Hacia un sistema natural de unidades

Nelson Arias Ávila, Mario Helí González Morales

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá - Colombia
Licenciatura en Física
nelsona@udistrital.edu.co, mhgonzal@udistrital.edu.co

Resumen

En el trabajo se presenta un breve recuento histórico de algunas propuestas que buscaban encontrar relación entre las constantes $\hbar$ y e (constante reducida de Planck y carga del electrón) y la posibilidad de reducir una constante a la otra, es decir dejar solo una de estas constantes como fundamental.
Esto planteaba diferentes posibilidades para la creación de un sistema natural de unidades de medición, basado en las constantes c, $\hbar$ y e (donde c es la velocidad de la luz), y su relación, observada inicialmente, en la constante de estructura fina del espectro ($\alpha = e^2/\hbar c$).
Se muestra cómo un sistema basado en las tres constantes fundamentales (c, $\hbar$ y e) es posible, y cómo un sistema que incluya, además de estas constantes, a la frecuencia (ν) puede ser útil y apropiado como sistema natural (fundamental) de unidades, especialmente para el estudio de fenómenos cuánticos macroscópicos.

Abstract

In this paper a brief historical recount of some proposals is presented that they looked for to find relationship among the constant $\hbar$ and e (reduced Planck's constant and elementary charge) and the possibility to reduce a constant to the other one, that is to say to leave alone one of these constants as fundamental.
This outlined different possibilities for the creation of a natural system of units, based on the constant c, $\hbar$ and e (where c is the speed of the light), and its relationship, observed initially, in the fine structure constant of the espectro ($\alpha = e^2/\hbar c$).
Is it shown as a system based on the three fundamental constants (c, $\hbar$ and e) is it possible and as a system that includes, besides these constants, to the frequency (ν) can it be useful and appropriate as natural system of units, especially for the study of macroscopic quantum phenomena.

Introducción

A finales del siglo XIX con el desarrollo de la electrólisis y la teoría de la radiación térmica surgieron en la Física dos constantes nuevas, la carga elemental e y la constante de Planck h. Estas constantes, a diferencia de otra constante fundamental (la velocidad de la luz c), estaban relacionadas con una concepción “discreta” del mundo físico, la carga e se interpretó posteriormente por algunos físicos como un “cuanto” de carga eléctrica. Esto dio pie a comienzos del siglo XX, a la formulación de una hipótesis que relacionaba a las constantes h y e, basándose en la simplicidad e interrelación que deberían presentar las leyes del universo. Entre los impulsores de esta idea cabe mencionar, aunque bajo diferentes interpretaciones, a Planck, Jeans, Einstein, Lorentz, Dirac, entre otros.

Ya en 1899, cuando aún no existía el concepto cuántico, Planck anotaba que la escogencia de los sistemas de unidades de medición no se había hecho con base en un punto de vista general que se pudiera emplear en cualquier sitio y tiempo, sino en función de las necesidades de nuestro limitado espacio terrenal. Él planteó que, fundamentándose en las constantes c, h, G (constante gravitacional), se obtenía la posibilidad de establecer las unidades básicas (unidades absolutas) de un sistema que no dependía de la elección de determinadas condiciones y que serviría para todos los tiempos y culturas y por lo tanto podría llamarse “sistema natural de unidades” (Arias, 1989).
Dichas unidades son: longitud, $l = (hG/c^3)^{½}$, masa, $m = (hc/G)^{½}$, tiempo, $t = (hG/c^5)^{½}$; ellas fueron llamadas, por el físico J. Wheeler, “magnitudes de Planck”.
Esta propuesta de Planck no tuvo acogida, en parte porque el conjunto (c, h, G) no representaba en ese entonces ninguna ventaja sobre otros sistemas, eran unidades pequeñas para la expresión de los fenómenos cotidianos, además de otra serie de dificultades prácticas (Wilczek, 2005).
Un argumento concreto en apoyo del sistema (c, h, e) era la constante de estructura fina del espectro del átomo (α) de la cual se deducía la equivalencia dimensional entre las constantes h y e^2/c.
Se hará un breve recuento histórico de diferentes interpretaciones y desarrollos de esta fórmula, tratando de mostrar que ella no es argumento suficiente para la hipótesis de relación (dependencia) entre h y e, luego de lo cual se analizará el sistema caracterizado por c, $\hbar$, e y ν (frecuencia) como un sistema natural que puede ser útil y apropiado.

La constante de estructura fina del espectro

Para fundamentar un sistema natural de unidades inicialmente es necesario responder si las “unidades fundamentales” empleadas en él pueden considerarse unidades independientes. En nuestro caso se debía analizar si c, h y e podían emplearse simultánea e independientemente en calidad de unidades de medición, de ser afirmativa la respuesta podía adoptarse un sistema de unidades ($c = 1$, $h = 1$, $e = 1$) o ($c = 1$, $\hbar = 1$, $e = 1$).
Las opiniones eran diversas, algunos consideraban que era imposible dicho sistema por cuanto las constantes c, h y e no podían ser fundamentales a la vez, otros estaban convencidos de tal posibilidad y presentaron diferentes alternativas, aunque algunos pensaban que las tres constantes no eran suficientes por lo cual propusieron agregar otras, tales como la masa del protón (m_p) o del electrón (m_e), el número de Avogadro (N_A), etc.
La disputa se centró en el análisis de la fórmula de la constante de estructura fina.

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137} \tag{1}$$

La constante α es adimensional, determina el desdoblamiento fino de niveles de energía en el átomo y caracteriza la fuerza de la interacción electromagnética; para ella se ha obtenido un valor con una incertidumbre relativa de 3.8×10^{-9} (Mohr y Taylor, 2001).
Esta ecuación, así planteada, muestra que las tres constantes c, $\hbar$ y e están relacionadas entre sí, pero también muestra que sus valores no son arbitrarios y no pueden ser todos iguales, por

ejemplo a la unidad. Si tomamos arbitrariamente el valor de dos de dichas constantes, el tercero obligatoriamente estaría determinado por la ecuación (1), este raciocinio dio pie a plantear que las tres constantes no podían considerarse fundamentales, una de ellas debía ser "derivada" de las otras dos.

Hoy sabemos que en realidad el valor de $e^2/\hbar c$ depende de la elección de las unidades de medición de la carga, ya que para las unidades de las magnitudes electromagnéticas necesitamos además de las unidades "mecánicas" otra, que puede ser el coeficiente en la ley de Coulomb.

Si en la mencionada ley $(F = K_e \frac{q_1 q_2}{r^2})$ el coeficiente K_e se hace igual a la unidad (sistema de Gauss), es correcta la ecuación (1), pero si se toma K_e igual por ejemplo a $1/4\pi$ (sistema de Lorentz), entonces cambia el valor de la relación $e^2/\hbar c$. Además en ciertos sistemas, como el SI, la constante K_e y por ende la relación $e^2/\hbar c$ no son adimensionales ($K_e = 1/4\pi\varepsilon_o = \mu_o c^2/4\pi$).
Debe entonces, para nuestros propósitos, expresarse la fórmula de la constante de estructura fina no por medio de la ecuación (1), sino:

$$\alpha = K_e \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137} \qquad (2)$$

Esta ecuación será universalmente válida y no dependerá de la elección del sistema de unidades. De la ecuación (2) se puede concluir que las constantes c, $\hbar$, e y K_e están relacionadas entre sí y que tres de ellas pueden escogerse arbitrariamente, si tomamos por ejemplo $K_e = 1$, entonces no podemos decir que c, $\hbar$ y e son iguales a la unidad, pero sí podemos tomar c, $\hbar$ y e iguales a 1 y entonces el coeficiente K_e será igual a $\alpha \approx 1/137$. También podemos hacer c=1, h=*1* y e=1, en cuyo caso $K_e = \alpha/2\pi$. La constante K_e que generalmente se toma como meramente convencional, adquiere carácter de constante fundamental en la ecuación (2).

Basados en la ecuación 1 varios físicos trataron de "reducir" una de las constantes (c, $\hbar$ o e) a las otras dos, esto presuponía la existencia de un sistema particular de unidades. La elección de un valor matemático fijo para K_e (1 o $1/4\pi$) significaba "reducir" las magnitudes electromagnéticas a las mecánicas o viceversa, lo cual implicaba una reducción ("unificación") hipotética de la teoría electrodinámica a la mecánica o viceversa.
Esto estuvo justificado en su época ya que la Física clásica (de magnitudes continuas) se encontró inesperadamente con conceptos discretos (cuánticos); Maxwell, Helmholtz y otros hacia 1880, estudiando la electrólisis, habían propuesto la idea de "átomos" o "moléculas" de electricidad, idea que devino en la concepción de la carga elemental e y la "cuantización" de la carga eléctrica en unidades y múltiplos de e.
Por ello al corroborarse que la idea de Planck de cuantizar la energía no era solo un método matemático para la obtención de una ecuación, sino una ley fundamental de la naturaleza, se pensó que estas constantes e y h, que representaban concepciones discretas, podrían estar relacionadas y por lo tanto una podría reducirse a la otra, esto lo reforzaba la ecuación (1).
Planck en 1905 escribía a Ehrenfest lo siguiente: "Se me antoja posible que este supuesto (la existencia de un cuanto elemental de electricidad [la carga e]) brinde un puente a la existencia de un cuanto energético elemental h, sobre todo porque h tiene las mismas dimensiones que e^2/c (e, unidad elemental de electricidad en unidades electrostáticas; c, velocidad de la luz). Pero no estoy en condiciones de ofrecer ninguna opción definitiva sobre esta cuestión", citado en (Kuhn, 1980).
El mismo año, Jeans publica su artículo "Sobre las leyes de la radiación", en el cual al estudiar las leyes de radiación térmica estableciendo relaciones entre λ y T, hace un análisis dimensional

empleando como constantes a: c, e, K_e, m_e y R (constante universal de los gases). Obteniendo, entre otras cosas, una expresión para la constante de la ley de Stefan-Boltzmann, $\sigma = e^{-6}R^4K_e^3$ y para la constante de la ley de desplazamiento de Wien, $b = e^2/RK_e$, estas constantes también fueron encontradas por Planck, por medio de c, h y k (constante de Boltzmann).

Einstein en su artículo “Estado actual del problema de la radiación” también, al estudiar la radiación térmica, hace un análisis dimensional tomando como constantes a: c, h, e y k sin tener en cuenta a K_e, obteniendo que $h = e^2/c$; al comparar los valores numéricos obtiene una diferencia de tres órdenes de magnitud: “Aquí faltan tres órdenes [de magnitud]. Esto, por supuesto, puede atribuirse al cálculo de los factores adimensionales desconocidos. Lo más importante de esta relación consiste en que reduce la constante cuántica h al cuanto elemental de electricidad e” (Einstein, 1909).
Einstein, como la mayoría de los físicos de la época, daba por sentado el sistema de Gauss y posiblemente no tuvo en cuenta el análisis dimensional de K_e.
Otros autores basados en la relación $h = e^2/c$, trataron de reducir la constante h a c y e, considerando que h era una constante puramente convencional que no tenía validez fundamental y que dependía solamente de la elección del sistema de unidades de medición.

En 1916, luego de los trabajos de Bohr sobre la estructura del átomo y el espectro del Hidrógeno, donde figuran diferentes combinaciones de las constantes c, h, e, y m_e, Sommerfeld obtiene la constante de estructura fina del espectro α en la forma representada en la ecuación (1).
Born hacia 1932, analizando la fórmula (1), decide tomar como fundamentales a: c y h, tratando de explicar (teoría unitaria del campo) la aparición de las cargas eléctricas elementales. En su conocido libro *Física Atómica* continúa convencido de la validez universal de la relación (1), es decir, que α es adimensional en todos los sistemas, sin tener en cuenta la relación (2) (Born, 1965).
En la década de los 60, con la consolidación de la electrodinámica cuántica y la física de las partículas elementales, los intentos de los principales físicos de reducir h a e o viceversa se suspendieron por completo, se asumió que las tres constantes c, h y e eran fundamentales.

Análisis del sistema c, $\hbar$, e, ν

Como se ha dicho, son varias las propuestas de sistemas naturales de unidades que han sido formuladas y que involucran diferentes constantes; partiendo de que c, $\hbar$ y e pueden considerarse constantes fundamentales se analizará brevemente el sistema c, $\hbar$, e, ν.
El sistema mencionado en lugar de emplear unidades de longitud, masa, tiempo y corriente (L, M, T, I) como en el Sistema Internacional SI (Sena, 1979), emplea velocidad, acción, carga eléctrica y frecuencia (V, S, Q, N), para esto considera la existencia de medidas naturales para la velocidad c, acción $\hbar$, y carga eléctrica e y toma la frecuencia ν como una cuarta unidad que puede ser arbitraria, obteniendo el sistema (c, $\hbar$, e, ν).
Pasar del sistema (L, M, T, I) al (V, S, Q, N) puede hacerse formalmente por medio de los siguientes cambios:

$$\mathrm{L} \rightarrow \mathrm{V/N}, \quad \mathrm{T} \rightarrow 1/\mathrm{N}, \quad \mathrm{M} \rightarrow \mathrm{SN/V^2}, \quad \mathrm{I} \rightarrow \mathrm{QN}.$$

Veamos la relación, en los sistemas mencionados, entre algunas de las principales magnitudes físicas (Tomilin, 2002).
En la tabla 1 puede observarse que la dimensionalidad de la mayoría de magnitudes en el SI (L, M, T, I), no ofrece mucha información sobre las leyes físicas asociadas, especialmente cuando se hace referencia a efectos cuánticos.

Lo contrario ocurre en el sistema (c, $\hbar$, e, v), por ejemplo para la energía se tiene que dim(E) = $\hbar v$, para el impulso dim($\boldsymbol{p}$) = $\hbar v/c$, para la velocidad dim($\boldsymbol{v}$) = c, se observa que coinciden con las fórmulas para la energía y el impulso (cantidad de movimiento) de la luz, así como para la expresión de la velocidad de la luz en el vacío.

Magnitud	Sistema (L, M, T, I)	Sistema (V, S, Q, N)	Sistema (c, $\hbar$, e, v)
Longitud, l	L	V/N	c/v
Tiempo, t	T	1/N	$1/v$
Velocidad, $\boldsymbol{v}$	L/T	V	c
Frecuencia, v	1/T	N	v
Aceleración, $\boldsymbol{a}$	L/T^2	VN	cv
Masa, m	M	SN/V^2	$\hbar v/c^2$
Densidad, ρ	M/L^3	SN^4/V^5	$\hbar v^4/c^5$
Energía, E	ML^2/T^2	SN	$\hbar v$
Impulso, $\boldsymbol{p}$	ML/T	SN/V	$\hbar v/c$
Fuerza, $\boldsymbol{F}$	ML/T^2	SN^2/V	$\hbar v^2/c$
Corriente eléctrica, I	I	QN	ev
Resistencia, R	ML^2/I^2T^3	S/Q^2	$\hbar/e^2$
Potencial, U	ML^2/IT^3	SN/Q	$\hbar v/e$
Coeficiente en la ley de Coulomb, K_e	ML^3/I^2T^4	SV/Q^2	$\hbar c/e^2$

Tabla 1. Dimensiones de algunas magnitudes físicas en el sistema (c, $\hbar$, e, v).

La dimensión de la masa, dim(m) = $\hbar v/c^2$, corresponde a la conocida relación de Compton entre la masa de la partícula y su frecuencia; la dim(K_e) = $\hbar c/e^2$, coincide con la ecuación (2) ($K_e = \alpha \frac{\hbar c}{e^2}$).
Asimismo es posible ver que dim(R) = $\hbar/e^2$ y dim(U) = $\hbar v/e$ coinciden con expresiones de fenómenos cuánticos macroscópicos: efecto Hall (constante de von Klitzing) y efecto Josephson respectivamente.
También se puede obtener para el flujo magnético: dim(Φ) = $\hbar/e$, expresión relacionada con el llamado efecto London, con el efecto Aharanov - Bohm, y en general con la cuantización del flujo magnético ($\pi\,\hbar/e$) (Feynman y otros, 1987).

Conclusiones

A comienzos del siglo XX el desarrollo conceptual de la Física planteó en varios físicos la necesidad de encontrar la relación entre *h* y *e*, y la posibilidad de reducir una constante a la otra, es decir, dejar solo una constante como fundamental. Esta idea sin embargo no encontró suficiente fundamentación, su argumento principal fue la ecuación (1) que consideraba a $K_e = 1$ como algo válido en general, por lo cual varios científicos pensaron en la imposibilidad de crear un sistema natural de unidades basado en *c*, *ħ* y *e*.
Es de anotar que en la época mencionada solo se conocían dos tipos de interacciones (gravitacional y electromagnética), con el descubrimiento de otras dos (débil y fuerte) quedó claro que la naturaleza es más compleja de lo que se pensaba.
El análisis de la ecuación (2) permitió comprender que pueden crearse y emplearse diferentes sistemas de unidades que tengan como base a: *c*, *ħ* y *e*, por ejemplo (*c*, *ħ*, *e*, *G*), (*c*, *ħ*, *e*, m_e), (*c*, *ħ*, *e*, *v*), etc.
También permite concluir que las constantes *c*, *ħ* y *e* pueden considerarse fundamentales simultáneamente, es decir, ninguna de ellas es derivada de las otras.
La Física avanza hacia una teoría unificada, la cual deberá tener un sistema natural y unificado de unidades; este, hasta lo que se conoce hoy día, dependerá de la relación que se establezca entre la interacción gravitacional y la masa de las partículas.
Finalmente es posible afirmar que el sistema (*c*, *ħ*, *e*, *v*) puede ser útil como sistema natural de unidades, fundamentalmente al estudiar fenómenos cuánticos macroscópicos.

Agradecimientos

Los autores agradecen a la Universidad Distrital por el apoyo para la presentación del presente trabajo en la Reunión Internacional sobre la Enseñanza de la Física y la Especialización de Profesores, RIEFEP - 2005.

Referencias

- Arias Ávila, N. (1989). *Geometría y Física*. Perspectivas. Publicaciones CIUPC, Vol. 3, No. 1, Valledupar, p. 19 - 24.
- Born, M. (1965). *Física Atómica*. Mir, Moscú, p. 77, 195. (En ruso).
- Einstein, A. (1909). *Estado actual del problema de la radiación*. En: Albert Einstein- Colección de Trabajos Científicos, Tomo III. Nauka, Moscú, 1966, p.177-178. (En ruso).
- Feynman, R., Leighton, R., Sands, M. (1987). *Física, Vol. III: Mecánica cuántica*. Addison - Wesley Iberoamericana, p. 21-13 – 21-17.
- Kuhn, T. (1980). *La teoría del cuerpo negro y la discontinuidad cuántica, 1894 - 1912*. Alianza Editorial, Madrid, p. 160.
- Mohr, P. and Taylor, N. (2001). *Adjusting the Values of the Fundamental Constants*. Physics Today, Vol.54, No.3, p. 29.
- Sena, L. (1979). *Unidades de las magnitudes físicas y sus dimensiones*. Editorial Mir, Moscú, 352p.
- Tomilin, K. (2002). En: *Investigación de la historia de la Física y la Mecánica*. Nauka, Moscú, p. 267 - 268. (En ruso).
- Wilczek, F. (2005). *On Absolute Units, I: Choises*. Physics Today, Vol.58, No.10, p. 12 -13.