bar{\alpha}^2)^2} \Rightarrow$$

$$\bar{\mu} - i \bar{\alpha}^1 + (j - i - q^2) \bar{\alpha}^2 \quad (4.18)$$

donde, para calcular las primeras reflexiones se hace correr $i = 1, \dots, q_1$ y $j = 1, \dots, q_2$ y luego se reflejan los pesos obtenidos hasta completar el set de d componentes.

Teorema 4.1. En $SU(3)$ se verifica en general que la representación conjugada (q_2, q_1) es equivalente a (q_1, q_2)

1.7. Dimensión de la representación (q_1, q_2)

$$d = (q_1 + 1)(q_2 + 1) \left(\frac{q_1 + q_2 + 1}{2} \right) \tag{4.19}$$

2. $SU(3)$ y los quarks u, d y s

2.1. Representación $(1,0) = 3$

Se obtiene planteando, a partir de (3.86)

$$\frac{2\vec{\alpha}^1 \cdot \vec{\mu}^1}{(\alpha^1)^2} = q^1 = 1 \quad \frac{2\vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\mu}^1}{(\alpha^2)^2} = q^2 = 0 \tag{4.20}$$

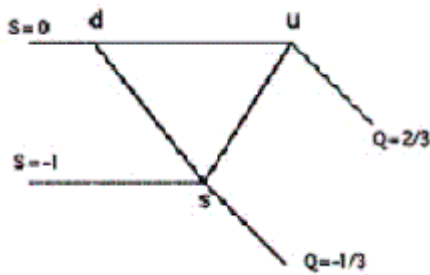


Figura 4.3: Los tres quarks de Gell-Mann forman un triángulo invertido cuando ordenamos en términos de su carga y extrañeza.

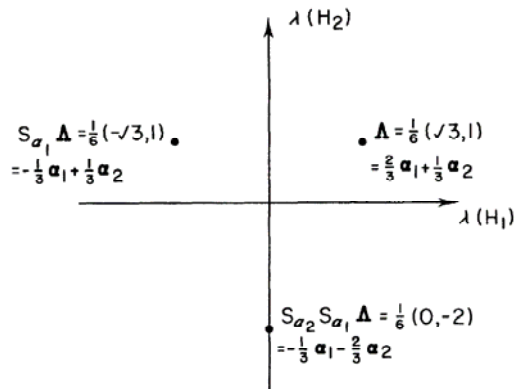


Figura 4.4: Pesos de la representación $(1;0)$ correspondiente a los tres quarks u, d y s .

cuyo peso máximo viene dado por $\vec{\mu} = \vec{\mu}^1$.

Recordando que

$$E_{\alpha} | \vec{\mu} + p\vec{\alpha} \rangle = 0 \quad E_{-\alpha} | \vec{\mu} - p\vec{\alpha} \rangle = 0 \tag{4.21}$$

completamos el conjunto básico de pesos, ya que es inmediato ver que $(\vec{\mu} - \vec{\alpha})$ es también peso. Los restantes se obtienen a partir de las reflexiones de Weyl (3.90), obteniendo, en resumen, los pesos

$$\bar{\mu} \quad (4.22)$$

$$\bar{\mu}^1 - \bar{\alpha}^1 \quad (4.23)$$

$$\bar{\mu}^1 - \bar{\alpha}^1 - \bar{\alpha}^2 \quad (4.24)$$

Por tanto, podemos asociar a cada peso un quark. Con

$$H_1 = I_z \quad (4.25)$$

$$H_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} Y \quad (4.26)$$

$$Y = B+S \quad (4.27)$$

$$Q = H_1 + \frac{Y}{2} \quad (4.28)$$

reproducimos la figura 4.3 e identificamos los estados con las partículas de la manera mostrada en el cuadro 4.1.

2.2. Representación $(1,0) = \bar{3}$

Se obtiene esta vez planteando, a partir de (3.86)

$$\frac{2\bar{\alpha}^1 \cdot \bar{\mu}^2}{(\alpha^1)^2} = q^1 = 0 \quad \frac{2\bar{\alpha}^2 \cdot \bar{\mu}^2}{(\alpha^2)^2} = q^1 = 1 \quad (4.29)$$

correspondiente al peso fundamental $\bar{\mu}^2$.

$$\begin{aligned} |u\rangle &= \bar{\mu}^1 = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right\rangle \\ |s\rangle &= \bar{\mu}^1 - \bar{\alpha}^1 = \left| 0, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle \\ |d\rangle &= \bar{\mu}^1 - \bar{\alpha}^1 - \bar{\alpha}^2 = \left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right\rangle \end{aligned}$$

Cuadro 4.1. Identificación de los quarks de Gell-Mann con la representación $(1,0) = \bar{3}$

$$\begin{aligned} |\bar{u}\rangle &= \bar{\mu}^2 = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}} \right\rangle \\ |\bar{s}\rangle &= \bar{\mu}^2 - \bar{\alpha}^2 = \left| 0, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle \\ |\bar{d}\rangle &= \bar{\mu}^2 - \bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha}^1 = \left| -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}} \right\rangle \end{aligned}$$

Cuadro 4.2. Identificación de los antiquarks de Gell-Mann con la representación $(0,1) = \bar{3}$

De manera análoga completamos el conjunto básico de pesos y realizamos las reflexiones de Weyl obteniendo

$$\bar{\mu}^2 \tag{4.30}$$

$$\bar{\mu}^2 - \bar{\alpha}^2 \tag{4.31}$$

$$\bar{\mu}^2 - \bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha}^1 \tag{4.32}$$

Por tanto, podemos asociar a cada peso un antiquark, reproduciendo análogamente la figura 4.5 e identificando los estados tal y como se muestra en el cuadro 4.2.

3. Mesones

Definición 4.1. Los mesones son aquellos hadrones constituidos por un quark y un antiquark. Dado que ambas partículas son distinguibles la definición es sensible al orden de las partículas y no están sujetas al principio de exclusión de Pauli.

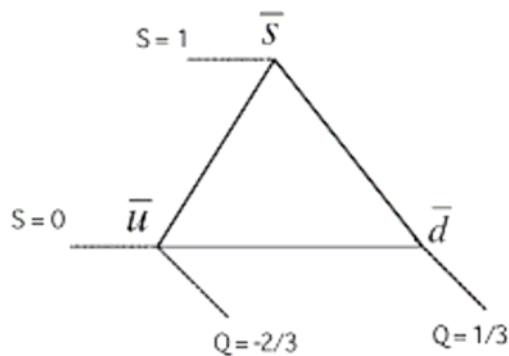


Figura 4.5: Los tres antiquarks de Gell-Mann forman un triángulo cuando ordenamos en términos de su carga y extrañeza.

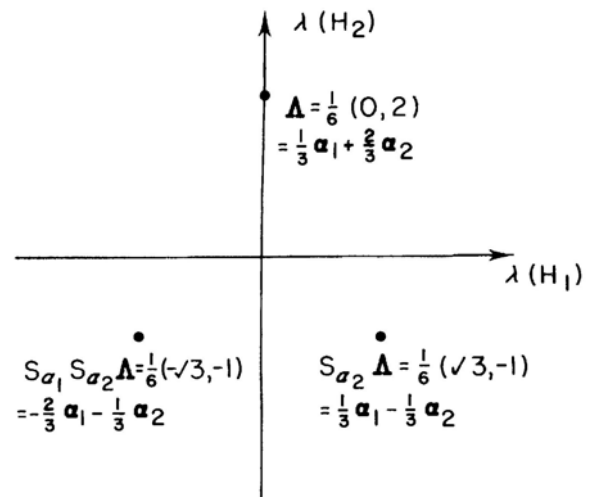


Figura 4.6: Pesos de la representación (0,1) correspondiente a los tres quarks \bar{u} , \bar{d} y \bar{s} .

3.1. Representaciones irreducibles en SU(3) para un quark y un antiquark

Hemos llegado a que la representación de los quarks es $(1,0) = \bar{3}$ y para los antiquarks $(0,1) = \bar{3}$. La composición de ambas partículas da como resultado.

$$\square \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \tag{4.33}$$

con

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad (4.34)$$

y

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 3 & \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 3 & \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 3 & \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline \square & 3 \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline \square & 3 \end{array} \quad (4.35)$$

Por tanto la composición se reduce a la suma directa de un octete y un singlete

$$3 \otimes 3 = 8 \oplus 1 \quad (4.36)$$

3.2. Representación $(1,1) = 8$

Se obtiene planteando, a partir de (3.86)

$$\frac{2\bar{\alpha}^1 \cdot \bar{\mu}^1}{(\alpha^1)^2} = q^1 = 1 \quad \frac{2\bar{\alpha}^2 \cdot \bar{\mu}^1}{(\alpha^2)^2} = q^2 = 1 \quad (4.37)$$

$$\frac{2\bar{\alpha}^1 \cdot \bar{\mu}^2}{(\alpha^1)^2} = q^1 = 1 \quad \frac{2\bar{\alpha}^2 \cdot \bar{\mu}^2}{(\alpha^2)^2} = q^2 = 1 \quad (4.38)$$

correspondiente al peso máximo $\bar{\mu} = \bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2$

El conjunto básico de pesos viene dado por

$$\bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 \quad (4.39)$$

$$\bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 - \bar{\alpha}^1 \quad (4.40)$$

$$\bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 - \bar{\alpha}^2 \quad (4.41)$$

$$\bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 - \bar{\alpha}^1 - \bar{\alpha}^2 \quad (4.42)$$

$$\bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 - \bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha}^1 \quad (4.43)$$

donde notamos que el último y penúltimo peso forman un estado degenerado, provocado por el hecho de que existen dos vías para llegar a él. Las reflexiones de Weyl se obtienen reflejando en primera instancia usando directamente (4.17) y (4.18)

$$\bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 - 2\bar{\alpha}^1 - \bar{\alpha}^2 \quad (4.44)$$

$$\bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 - \bar{\alpha}^2 - 2\bar{\alpha}^1 \quad (4.45)$$

y en segunda reflejando nuevamente cualquiera de los dos nuevos pesos

$$\bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 - 2\bar{\alpha}^2 - 2\bar{\alpha}^1 \quad (4.46)$$

Por tanto, reproducimos la figura 1.7 (considerando también el singlete) e identificamos a cada peso del octeto con el mesón indicado en el cuadro 4.3.2. Puede comprobarse como se reproducen los números cuánticos de cada partícula usando las relaciones 4.28 y sumando los números cuánticos correspondiente a cada quark.

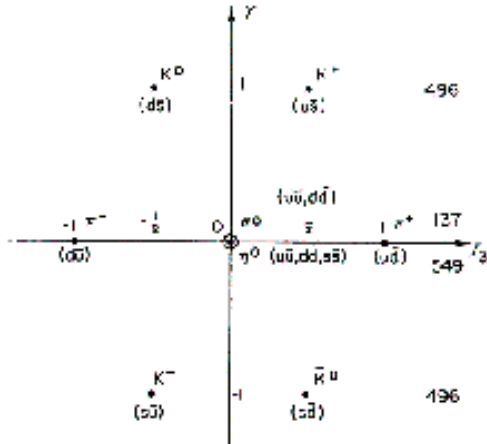


Figura 4.7: Correspondencia entre los mesones pseudoescalares ($J=0$) y el octete ($(1,1) = 8$).

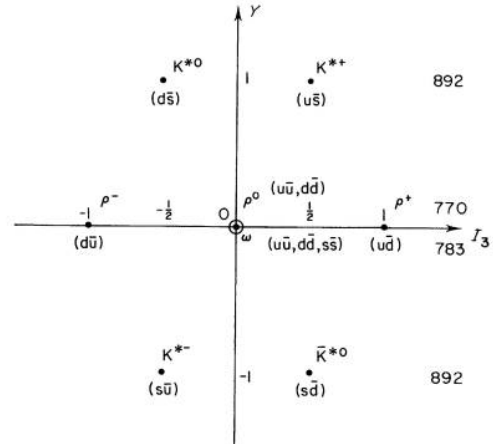


Figura 4.8: Correspondencia entre los mesones vectoriales ($J=1$) y el octete ($(1,1) = 8$).

3.3. Representación $(0,0) = 1$

El singlete es

$$\eta' = |0,0\rangle = \left| \frac{1}{3}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) \right\rangle \quad (4.47)$$

4. Bariones

Definición 4.2. Los bariones son aquellos hadrones constituidos por tres quarks. Dado que las partículas son indistinguibles la definición no es sensible al orden de las partículas y están sujetas al principio de exclusión de Pauli.

4.1. Representaciones irreducibles en $SU(3)$ para tres partículas

Operando sobre el producto directo de los estados de tres partículas se obtiene

$$\square \otimes \square \otimes \square = \square \otimes (\square \otimes \square) \tag{4.48}$$

$$= \square \otimes \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right) \tag{4.49}$$

$$= \square \otimes \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \square \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \tag{4.50}$$

Consideremos primero el término

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \tag{4.51}$$

con

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \tag{4.52}$$

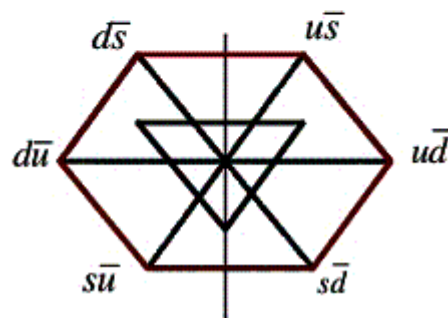
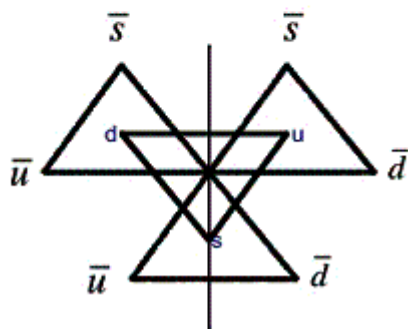
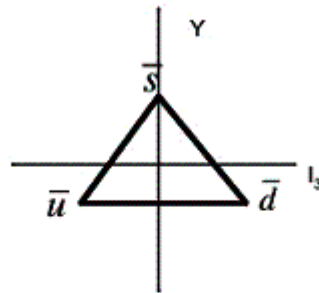
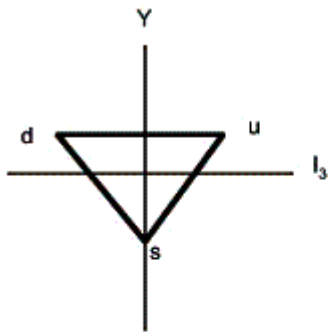


Figura 4.9: Construcción gráfica de los mesones a partir de las representaciones de los quarks y antiquarks.

$$\begin{aligned} \pi^+ &= \bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 = |1,0\rangle = |u\bar{d}\rangle \\ \bar{K}^0 &= \bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 - \bar{\alpha}^1 = \left| \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle = |s\bar{d}\rangle \\ K^+ &= \bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 - \bar{\alpha}^2 = \left| \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle = |u\bar{s}\rangle \\ K^0 &= \bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 - 2\bar{\alpha}^1 - \bar{\alpha}^2 = \left| -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle = |d\bar{s}\rangle \\ K^- &= \bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 - \bar{\alpha}^1 - 2\bar{\alpha}^2 = \left| -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle = |s\bar{u}\rangle \\ \pi^- &= \bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 - 2\bar{\alpha}^1 - 2\bar{\alpha}^2 = |-1,0\rangle = |d\bar{u}\rangle \\ \pi^0 &= \bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 - \bar{\alpha}^1 - \bar{\alpha}^2 = |0,0\rangle = \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \right\rangle \\ \eta &= \bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 - \bar{\alpha}^1 - \bar{\alpha}^2 = |0,0\rangle = \left| \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) \right\rangle \end{aligned}$$



Cuadro 4.3: Identificación de los mesones pseudoescalares con la representación (1,1)=8. Los mesones vectoriales tienen los mismos números cuánticos y composición, luego pueden entenderse como estados excitados de los pseudoescalares.

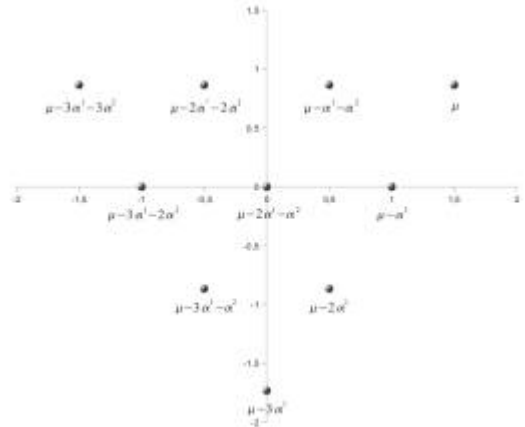


Figura 4.10: Representación gráfica de los pesos para (3,0) = 10.

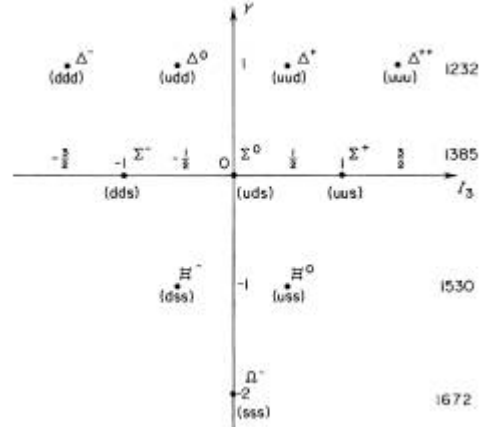


Figura 4.11: Correspondencia entre el decuplete de bariones y (3,0) = 10.

y

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 3 & \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 3 & \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 3 & \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 3 & \end{array} \quad (4.53)$$

Ahora el restante

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (4.54)$$

Con

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 3 \\ \hline 3 & 3 & 3 \\ \hline \end{array} \quad (4.55)$$

Por tanto la descomposición viene dada por

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 3 \otimes (3 \otimes 3) = 3 \otimes (\bar{3} \oplus 6) = (3 \otimes \bar{3}) \oplus (3 \otimes 6) = 8 \oplus 1 \oplus 10 \oplus 8 \quad (4.56)$$

4.2. Representación $(3,0) = 10$

Se obtiene planteando, a partir de (3.86)

$$\frac{2\bar{\alpha}^1 \cdot \bar{\mu}^1}{(\bar{\alpha}^1)^2} = q^1 = 3 \quad \frac{2\bar{\alpha}^2 \cdot \bar{\mu}^1}{(\bar{\alpha}^2)^2} = q^2 = 0 \quad (4.57)$$

correspondiente al peso máximo $\bar{\mu} = 3\bar{\mu}^1$.

En esta ocasión vamos a calcular cada uno de los pesos de la representación haciendo uso de la matriz de Cartan y las relaciones (3.75) y (3.85)

$$\bar{\mu} = 3\bar{\mu}^1 = 2\bar{\alpha}^1 + \bar{\alpha}^2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2, x_2 = 1 \quad (4.58)$$

por tanto

$$q = p + \sum_{j=1}^m x_j A_{ji} \quad (4.59)$$

y

$$q(\bar{\alpha}_1) = 0 + [2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1)] = 3 \quad (4.60)$$

$$q(\bar{\alpha}_2) = 0 + [2 \cdot (-1) + 1 \cdot (2)] = 0 \quad (4.61)$$

De (4.60) y recordando (4.21) obtenemos los pesos

$$3\bar{\mu}^1 - \bar{\alpha}^1 \quad (4.62)$$

$$3\bar{\mu}^1 - 2\bar{\alpha}^1 \quad (4.63)$$

$$3\bar{\mu}^1 - 3\bar{\alpha}^1 \quad (4.64)$$

Realizando el mismo procedimiento sobre (4.62), esta vez con $x_1 = 1, x_2 = 1$

$$q(\bar{\alpha}_1) = 1 + [1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1)] = 2 \quad (4.65)$$

$$q(\bar{\alpha}_2) = 0 + [1 \cdot (-1) + 1 \cdot (2)] = 1 \quad (4.66)$$

De (4.66) surge el peso

$$3\bar{\mu}^1 - \bar{\alpha}^1 - \bar{\alpha}^2 \quad (4.67)$$

Otra vez sobre (4.63), con $x_1 = 0, x_2 = 1$

$$q(\bar{\alpha}_1) = 2 + [0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1)] = 1 \quad (4.68)$$

$$q(\bar{\alpha}_2) = 0 + [0 \cdot (-1) + 1 \cdot (2)] = 2 \quad (4.69)$$

De (4.66) aparecen

$$3\bar{\mu}^1 - 2\bar{\alpha}^1 - \bar{\alpha}^2 \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned}
\Delta^{++} &= 3\bar{\mu}^1 = \left| \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle = |uuu\rangle \\
\Delta^+ &= 3\bar{\mu}^1 - \bar{\alpha}^1 - \bar{\alpha}^2 = \left| \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|uus\rangle + |udu\rangle + |duu\rangle) \\
\Delta^0 &= 3\bar{\mu}^1 - 2\bar{\alpha}^1 - 2\bar{\alpha}^2 = \left| -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|duu\rangle + |udu\rangle + |udd\rangle) \\
\Delta^- &= 3\bar{\mu}^1 - 3\bar{\alpha}^1 - 3\bar{\alpha}^2 = \left| -\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle = |ddd\rangle \\
\Sigma^{++} &= 3\bar{\mu}^1 - \bar{\alpha}^1 = |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|uus\rangle + |usu\rangle + |suu\rangle) \\
\Sigma^+ &= 3\bar{\mu}^1 - 2\bar{\alpha}^1 - \bar{\alpha}^2 = |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|uds\rangle + |dus\rangle + |usd\rangle) \\
\Sigma^0 &= 3\bar{\mu}^1 - 3\bar{\alpha}^1 - 2\bar{\alpha}^2 = |-1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|dds\rangle + |dsd\rangle + |sdd\rangle) \\
\Sigma^- &= 3\bar{\mu}^1 - 2\bar{\alpha}^1 = \left| \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|ssu\rangle + |sus\rangle + |uss\rangle) \\
\Xi^0 &= 3\bar{\mu}^1 - 3\bar{\alpha}^1 - \bar{\alpha}^2 = \left| -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|ssd\rangle + |sds\rangle + |dss\rangle) \\
\Xi^- &= 3\bar{\mu}^1 - 3\bar{\alpha}^1 = |0, -\sqrt{3}\rangle = |sss\rangle
\end{aligned}$$

Cuadro 4.4: Identificación de los estados del decuplete de bariones.

$$3\bar{\mu}^1 - 2\bar{\alpha}^1 - 2\bar{\alpha}^2 \quad (4.71)$$

Por último, usando (4.64), ahora con $x_1 = 1$, $x_2 = 1$

$$q(\bar{\alpha}_1) = 3 + [(-1).2 + 1.(-1)] = 0 \quad (4.72)$$

$$q(\bar{\alpha}_2) = 0 + [(-1).(-1) + 1.(2)] = 3 \quad (4.73)$$

De (4.66) brotan los últimos pesos

$$3\bar{\mu}^1 - 3\bar{\alpha}^1 - \bar{\alpha}^2 \quad (4.74)$$

$$3\bar{\mu}^1 - 3\bar{\alpha}^1 - 2\bar{\alpha}^1 \quad (4.75)$$

$$3\bar{\mu}^1 - 3\bar{\alpha}^1 - 3\bar{\alpha}^1 \quad (4.76)$$

Por tanto, reproducimos la figura 1.6 e identificamos a cada peso del decuplete el barión correspondiente tabulado en el cuadro 4.4.

4.3. Representación $(1,1) = 8$

De manera análoga a la realizada con los mesones llegamos a las identificaciones representadas en la figura y tabuladas en el cuadro 4.5. Se considera que 8_8 representa el mismo octete de partículas.

4.4. Representación $(0,0) = 1$

El singlete es

$$\Lambda^* = |0,0\rangle = uds \quad (4.77)$$

$$\Sigma^+ = \bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 = |1, 0\rangle = uus$$

$$\Xi^0 = \bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 - \bar{\alpha}^1 = \left| \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle = uss$$

$$p^+ = \bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 - \bar{\alpha}^2 = \left| \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle = uud$$

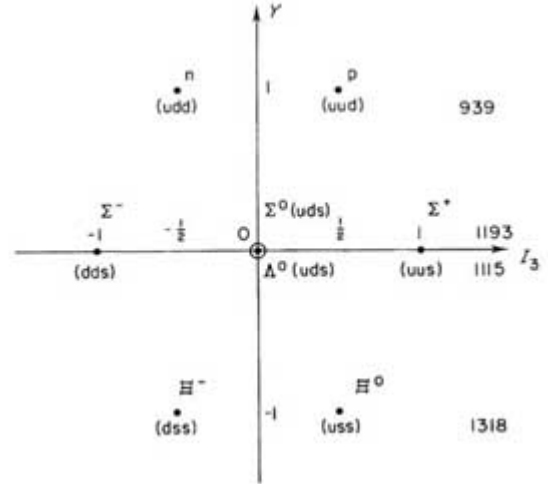
$$n^0 = \bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 - 2\bar{\alpha}^1 - \bar{\alpha}^2 = \left| -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle = udd$$

$$\Xi^- = \bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 - \bar{\alpha}^1 - 2\bar{\alpha}^2 = \left| -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle = dss$$

$$\Sigma^- = \bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 - 2\bar{\alpha}^1 - 2\bar{\alpha}^2 = |-1, 0\rangle = dds$$

$$\Sigma^0 = \bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 - \bar{\alpha}^1 - \bar{\alpha}^2 = |0, 0\rangle = uds$$

$$\Lambda^0 = \bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 - \bar{\alpha}^1 - \bar{\alpha}^2 = |0, 0\rangle = uds$$



Cuadro 4.5: Identificación del octete de bariones. En este caso no se incluyen los estados, sino los quarks constituyentes ya que el octete es el tensor de simetría mixta de la descomposición del producto tensorial de las tres partículas. En el caso del decuplete fue más fácil debido a que el tensor de la representación es completamente simétrico.

El Modelo Quark

Conclusiones

Se ha mostrado, pues, la plausibilidad de la asociación de los hadrones a la composición de quarks que forman aproximadamente (sería una simetría perfecta si todos los quarks tuviesen la misma masa) una simetría de sabor $SU(n)$, donde n representa el número de estados en los que puede encontrarse la partícula quark. Se ha desarrollado $SU(3)$ por motivos históricos, bibliográficos y por mantener cierto equilibrio entre sencillez y cantidad de partículas explicadas. En cualquier caso con las herramientas mostradas en este documento es posible construir cualquier representación con un poco de cuidado y paciencia. Ello ha sido la prioridad para este trabajo, es decir, se ha preferido ser más exhaustivo a la hora de profundizar en los conceptos y herramientas necesarios para "construir" hadrones que a la hora de enumerar de manera cualitativa las sorprendentes consecuencias que tiene la simple aceptación de teorema de Noether y el uso del marco teórico proporcionado por las teorías de gauge locales (modelo estándar).

Algunas de esas consecuencias importantes dejadas en el tintero pueden ser la introducción de la simetría perfecta $SU(3)$ de color de los bariones bajo la fuerza fuerte que asegura una función de onda antisimétrica, se podía haber mencionado cómo se construyen la cromodinámica cuántica o la teoría electrodébil, cuál es la importancia del hipotético descubrimiento del bosón de Higgs, etc. Sin duda la física puede estar viviendo uno de sus periodos más apasionantes de su historia no tanto por los descubrimientos que se están produciendo como por los que tienen que venir.

Bibliografía

[Cor97] J. F. Cornwell. Group Theory in Physics: An Introduction. Techniques of Physics. Academic Press, 1997.

[FS06] Antonio Ferrer-Soria. Física Nuclear y de Partículas. Number 62 in Educació. Materials. Publicacions de la Universitat de València, 2a edition, 2006.

[GC01] Joaquín Gómez-Camacho. Partículas elementales. Apuntes de la asignatura Partículas Elementales de la Universidad de Sevilla, Junio 2001.

[Geo99] Howard Georgi. Lie Algebras in Particle Physics: From Isospin to Unified Theories. Frontiers in Physics. Westview Press, 2a edition, 1999.

Rubén SÁNCHEZ-RAMÍREZ
Facultad de Física
Universidad de La Laguna

Este artículo es la cuarta y última parte de El Modelo Quark.
Para consultar la primera parte: http://casanchi.com/fis/quark_01.htm
Para consultar la segunda parte: http://casanchi.com/fis/quark_02.htm
Para consultar la tercera parte: http://casanchi.com/fis/quark_03.htm