Funciones Senoidales Asincrónicas

Autor:

Dante E. Wojtiuk

Índice

Funciones Senoidales Asincrónicas

Dante E. Wojtiuk
(dantewo@ciudad.com.ar)

Introducción

El presente trabajo está íntegramente orientado al análisis de secuencias cuya expresión funcional corresponden a sumatorias finitas de funciones senoidales asincrónicas, distribuidas regularmente en los reales.

Su origen es una investigación algorítmica.

Como tantos hallazgos científicos, partió de una intuición, combinada con una casualidad, evidente en un pequeño campo de aplicación, pero cuya generalización es el fruto de 3 años consecutivos de labor.

Las funciones de esta forma tienen propiedades cuyo estudio se reivindica novedoso en el presente trabajo, se analizan las mismas y su relación con los conjuntos generadores.

Se analizan también las relaciones internas de los vectores componentes para ciertas dimensiones, y las formas canónica y compuesta de las matrices asociadas a las funciones objeto de este estudio en múltiples dimensiones.

A juicio del autor, las conclusiones aquí vertidas son consideradas de utilidad para la investigación de muchos fenómenos naturales acotados de composición acíclica compleja

Buenos Aires, 29 de Mayo de 2006

Dante E. Wojtiuk

1) Convenciones sobre simbología

El presente trabajo se rige por la siguiente convención en cuanto a referencias:

<1> Es una ecuación o relación. Posteriormente puede ser invocada por el número de la misma.

T.1 Es un Teorema (en este caso el teorema 1, invocado por su sigla)

T.1.1 Es una ampliación del teorema 1 o consecución del mismo.

C.1.1 Corolario del Teorema 1 (la primera cifra indica el teorema de referencia el segundo el número de corolario vinculado al mismo)

Co.1 Condición 1, condición 2, etc, puede ser invocada en cuanto el conjunto de condiciones nombradas de tal forma apliquen a varias proposiciones

L.1 Lema (en este caso, Lema 1).

{{1}} Es una referencia a un documento que amplía el tema referido, o bien es una planilla de cálculo con ejemplos numéricos vinculados al tema de referencia, identificado por el nombre: **'Documento {{1}}**'.
Si a la referencia entre corchetes le sigue una llave con dos grupos de caracteres alfanuméricos separados por un guión, se debe interpretar como una referencia a hojas y celdas en una planilla de cálculo Excel.

Ejemplo:

{{1}} {hoja1 – A1} hace referencia a un documento llamado **'Documento {{1}}.xls',** a su hoja llamada **'hoja1'** y a la celda **A1** en la hoja referida.

Dicho documento (salvo expresa aclaración) se halla en el Compact Disk de respaldo, entregado como parte de este trabajo al jurado.[1]

[1] Todas las ecuaciones son rigurosamente probadas en el curso del presente trabajo, pero considerando la novedad de algunos planteamientos, el autor ha juzgado conveniente el mayor respaldo fáctico a las proposiciones vertidas.

2) Notación

A mor de sencillez, se establece una notación generalizada de términos y / o funciones cuya aparición recurrente justifica la misma:

2.1) Sea:

$$f_{(k_1,C_1)} : \Re \to \Re \,/\, f_{(k_1,C_1)}(x) = C_1 \cos(xk_1)$$

$$f_{(k_1,k_2,C_1,C_2)} : \Re \to \Re \,/\, f_{(k_1,k_2,C_1,C_2)}(x) = C_1 \cos(xk_1) + C_2 \cos(xk_2)$$

$$\ldots$$

$$f_{(k_1,..,k_n,C_1,..,C_n)} : \Re \to \Re \,/\, f_{(k_1,..,k_n,C_1,..,C_n)}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \cos(xk_i)$$

A la que se llamará **<u>función asincrónica suma</u>** *(fa+),* de orden **n.**

Los términos **k** y **C** son constantes, es decir, no varían en la evolución de la secuencia**.**

2.2) Sea:

$$g_{(k_1,C)} : \Re \to \Re \,/\, g_{(k_1,C)}(x) = C \cos(xk_1)$$

$$g_{(k_1,k_n,C)} : \Re \to \Re \,/\, g_{(k_1,k_n,C_1,C_n)}(x) = C \cos(xk_1)\cos(xk_2)$$

$$\ldots$$

$$g_{(k_1,..,k_n,C)} : \Re \to \Re \,/\, g_{(k_1,..,k_n,C)}(x) = C \prod_{i=1}^{n} \cos(xk_i)$$

A la que se llamará **<u>función asincrónica producto</u>** *(ga*),* de orden **n.**

Mismas consideraciones que en **2.1**

En ambos casos:

$$
\begin{aligned}
& x, k, C \in \Re ; \\
& C \neq 0 ; \\
& k \neq 0 ; \\
& k_{i+1} \neq k_i + 2 s \pi ; \\
& s \in Z ; \\
& n \in N ;
\end{aligned}
$$

<Co.1>

En la **Figura 1** se muestran varias gráficas de la $fa+$ de distintos órdenes.

2.3) Sea:

$$
M^{2n\times 2n}{}_{(f,x,+)} = \begin{bmatrix} f_{(k_1,..k_n,C_1,..C_n)}(x) & . \; . \; . & . \\ f_{(k_1,..k_n,C_1,..C_n)}(x+1) & . \; . \; . & . \\ f_{(k_1,..k_n,C_1,..C_n)}(x+2) & . \; . \; . & . \\ . & . \; . \; . & . \\ . & . \; . \; . & f_{(k_1,..k_n,C_1,..C_n)}(x+2nj+i-2n-1) \end{bmatrix}^{2n\times 2n}
$$

$$
\begin{aligned}
& x, k, C \in \Re ; \\
& C \neq 0 ; \\
& k \neq 0 ; \\
& k_{i+1} \neq k_i + 2 s \pi ; \\
& s \in Z ; \\
& n \in N ;
\end{aligned}
$$

la matriz de **2n x 2n** generada por la secuencia de $fa+$ de orden **n**.

Se define pues una <u>**matriz asincrónica suma**</u> de **2n x 2n** aquella cuyos vectores columna son generados por la secuencia de la función asincrónica suma tal como fue definida en **2.1.**

Su forma general es:

$$M^{2\times 2}{}_{(f,x,+)} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{ij} \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{bmatrix}^{2n\times 2n} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} C_i \cos\left[(x+2nj+i-2n-1)k_i\right] \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{bmatrix}^{2n\times 2n}$$

Como puede apreciarse, a cierta secuencia asincrónica suma de orden n se la distribuye – columna a columna – en una matriz de **2n x 2n**, ordenadamente.

Ejemplo de matrices asincrónicas suma:

fa+ orden 1:

$$M^{2\times 2}{}_{(f,x,+)}=\begin{bmatrix} f_{(k_1,C_1)}(x) & f_{(k_1,C_1)}(x+2) \\ f_{(k_1,C_1)}(x+1) & f_{(k_1,C_1)}(x+3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C_1\cos(xk_1) & C_1\cos\left[(x+2)k_1\right] \\ C_1\cos\left[(x+1)k_1\right] & C_1\cos\left[(x+3)k_1\right] \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} 7\cos(x3) & 7\cos\left[(x+2)3\right] \\ 7\cos\left[(x+1)3\right] & 7\cos\left[(x+3)3\right] \end{bmatrix}$$

$$C_1=7;$$
$$k_1=3$$

fa+ orden 2:

$$M^{2\times 2}{}_{(f,x,+)}=\begin{bmatrix} f_{(k_1,k_2,C_1,C_2)}(x) & f_{(k_1,k_2,C_1,C_2)}(x+4) & f_{(k_1,k_2,C_1,C_2)}(x+8) & f_{(k_1,k_2,C_1,C_2)}(x+12) \\ f_{(k_1,k_2,C_1,C_2)}(x+1) & f_{(k_1,k_2,C_1,C_2)}(x+5) & f_{(k_1,k_2,C_1,C_2)}(x+9) & f_{(k_1,k_2,C_1,C_2)}(x+13) \\ f_{(k_1,k_2,C_1,C_2)}(x+2) & f_{(k_1,k_2,C_1,C_2)}(x+6) & f_{(k_1,k_2,C_1,C_2)}(x+10) & f_{(k_1,k_2,C_1,C_2)}(x+14) \\ f_{(k_1,k_2,C_1,C_2)}(x+3) & f_{(k_1,k_2,C_1,C_2)}(x+7) & f_{(k_1,k_2,C_1,C_2)}(x+11) & f_{(k_1,k_2,C_1,C_2)}(x+15) \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} C_1\cos[xk_1]+C_2\cos[xk_2] & C_1\cos[(x+4)k_1]+C_2\cos[(x+4)k_2] & C_1\cos[(x+8)k_1]+C_2\cos[(x+8)k_2] & C_1\cos[(x+12)k_1]+C_2\cos[(x+12)k_2] \\ C_1\cos[(x+1)k_1]+C_2\cos[(x+1)k_2] & C_1\cos[(x+5)k_1]+C_2\cos[(x+5)k_2] & C_1\cos[(x+9)k_1]+C_2\cos[(x+9)k_2] & C_1\cos[(x+13)k_1]+C_2\cos[(x+13)k_2] \\ C_1\cos[(x+2)k_1]+C_2\cos[(x+2)k_2] & C_1\cos[(x+6)k_1]+C_2\cos[(x+6)k_2] & C_1\cos[(x+10)k_1]+C_2\cos[(x+10)k_2] & C_1\cos[(x+14)k_1]+C_2\cos[(x+14)k_2] \\ C_1\cos[(x+3)k_1]+C_2\cos[(x+3)k_2] & C_1\cos[(x+7)k_1]+C_2\cos[(x+7)k_2] & C_1\cos[(x+11)k_1]+C_2\cos[(x+11)k_2] & C_1\cos[(x+15)k_1]+C_2\cos[(x+15)k_2] \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} 8\cos[x1.7]+5\cos[x2.3] & 8\cos[(x+4)1.7]+5\cos[(x+4)2.3] & 8\cos[(x+8)1.7]+5\cos[(x+8)2.3] & 8\cos[(x+12)1.7]+5\cos[(x+12)2.3] \\ 8\cos[(x+1)1.7]+5\cos[(x+1)2.3] & 8\cos[(x+5)1.7]+5\cos[(x+5)2.3] & 8\cos[(x+9)1.7]+5\cos[(x+9)2.3] & 8\cos[(x+13)1.7]+5\cos[(x+13)2.3] \\ 8\cos[(x+2)1.7]+5\cos[(x+2)2.3] & 8\cos[(x+6)1.7]+5\cos[(x+6)2.3] & 8\cos[(x+10)1.7]+5\cos[(x+10)2.3] & 8\cos[(x+14)1.7]+5\cos[(x+14)2.3] \\ 8\cos[(x+3)1.7]+5\cos[(x+3)2.3] & 8\cos[(x+7)1.7]+5\cos[(x+7)2.3] & 8\cos[(x+11)1.7]+5\cos[(x+11)2.3] & 8\cos[(x+15)1.7]+5\cos[(x+15)2.3] \end{bmatrix}$$

$$C_1=8;$$
$$C_2=5;$$
$$k_1=1.7$$
$$k_2=2.3$$

2.4) Se define una **matriz asincrónica producto** de $2^n \times 2^n$:

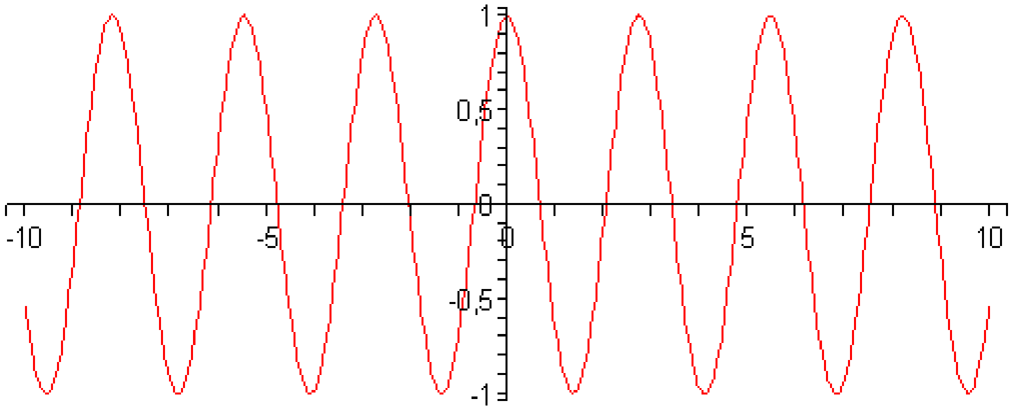
$$M^{2^n x 2^n}{}_{(g,x,*)} = C\begin{bmatrix} g_{(k_1,..,k_n,C)}(x) & & \\ g_{(k_1,..,k_n,C)}(x+1) & & \\ g_{(k_1,..,k_n,C)}(x+2) & & \\ .... & & \\ .... & & g_{(k_1,..,k_n,C)}(x) \end{bmatrix}^{2^n x 2^n} =$$

$$C\begin{bmatrix} \prod_{i=1}^{n}\cos(xk_i) & & \\ \prod_{i=1}^{n}\cos[(x+1)k_i] & & \\ \prod_{i=1}^{n}\cos[(x+2)k_i] & & \\ .... & & \\ .... & & \prod_{i=1}^{n}\cos[(x+2nj+i-2n-1)k_i] \end{bmatrix}^{2^n x 2^n}$$

En ambos casos las condiciones de existencia son <Co.1>

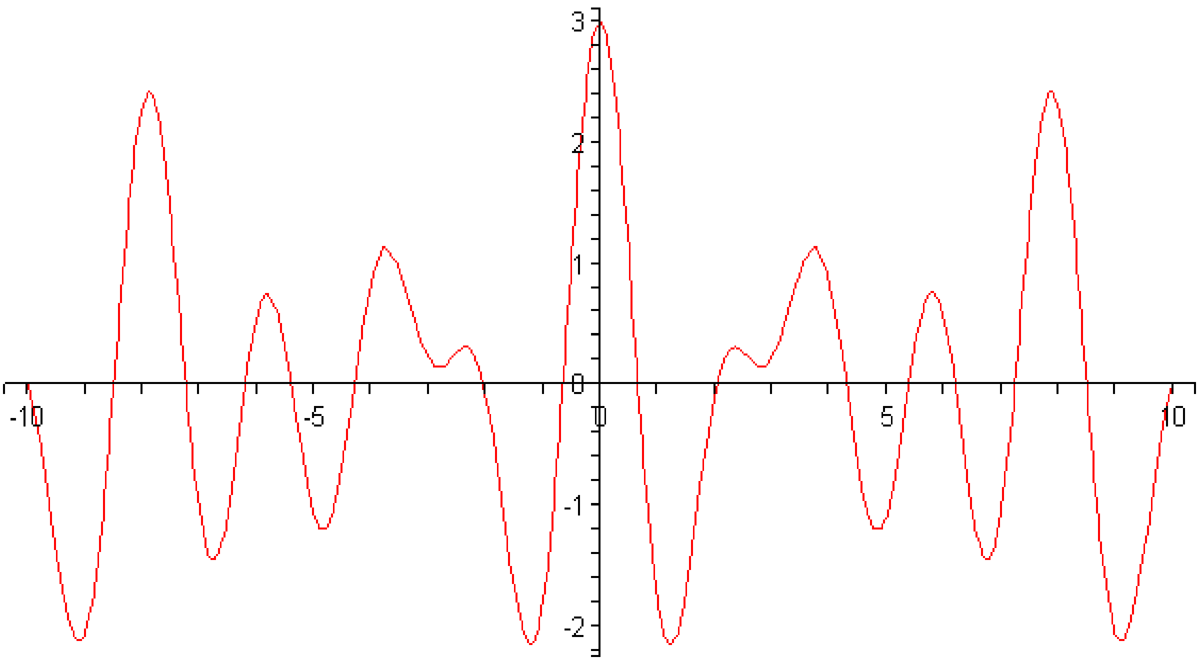
A los coeficientes C_i que multiplican cada coseno en $fa+$ (los que preceden a la función coseno) se los llamará ***coeficientes multiplicadores*** (c. mult), y a los coeficientes k_i que están incluidos como argumento de cada función coseno, se los llamará ***coeficientes generadores*** (c. gen). El vector **n-dimensional** cuyos términos son los C_i se denomina ***vector multiplicador*** v_m, el vector equidimensional cuyos términos son k_i se denomina ***vector generador*** v_g.

$$y = \cos(2.3x)$$



$$y = \cos(1.7x) + \cos(2.3x) + \cos(3.2x)$$
$$v_n = \langle 1,1,1 \rangle$$
$$v_g = \langle 1.7, 2.3, 3.2 \rangle$$

Figura 1:
Gráficas de ***fa***+ de órdenes 1 y 3



3) Funciones Senoidales Asincrónicas

3.1) Planteamiento del problema

Como puede apreciarse, en general *fa+, ga** son **no** periódicas, y su '*irregularidad*' es linealmente dependiente de su orden.

(Presuponemos que se cumplen **<Co.1>,** es decir, las frecuencias **k** no son armónicas entre sí)

Ambas funciones son continuas en todo su dominio de definición (los reales) y acotadas superior e inferiormente.

Interesa considerar el siguiente problema:

Sea una secuencia numérica $S_{n,x}$ ***originaria en x, acotada superior e inferiormente, expresión discreta de una sumatoria de ondas senoidales, es decir, equiparable a una forma de*** *fa+ de orden n* **(figura 2).**

La cardinalidad de la secuencia es por lo menos el cuadrado del doble del orden de *fa+*:

$$\#\left\{S_{n,x}\right\} = (2n)^2$$

Por tanto, se tienen términos suficientes como para conformar la matriz:

$$M^{2n\times 2n}{}_{(f,x,+)}$$

***Definida en* 2.3.**

Se trata de hallar a partir de tal muestreo, condiciones de los generadores y de ser posible, la composición de los vectores v_m y v_g ***, es decir descomponer en frecuencias y multiplicadores asociados a las mismas esta secuencia.***

Se abordará de aquí en más este problema. Se establecerán propiedades que sucesivamente irán acotando el mismo.

La primera formulación corresponde a cierta propiedad de invariancia del volumen de una n-caja en el espacio n- dimensional, cuyos vectores son las columnas de una matriz asincrónica suma de orden n.

En ese caso es posible acotar el producto de los cosenos de los coeficientes generadores (expresados como k_i ***en los términos), independientemente de los valores del paso x, y de los coeficientes multiplicadores*** C_i ***asociados a cada coseno.***

Se formula el siguiente teorema:

$$y = 2\cos(1.7x) + 3\cos(2.2x) + 2.5\cos(2.9x)$$

$$v_g = \langle 1.7, 2.2, 2.9 \rangle$$

$$v_m = \langle 2, 3, 2.5 \rangle$$

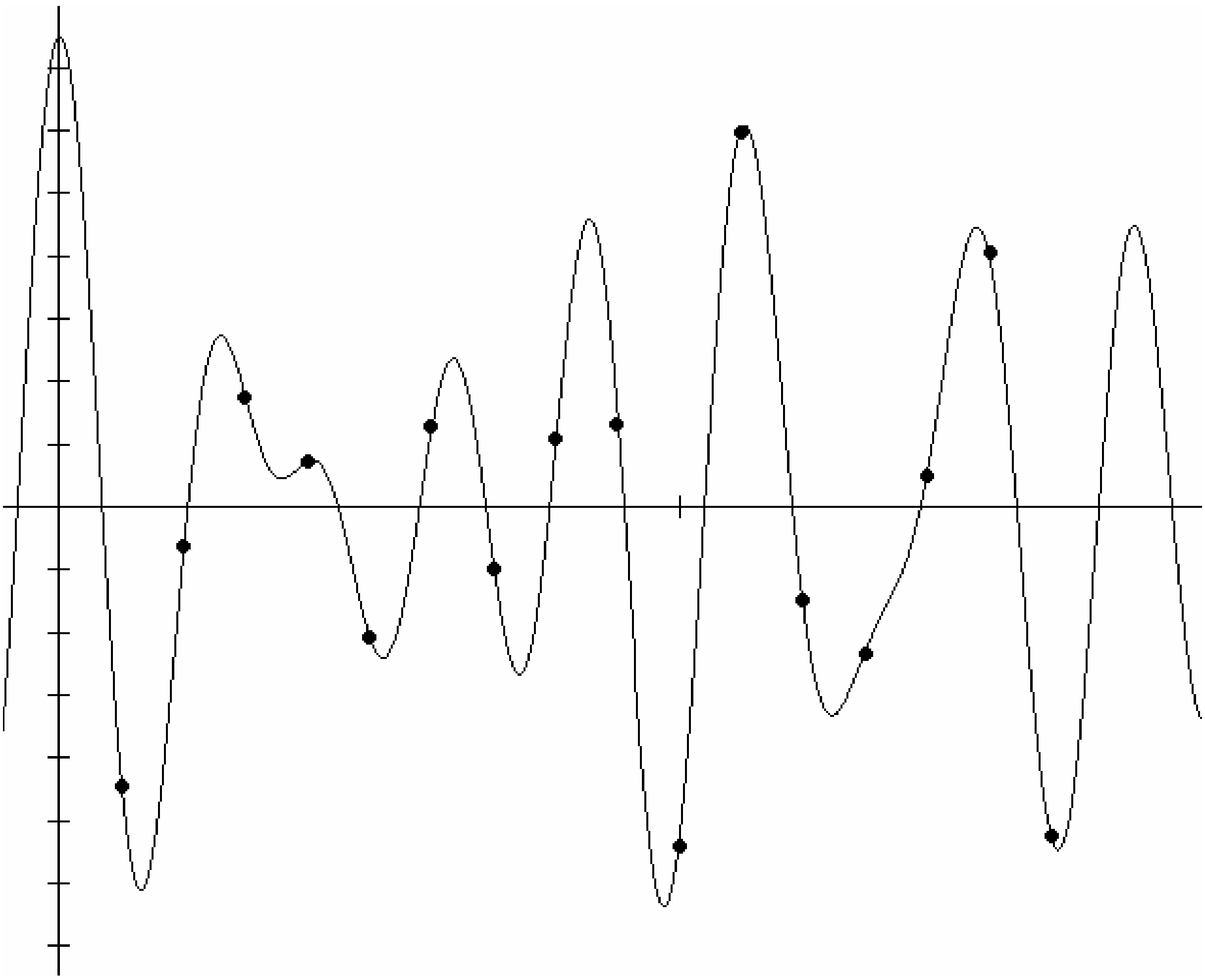


Figura 2:
Puntos discretos equidistantes de ***fa***+ orden 3

3.2) Teorema 1

Determinante de la Matriz de una Secuencia Asincrónica Suma

$$\left| M^{2n\times 2n}{}_{(f,x,+)} \right|$$

El determinante de la matriz asociada a una secuencia de la función asíncrona *fa*+ de orden n (n natural), para una secuencia de cardinalidad $(2n)^2$ es dependiente de los coeficientes multiplicadores y de sus coeficientes generadores, y solamente de estos.

Su forma general es:

$$\left| M^{2n\times 2n}{}_{(f,x,+)} \right| = \begin{vmatrix} f_{(k_1,..k_n,C_1,..C_n)}(x) & . \; . \; . & . \\ f_{(k_1,..k_n,C_1,..C_n)}(x+1) & . \; . \; . & . \\ f_{(k_1,..k_n,C_1,..C_n)}(x+2) & . \; . \; . & . \\ . & . \; . \; . & . \\ . & . \; . \; . & f_{(k_1,..k_n,C_1,..C_n)}(x+2nj+i-2n-1) \end{vmatrix}^{2n\times 2n} =$$

$$= (-1)^n a_n \left\{ \prod_{i=1}^{n} (C_i)^2 \sin(k_i)\sin(2nk_i) \right\} \prod_{i=1}^{n-1} \left\{ \prod_{j=i+1}^{n} \left[\cos(k_i) - \cos(k_j)\right]^2 \left[\cos(2nk_i) - \cos(2nk_j)\right]^2 \right\}$$

$$a_1 = 1;$$

$$a_n = 16^{n-1} a_{n-1}$$

< 1 >

Demostración:

T1.1)

- Se demuestra para n = 1 y para una secuencia que evoluciona discretamente en los naturales

$$\left| M^{2\times 2}{}_{(f,x,+)} \right| = \begin{vmatrix} f_{(k_1,C_1)}(x) & f_{(k_1,C_1)}(x+2) \\ f_{(k_1,C_1)}(x+1) & f_{(k_1,C_1)}(x+3) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} C_1 \cos(xk_1) & C_1 \cos\left[(x+2)k_1\right] \\ C_1 \cos\left[(x+1)k_1\right] & C_1 \cos\left[(x+3)k_1\right] \end{vmatrix} =$$

$$C_1^2 \left\{ \cos(xk_1)\cos\left[(x+3)k_1\right] - \cos\left[(x+1)k_1\right]\cos\left[(x+2)k_1\right] \right\} =$$

$$\frac{1}{2} C_1^2 \left[\cos(-3k_1) + \cos\left[(2x+3)k_1\right] - \cos(k_1) - \cos\left[(2x+3)k_1\right] \right] =$$

$$\frac{1}{2} C_1^2 \left[\cos(3k_1) - \cos(k_1) \right] = -C_1^2 \sin(2k_1)\sin(k_1) =$$

$$(-1)^n a_n \left\{ \prod_{i=1}^{n} (C_i)^2 \sin(k_i)\sin(2nk_i) \right\} \prod_{i=1}^{n-1} \left\{ \prod_{j=i+1}^{n} \left[\cos(k_i) - \cos(k_j)\right]^2 \left[\cos(2nk_i) - \cos(2nk_j)\right]^2 \right\}$$

$$\forall x \in \Re ;$$

Condiciones remitidas a **<Co.1>**

T1.2)

- Extensión de **T1.1** a cualquier paso p en los reales

$$\begin{vmatrix} f_{(k_1,C_1)}(x) & f_{(k_1,C_1)}(x+2p) \\ f_{(k_1,C_1)}(x+p) & f_{(k_1,C_1)}(x+3p) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} C_1\cos(xk_1) & C_1\cos\left[(x+2p)k_1\right] \\ C_1\cos\left[(x+p)k_1\right] & C_1\cos\left[(x+3p)k_1\right] \end{vmatrix} =$$

$$C_1^2\left\{\cos(xk_1)\cos\left[(x+3p)k_1\right]-\cos\left[(x+p)k_1\right]\cos\left[(x+2p)k_1\right]\right\}=$$

$$\frac{1}{2}C_1^2\left[\cos(-3pk_1)+\cos\left[(2x+3p)k_1\right]-\cos(pk_1)-\cos\left[(2x+3p)k_1\right]\right]=$$

$$\frac{1}{2}C_1^2\left[\cos(3pk_1)-\cos(pk_1)\right]=-C_1^2\sin(2pk_1)\sin(pk_1)=$$

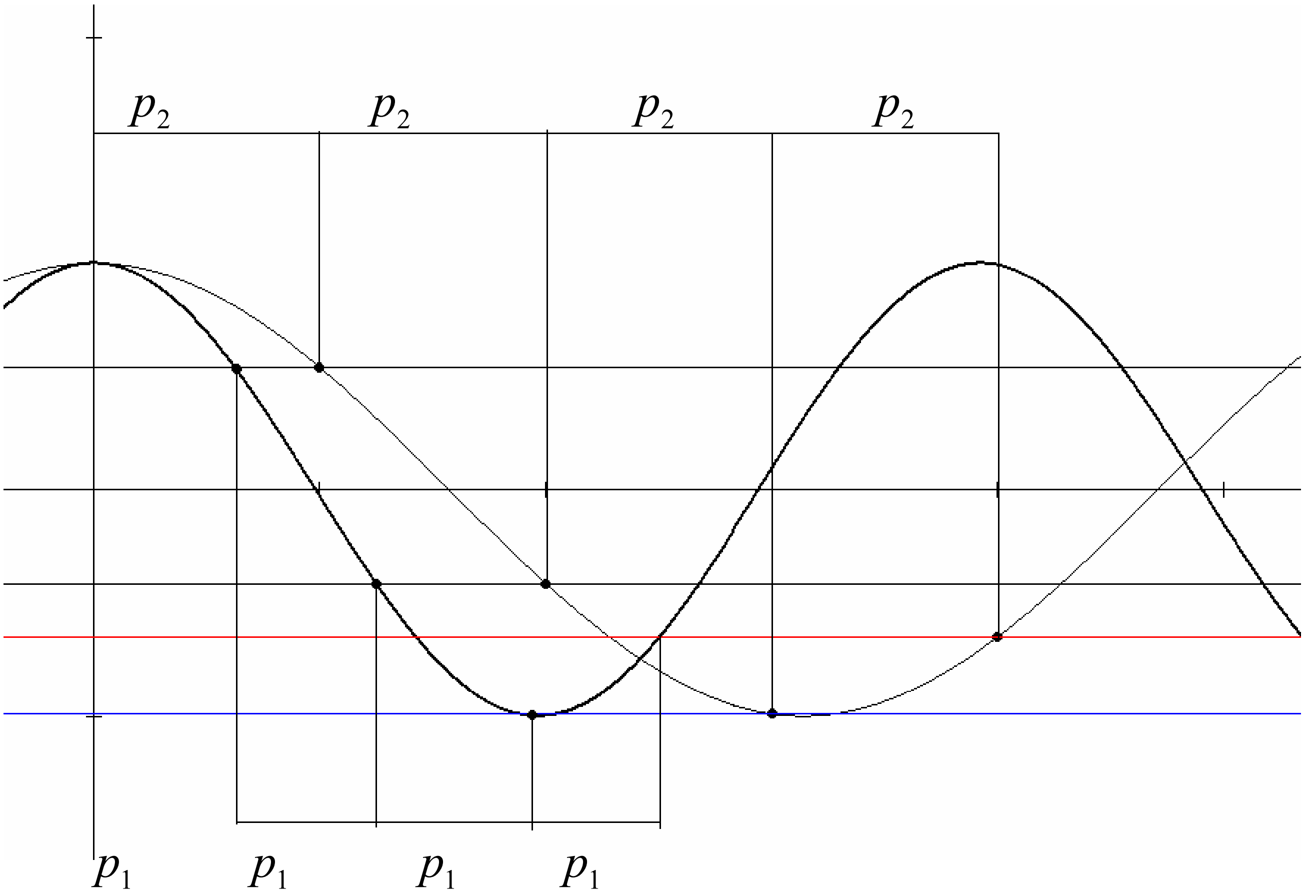
$$(-1)^n a_n\prod_{i=1}^{n}(C_i)^2\sin(pk_i)\sin(2npk_i)\prod_{i=1}^{n-1}\left\{\prod_{j=i+1}^{n}\left[\cos(pk_i)-\cos(pk_j)\right]^2\left[\cos(2npk_i)-\cos(2npk_j)\right]^2\right\}$$

{{1}} {Dim_1 – F2}

*El paso **p** aparece asociado al generador **k**.*

En la **figura 3** se verifica que una secuencia senoidal **S** evaluada en una discretización de paso **p** es equivalente a su evaluación de 1 en 1 multiplicando el coeficiente generador **k** por el paso, con un desplazamiento del origen**.**

Lo que equivale a transformar el generador **k** de la secuencia **S** proporcionalmente al valor de **p**.



<u>Figura 3</u>:
Impacto del paso **p** en la expansión en x de la onda de ***fa*** (orden 1)

Como queda expresado en la identidad trigonométrica, el determinante aniquila al desplazamiento del origen **x** que tal transformación conlleva y la proposición es válida para todo **p** en los reales.

T1.3)

P(1) es Verdadero, se procede por inducción

Sea P(n) verdadero por hipótesis inductiva:

$$\left| M^{2n\times 2n}{}_{(f,x,+)} \right| =$$

$$(-1)^n a_n \prod_{i=1}^{n} (C_i)^2 \sin(k_i)\sin(2nk_i) \prod_{i=1}^{n-1} \left\{ \prod_{j=i+1}^{n} \left[\cos(k_i)-\cos(k_j)\right]^2 \left[\cos(2nk_i)-\cos(2nk_j)\right]^2 \right\}$$

El término (n+1)-ésimo de esta productoria es:

$$(-1)16^{n-1}(C_n)^2 \sin(k_n)\sin\left[2k_n(n+1)\right] \prod_{i=1}^{n-1} \left\{\left[\cos(k_n)-\cos(k_i)\right]\left[\cos\left[2k_i(n+1)\right]-\cos\left[2k_j(n+1)\right]\right]\right\}$$

$$\left\{ \prod_{i=1}^{n} \frac{\sin\left[2k_i(n+1)\right]}{\sin(2nk_i)} \right\} \prod_{i=1}^{n-1} \left\{ \prod_{j=i+1}^{n} \left[\frac{\left[\cos\left[2k_i(n+1)\right]-\cos\left[2k_j(n+1)\right]\right]}{\left[\cos(2nk_i)-\cos(2nk_j)\right]} \right]^2 \right\}$$

Para evaluar P(n + 1) se considera la razón entre el determinante de una matriz de orden (n+1) sobre el determinante de una matriz de orden n:

$$\frac{(-1)^{n+1} a_n \left\{ \prod_{i=1}^{n+1} (C_i)^2 \sin(k_i)\sin\left[2k_i(n+1)\right] \right\} \prod_{i=1}^{n} \left\{ \prod_{j=i+1}^{n+1} \left[\cos(k_i)-\cos(k_j)\right]^2 \left[\cos\left[2k_i(n+1)\right]-\cos\left[2k_j(n+1)\right]\right]^2 \right\}}{(-1)^n a_{n-1} \left\{ \prod_{i=1}^{n} (C_i)^2 \sin(k_i)\sin(2nk_i) \right\} \prod_{i=1}^{n-1} \left\{ \prod_{j=i+1}^{n} \left[\cos(k_i)-\cos(k_j)\right]^2 \left[\cos(2nk_i)-\cos(2nk_j)\right]^2 \right\}}$$

$a_1 = 1;$

$a_n = 16^{n-1} a_{n-1}$

Simplificando:

$$\frac{(-1)a_n\left\{\prod_{i=1}^{n+1}(C_i)^2\sin(k_i)\sin[2k_i(n+1)]\right\}\prod_{i=1}^{n}\left\{\prod_{j=i+1}^{n+1}[\cos(k_i)-\cos(k_j)]^2[\cos[2k_i(n+1)]-\cos[2k_j(n+1)]]^2\right\}}{a_{n-1}\left\{\prod_{i=1}^{n}(C_i)^2\sin(k_i)\sin(2nk_i)\right\}\prod_{i=1}^{n-1}\left\{\prod_{j=i+1}^{n}[\cos(k_i)-\cos(k_j)]^2[\cos(2nk_i)-\cos(2nk_j)]^2\right\}}=$$

$$\frac{(-1)16^{n-1}(C_n)^2\sin(k_n)\prod_{i=1}^{n+1}\sin[2k_i(n+1)]\prod_{i=1}^{n}\left\{\prod_{j=i+1}^{n+1}[\cos[2k_i(n+1)]-\cos[2k_j(n+1)]]^2\right\}}{\prod_{i=1}^{n}\sin(2nk_i)\prod_{i=1}^{n-1}\left\{\prod_{j=i+1}^{n}[\cos(2nk_i)-\cos(2nk_j)]^2\right\}}=$$

$$(-1)16^{n-1}(C_n)^2\sin(k_n)\sin[2k_n(n+1)]\prod_{i=1}^{n-1}\{[\cos(k_n)-\cos(k_i)][\cos[2k_i(n+1)]-\cos[2k_j(n+1)]]\}$$
$$\left\{\prod_{i=1}^{n}\frac{\sin[2k_i(n+1)]}{\sin(2nk_i)}\right\}\prod_{i=1}^{n-1}\left\{\prod_{j=i+1}^{n}\left[\frac{[\cos[2k_i(n+1)]-\cos[2k_j(n+1)]]}{[\cos(2nk_i)-\cos(2nk_j)]}\right]^2\right\}$$

Condiciones remitidas a **<Co.1>**

Que corresponde al término **(n+1)–ésimo** de la productoria. Para todo **n** en naturales, la razón entre el determinante de una matriz asincrónica suma de *fa*+ de orden **(n + 1)** sobre el determinante de una matriz asincrónica suma de *fa*+ de orden **n** siempre es el último término de la productoria que expresa al determinante de la primera.

P(n) implica P(n+1).

Por lo tanto el paso inductivo es válido y la demostración es completa.

Observación: en el enunciado del **Teorema 1** se definía que el determinante de la secuencia de orden **n** dependía sólo del vector generador y del vector multiplicador, esto parecería despreciar el paso **p** de la secuencia, en el caso que este no sea igual a 1.

Pero como se analizó en **T1.2** tomar otro paso **p** distinto de 1 es equivalente a transformar el coeficiente generador del término correspondiente en la *fa+*, con lo cual un cambio en el paso **p** aplica una trasformación en el conjunto generador v_g y la proposición confirma su validez.

3.3) Propiedades del conjunto generador

El **Teorema 1** confirma que el determinante de una matriz cuyos términos corresponden a una secuencia de funciones asincrónicas de orden **n**, siendo el largo de la secuencia de por lo menos $4n^2$ no depende de la posición de la secuencia, sino exclusivamente de los conjuntos generador y multiplicador v_g y v_m respectivamente.

Se da por sobreentendido que la disposición de los términos de la matriz corresponden al orden de los mismos en la secuencia, es decir es un conjunto ordenado; en todo el trabajo optamos por un ordenamiento en columnas, pero obviamente las proposiciones siguen siendo validas si se distribuye la secuencia en filas, dada la identidad del determinante para una matriz y su traspuesta.

Esta invariabilidad del determinante respecto a la posición de la secuencia permitiría deducir las componentes de los vectores generadores.

Sin embargo, la expresión de esta función es tan compleja, que salvo para dimensiones pequeñas se hace prácticamente intratable.

A su vez, es difícil discernir entre los coeficientes ponderados del vector multiplicador y los coeficientes del conjunto generador.

Pero como se mencionó anteriormente, existen operaciones que permite acotar el valor del vector generador. Su generalización se establece a continuación.

3.4) Teorema 2

Determinante de la Suma de dos Matrices consecutivas de una Secuencia Asincrónica Suma

$$\left| M^{2n\times 2n}{}_{(f,x+m,+)} + M^{2n\times 2n}{}_{(f,x,+)} \right|$$

El determinante de la Suma de dos Matrices consecutivas, ambas asociadas a una misma secuencia de la función asíncrona *fa*+ de orden n (n natural) para una secuencia de cardinalidad $(2n)^2$ + m es dependiente de los coeficientes multiplicadores y de sus coeficientes generadores y del paso de desplazamiento m que referencia la posición inicial de la segunda matriz respecto a la primera; y solamente de estos.

Su expresión es el producto del determinante para la matriz asincrónica asociada a los vectores generadores y multiplicadores de la *fa+, tal cual se verificó en la ecuación* **< 1 >** por la productoria:

$$4^n \prod_{i=1}^{n} \cos^2\left[\frac{mk_i}{2}\right]$$

$$m \in \Re_{\neq 0};$$

El resto de las condiciones corresponden a < **Co.1** >

Donde **m** es el desplazamiento del origen de la *fa*+ de la segunda matriz respecto a la primera

Su forma general es:

$$\left| M^{2n\times 2n}{}_{(f,x,+)} + M^{2n\times 2n}{}_{(f,x+m,+)} \right| =$$

$$\left| \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} C_i \cos(xk_i) + \sum_{i=1}^{n} C_i \cos[(x+m)k_i] & & \\ \sum_{i=1}^{n} C_i \cos[(x+1)k_i] + \sum_{i=1}^{n} C_i \cos[(x+m+1)k_i] & & \\ \sum_{i=1}^{n} C_i \cos[(x+2)k_i] + \sum_{i=1}^{n} C_i \cos[(x+m+2)k_i] & & \\ \cdots & & \\ \cdots & & \sum_{i=1}^{n} C_i \cos[(x+n)k_i] + \sum_{i=1}^{n} C_i \cos[(x+m+n)k_i] \end{bmatrix}^{2n\times 2n} \right| =$$

$$\boxed{\begin{gathered} (4^n)(-1)^n a_n \left\{ \prod_{i=1}^{n} (C_i)^2 \cos^2\left[\frac{mk_i}{2}\right] \sin(k_i)\sin(2nk_i) \right\} \prod_{i=1}^{n-1} \left\{ \prod_{j=i+1}^{n} [\cos(k_i) - \cos(k_j)]^2 [\cos(2nk_i) - \cos(2nk_j)]^2 \right\} = \\ = 4^n \left| M^{2n\times 2n}{}_{(f,x,+)} \right| \prod_{i=1}^{n} \cos^2\left[\frac{mk_i}{2}\right] \end{gathered}}$$

< 2 >

Demostración:

T2.1) – Se demuestra para **n = 1**:

$$\left|M^{2\times 2}{}_{(f,x,+)} + M^{2\times 2}{}_{(f,x+m,+)}\right| =$$

$$\begin{vmatrix} C\cos[xk]+C\cos[(x+m)k] & C\cos[(x+2)k]+C\cos[(x+m+2)k] \\ C\cos[(x+1)k]+C\cos[(x+m+1)k] & C\cos[(x+3)k]+C\cos[(x+m+3)k] \end{vmatrix} =$$

$$C^2 \begin{vmatrix} 2\cos\left[\frac{(2x+m)k}{2}\right]\cos\left[\frac{mk}{2}\right] & 2\cos\left[\frac{(2x+m+4)k}{2}\right]\cos\left[\frac{mk}{2}\right] \\ 2\cos\left[\frac{(2x+m+2)k}{2}\right]\cos\left[\frac{mk}{2}\right] & 2\cos\left[\frac{(2x+m+6)k}{2}\right]\cos\left[\frac{mk}{2}\right] \end{vmatrix} =$$

$$4C^2\cos^2\left[\frac{mk}{2}\right] \begin{vmatrix} \cos\left[\frac{(2x+m)k}{2}\right] & \cos\left[\frac{(2x+m+4)k}{2}\right] \\ \cos\left[\frac{(2x+m+2)k}{2}\right] & \cos\left[\frac{(2x+m+6)k}{2}\right] \end{vmatrix} =$$

$$2C^2\cos^2\left[\frac{mk}{2}\right]\left\{\cos\left[\frac{-6k}{2}\right]+\cos\left[\frac{(4x+2m+6)k}{2}\right]-\cos\left[\frac{-2k}{2}\right]-\cos\left[\frac{(4x+2m+6)k}{2}\right]\right\} =$$

$$2C^2\cos^2\left[\frac{mk}{2}\right]\left\{\cos\left[\frac{-6k}{2}\right]-\cos\left[\frac{-2k}{2}\right]\right\} = 4C^2\cos^2\left[\frac{mk}{2}\right]\left\{\sin\left[\frac{-8k}{4}\right]\sin\left[\frac{-4k}{4}\right]\right\} =$$

$$\boxed{\begin{aligned} &= 4C^2\cos^2\left[\frac{mk}{2}\right]\sin(k)\sin(2k) \\ &= 4^1\left|M^{2\times 2}{}_{(x,+)}\right|\prod_{i=1}^{1}\cos^2\left[\frac{mk_i}{2}\right] \end{aligned}}$$

Que es la expresión de orden 1 de la ecuación < **2** > por la productoria de 1 a 1 de

$$4^n\cos^2\left[\frac{mk_i}{2}\right]$$

P (1) es verdadero. Se procede por inducción.

Sea P(n) verdadero por hipótesis inductiva:

$$\left| M^{2n\times 2n}{}_{(f,x,+)} + M^{2n\times 2n}{}_{(f,x+m,+)} \right| =$$

$$= (4^n) a_n \prod_{i=1}^{n} (C_i)^2 \cos^2\left[\frac{mk_i}{2}\right] \sin(k_i)\sin(2nk_i) \prod_{i=1}^{n-1} \left\{ \prod_{j=i+1}^{n} \left[\cos(k_i) - \cos(k_j)\right]^2 \left[\cos(2nk_i) - \cos(2nk_j)\right]^2 \right\}$$

Se expresa **P(n + 1):**

$$\left| M^{2(n+1)\times 2(n+1)}{}_{(f,x,+)} + M^{2(n+1)\times 2(n+1)}{}_{(f,x+m,+)} \right| =$$

$$= (4^{n+1}) a_n \prod_{i=1}^{n+1} (C_i)^2 \cos^2\left[\frac{mk_i}{2}\right] \sin(k_i)\sin(2nk_i) \prod_{i=1}^{n} \left\{ \prod_{j=i+1}^{n+1} \left[\cos(k_i) - \cos(k_j)\right]^2 \left[\cos(2nk_i) - \cos(2nk_j)\right]^2 \right\}$$

$$= (4^{n+1}) \prod_{i=1}^{n+1} \cos^2\left[\frac{mk_i}{2}\right] \left| M^{2(n+1)\times 2(n+1)}{}_{(f,x,+)} \right|$$

$$= 4(4^n)\cos^2\left[\frac{mk_{n+1}}{2}\right] \prod_{i=1}^{n} \cos^2\left[\frac{mk_i}{2}\right] \left| M^{2(n+1)\times 2(n+1)}{}_{(f,x,+)} \right| \qquad \boxed{\mathbf{< A >}}$$

El **Teorema 1** justifica el determinante de una matriz asincrónica suma de orden **(n + 1),** y la Expresión < A > es el producto de este determinante por la productoria

$(4^{n+1}) \prod_{i=1}^{n+1} \cos^2\left[\frac{mk_i}{2}\right]$. **{{1}} {Dim_2 – S4}**

P(n) implica P(n+1).

Por lo tanto el paso inductivo es válido y la demostración es completa.

3.5) Teorema 3

Determinante de la Diferencia de dos Matrices consecutivas de una misma Secuencia Asincrónica Suma

$$\left| M^{2n\times 2n}{}_{(f,x+m,+)} - M^{2n\times 2n}{}_{(f,x,+)} \right|$$

El determinante de la Resta de dos Matrices consecutivas, ambas asociadas a una misma secuencia de la función asíncrona $fa+$ de orden n (n natural) para una secuencia de cardinalidad $(2n)^2 + \mathrm{m}$ es dependiente de los coeficientes multiplicadores y de sus coeficientes generadores y del paso de desplazamiento m que referencia la posición inicial de la segunda matriz respecto a la primera; y solamente de estos.

Su expresión es el producto del determinante para la matriz asincrónica suma asociada a los vectores generadores y multiplicadores de la $fa+$, por la productoria:

$$4^n \prod_{i=1}^{n} \sin^2\left[\frac{mk_i}{2}\right]$$

$$m \in \Re_{\neq 0};$$

El resto de las condiciones corresponden a <Co.1>

Donde **m** es el desplazamiento del origen de la $fa+$ de la segunda matriz respecto a la primera

Su forma general es:

$$\left| M^{2n\times 2n}{}_{(f,x+m,+)} - M^{2n\times 2n}{}_{(f,x,+)} \right| =$$

$$\left| \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} C_i \cos(xk_i) + \sum_{i=1}^{n} C_i \cos[(x+m)k_i] & & \\ \sum_{i=1}^{n} C_i \cos[(x+1)k_i] + \sum_{i=1}^{n} C_i \cos[(x+m+1)k_i] & & \\ \sum_{i=1}^{n} C_i \cos[(x+2)k_i] + \sum_{i=1}^{n} C_i \cos[(x+m+2)k_i] & & \\ \qquad\qquad .... & & \\ \qquad\qquad .... & & \sum_{i=1}^{n} C_i \cos[(x+n)k_i] + \sum_{i=1}^{n} C_i \cos[(x+m+n)k_i] \end{bmatrix}^{2n\times 2n} \right| =$$

$$\boxed{\begin{gathered} (-1)^n (4^n) a_n \prod_{i=1}^{n} (C_i)^2 \sin^2\left[\frac{mk_i}{2}\right] \sin(k_i)\sin(2nk_i) \prod_{i=1}^{n-1} \left\{ \prod_{j=i+1}^{n} [\cos(k_i) - \cos(k_j)]^2 [\cos(2nk_i) - \cos(2nk_j)]^2 \right\} = \\ = 4^n \left| M^{2n\times 2n}{}_{(f,x,+)} \right| \prod_{i=1}^{n} \sin^2\left[\frac{mk_i}{2}\right] \end{gathered}}$$

< 3 >

Demostración:

T3.1) – Se demuestra para n = 1:

$$C^2\begin{vmatrix} \cos[(n+p)k]-\cos[nk] & \cos[(n+p+2)k]-\cos[(n+2)k] \\ \cos[(n+p+1)k]-\cos[(n+1)k] & \cos[(n+p+3)k]-\cos[(n+3)k] \end{vmatrix}=$$

$$C^2\begin{vmatrix} -2\sin\left[\frac{(2n+p)k}{2}\right]\sin\left[\frac{pk}{2}\right] & -2\sin\left[\frac{(2n+p+4)k}{2}\right]\sin\left[\frac{pk}{2}\right] \\ -2\sin\left[\frac{(2n+p+2)k}{2}\right]\sin\left[\frac{pk}{2}\right] & -2\sin\left[\frac{(2n+p+6)k}{2}\right]\sin\left[\frac{pk}{2}\right] \end{vmatrix}=$$

$$C^2 4\sin^2\left[\frac{pk}{2}\right]\begin{vmatrix} \sin\left[\frac{(2n+p)k}{2}\right] & \sin\left[\frac{(2n+p+4)k}{2}\right] \\ \sin\left[\frac{(2n+p+2)k}{2}\right] & \sin\left[\frac{(2n+p+6)k}{2}\right] \end{vmatrix}=$$

$$2C^2\sin^2\left[\frac{pk}{2}\right]\left\{\cos\left[\frac{-6k}{2}\right]-\cos\left[\frac{(4n+2p+6)k}{2}\right]-\cos\left[\frac{-2k}{2}\right]+\cos\left[\frac{(4n+2p+6)k}{2}\right]\right\}=$$

$$2C^2\sin^2\left[\frac{pk}{2}\right]\left\{\cos\left[\frac{-6k}{2}\right]-\cos\left[\frac{-2k}{2}\right]\right\}=-4C^2\sin^2\left[\frac{pk}{2}\right]\left\{\sin\left[\frac{-8k}{4}\right]\sin\left[\frac{-4k}{4}\right]\right\}=$$

Correspondiente a la expresión de orden 1 de:

$$(4^n)(-1)^n a_n\prod_{i=1}^{n}(C_i)^2\sin^2\left[\frac{mk_i}{2}\right]\sin(k_i)\sin(2nk_i)\prod_{i=1}^{n-1}\left\{\prod_{j=i+1}^{n}\left[\cos(k_i)-\cos(k_j)\right]^2\left[\cos(2nk_i)-\cos(2nk_j)\right]^2\right\}$$

$$=4^n\left|M^{2n\times 2n}{}_{(f,x,+)}\right|\prod_{i=1}^{n}\sin^2\left[\frac{mk_i}{2}\right]$$

<u>{{1}} {Dim_2 – Z4}</u>

El resto de la demostración es análoga a T2.

3.6) Corolarios de los Teoremas 2 y 3

C.2.1)

El cociente del determinante de la **diferencia** de dos Matrices consecutivas, ambas asociadas a una misma secuencia de la función asíncrona *fa*+ de orden n (n natural) para una secuencia de cardinalidad $(2n)^2$ + m, sobre el determinante de la primera matriz es igual a 4^n por la productoria de 1 a n del cuadrado del seno del medio producto de los coeficientes generadores k por el desplazamiento m. (m entero)[2]

Su expresión es:

$$\frac{\left|M^{2n\times 2n}{}_{(f,x+m,+)} - M^{2n\times 2n}{}_{(f,x,+)}\right|}{\left|M^{2n\times 2n}{}_{(f,x,+)}\right|} = 4^n \prod_{i=1}^{n} \sin^2\left[\frac{mk_i}{2}\right]$$

< 4 >

{{1}} {Dim_2 – S4}

[2] Existe cierta periodicidad en las funciones seno y coseno, ya que $\cos(k) = \cos(k \pm 2s\pi); s \in \mathbb{Z}$, periodicidad cuyo impacto en las funciones asincrónicas se examina más adelante.

C.2.2)

El cociente del determinante de la **suma** de dos Matrices consecutivas, ambas asociadas a una misma secuencia de la función asíncrona *fa*+ de orden n (n natural) para una secuencia de cardinalidad $(2n)^2$ + m, sobre el determinante de la primera matriz es igual a la 4^n por productoria de 1 a n del cuadrado del coseno del medio producto de los coeficientes generadores k por el desplazamiento m

Su expresión es:

$$\frac{\left| M^{2n\times 2n}{}_{(f,x+m,+)} + M^{2n\times 2n}{}_{(f,x,+)} \right|}{\left| M^{2n\times 2n}{}_{(f,x,+)} \right|} = 4^n \prod_{i=1}^{n} \cos^2\left[\frac{mk_i}{2}\right]$$

< 5 >

{{1}} {Dim_2 – Z4}

C.2.3)

El cociente del determinante de la resta de dos matrices consecutivas, ambas asociadas a una misma secuencia de la función asíncrona $fa+$ de orden **n** (n natural) para una secuencia de cardinalidad $(2n)^2 +$ **m**, sobre el determinante de la de la suma de las mismas matrices es igual a la productoria de 1 a n del cuadrado de la tangente del medio producto de los coeficientes generadores k por el desplazamiento m

Su expresión es:

$$\frac{\left| M^{2n\times 2n}{}_{(f,x+m,+)} - M^{2n\times 2n}{}_{(f,x,+)} \right|}{\left| M^{2n\times 2n}{}_{(f,x+m,+)} + M^{2n\times 2n}{}_{(f,x,+)} \right|} = \prod_{i=1}^{n} \tan^2\left[\frac{mk_i}{2}\right]$$

< 6 >

Los **Corolarios 1 a 3** permiten, por medio de las operaciones mencionadas, extraer la productoria de los senos, cosenos y tangentes del cuadrado del medio producto del coeficiente de desplazamiento **m** por el valor del termino generador **k**. En esta operación se filtra los componentes del vector multiplicador asociado a cada término de $fa+$, como así también la posición **x** de origen de la secuencia[3].

[3] De igual modo para orígenes **x** distintos para las subsecuencias.

3.7) Extensión a función asincrónica producto *(fa*)*

Existe la posibilidad de expresión de una secuencia de función asincrónica producto como si fuera una *fa+*.[4]

La base de esta expresión se basa en la identidad trigonométrica:

$$\cos(k_1)\cos(k_2) = \frac{1}{2}\left\{\cos(k_1 - k_2) + \cos(k_1 + k_2)\right\}$$

Por ejemplo, para un producto de tres cosenos distintos:

$$\cos(k_1)\cos(k_2)\cos(k_3) =$$
$$\frac{1}{2}\left\{\cos(k_1 - k_2) + \cos(k_1 + k_2)\right\}\cos(k_3)$$
$$\frac{1}{2}\left\{\cos(k_1 - k_2)\cos(k_3) + \cos(k_1 + k_2)\cos(k_3)\right\} =$$
$$\frac{1}{4}\left\{\cos(k_1 - k_2 - k_3) + \cos(k_1 - k_2 + k_3)\cos(k_1 + k_2 - k_3) + \cos(k_1 + k_2 + k_3)\right\}$$

y en general:

$$\boxed{\prod_{i=1}^{n} \cos(k_i) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \cos\left[k_1 + \sum_{j=2}^{n} (-1)^s k_j\right]}$$

< 7 >

A partir de esta relación se establece el siguiente:

[4] Notemos no obstante que el **orden** de una y otra varia

Lema 1

- Relación de una expresión de *fa*+ con *fa**

Sea una *fa de orden n, la secuencia generada por la misma, de cardinalidad 2^{n-1}, entonces el determinante de la matriz asincrónica producto asociada a esta secuencia, cumple las proposiciones de los teoremas 1 a 3, a condición de trasformar los coeficientes generadores de acuerdo a la ecuación <7>, *y de que ninguno de ellos sea expresable como cualquier otro coeficiente generador mas el doble de un entero por Pi.***

Simbólicamente:

$$\left| M^{2^n \times 2^n}{}_{(g,x,*)} \right| = \left| C^{2^n} \begin{bmatrix} \prod_{i=1}^{n} \cos(xk_i) & & \\ \prod_{i=1}^{n} \cos[(x+1)k_i] & & \\ \prod_{i=1}^{n} \cos[(x+2)k_i] & & \\ \cdots\cdot & & \\ \cdots\cdot & & \prod_{i=1}^{n} \cos[(x+2^n)k_i] \end{bmatrix}^{2^n \times 2^n} \right| =$$

$$\boxed{(-1)^{(2^n)} a_n C^{(2^n)} \left\{ \prod_{i=1}^{2^{n-1}} \sin(\kappa_i)\sin(2^n \kappa_i) \right\} \prod_{i=1}^{2^{n-1}-1} \left\{ \prod_{j=i+1}^{2^{n-1}} [\cos(\kappa_i) - \cos(\kappa_j)]^2 [\cos(2^n \kappa_i) - \cos(2^n \kappa_j)]^2 \right\}}$$

< 8 >

Donde:

$$x \in \Re \ ;$$

$$k \ , C \ , m \ \in \ \Re_{\neq 0} \ ;$$

$$k_{i+1} \neq k_i + 2 s \pi \ ;$$

$$\kappa_i = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} k_1 + \sum_{i=1}^{n} (-1)^s k_i$$

$$\kappa_{i+1} \neq \kappa_i + 2 s \pi \ ;$$

$$s \in \mathrm{Z}$$

$$n \in \mathrm{N}$$

Se deduce inmediatamente de **< 7 >** y del **Teorema 1.**

3.8) Estudio especial de *fa*+ de orden 1, 2 y 3

A esta altura del presente trabajo debieran quedar claras las diferencias con ramas de las matemáticas que a primera vista pudieran parecer concurrentes con el mismo. Por ejemplo, el análisis armónico, las transformadas (discreta y rápida) de Fourier, las ondículas o *wavelets*.

Si tuviéramos que sintetizar la diferencia de concepto, diríamos que las técnicas mencionadas son una transformación (sea de un intervalo continuo o de un muestreo), y de esta transformación se obtienen las frecuencias implícitas, siendo ellas múltiplos.

Las funciones senoidales asincrónicas no son transformaciones (*'que llevan del dominio del tiempo al de la frecuencia',* como se describe usualmente en ingeniería), sino que son la combinación lineal de ondas senoidales cuyas frecuencias no son múltiplos entre sí (de aquí la '**asincronía**').

No implican una aproximación en frecuencias, sino que directamente **son** la expresión de una suma de frecuencias asociadas a sendos coeficientes de ponderación.

Es nuestra ***'profesión de fe'***.[5]

En líneas generales no hay un método para aislar los coeficientes generadores definitivo, que no implique una iteración de '**fuerza bruta**' en su hallazgo.

Así tampoco criterios para determinar los coeficientes multiplicadores, o el origen **x** de cada subsecuencia.

No obstante, a continuación se desarrollan criterios limitados para secuencias de *fa*+ de órdenes 1, 2 y 3.

[5] Sin embargo, no hay en general, un criterio para establecer *si una secuencia es o no expresión de una función senoidal asincrónica*, mas allá de ***fa* de orden 1** (ver página 30), al momento de presentación de este trabajo

Propiedades de *fa* de orden 1

Consideremos una secuencia numérica **<a, b, c, d, e>,** formemos la matriz**:**

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

Tomamos en orden secuencial los valores siguientes y formamos:

$$\begin{bmatrix} b & d \\ c & e \end{bmatrix}$$

Si esto es una fa+ de orden 1, el determinante de ambas matrices es igual, lo que nos permite deducir **e** como una relación interna de los primeros cuatro términos dados:

$$e = \frac{ad - bc + cd}{b}$$

Por **C.1** y **C.2** Para una *fa*+ **de orden 1** se debe cumplir:

$$\cos^2\left[\frac{k}{2}\right] - \sin^2\left[\frac{k}{2}\right] = \cos(k) =$$

$$\frac{1}{4}\left\{\frac{\left|M^{2\times2}{}_{(f,x+1,+)} + M^{2\times2}{}_{(f,x,+)}\right|}{\left|M^{2\times2}{}_{(f,x,+)}\right|} - \frac{\left|M^{2\times2}{}_{(f,x+1,+)} - M^{2\times2}{}_{(f,x,+)}\right|}{\left|M^{2\times2}{}_{(f,x,+)}\right|}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(b+a)(e+d)-(c+b)(d+c)-(b-a)(e-d)+(c-b)(d-c)}{4(ad-bc)} =$$

$$\frac{ae-c^2}{2(ad-bc)} = \frac{a(ad-bc+cd)-bc^2}{2b(ad-bc)} = \frac{a+c}{2b}$$

$$\boxed{\cos(k) = \frac{a+c}{2b}}$$

< 9 >

{{1}} {Dim_1 – B7}

Por la relación de **Tchebichev**:

$$2\cos\left[(x+1)k\right]\cos(k) - \cos(xk) = \cos\left[(x+2)k\right]$$

$$2d\left[\frac{a+c}{2b}\right] - c = e$$

$$d\left[\frac{a+c}{b}\right] - c = e \Leftrightarrow \frac{e+c}{d} = \left[\frac{a+c}{b}\right]$$

$$c\left[\frac{a+c}{b}\right] - b = d \Leftrightarrow \frac{d+b}{c} = \left[\frac{a+c}{b}\right]$$

$$\boxed{c\left[\frac{a+c}{b}\right] - b = d}$$

< 10 >

{{1}} {Dim_1 – E3}

Existe una relación lineal entre los términos de la secuencia de fa de orden 1. Esta relación se cumple para distintos pasos.

Por ejemplo, si tomamos una matriz de **4x4** formada así:

$$C\begin{bmatrix} \cos(xk_1) & \cos\left[(x+4)k_1\right] & \cos\left[(x+8)k_1\right] & \cos\left[(x+12)k_1\right] \\ \cos\left[(x+1)k_1\right] & \cos\left[(x+5)k_1\right] & \cos\left[(x+9)k_1\right] & \cos\left[(x+13)k_1\right] \\ \cos\left[(x+2)k_1\right] & \cos\left[(x+6)k_1\right] & \cos\left[(x+10)k_1\right] & \cos\left[(x+14)k_1\right] \\ \cos\left[(x+3)k_1\right] & \cos\left[(x+7)k_1\right] & \cos\left[(x+11)k_1\right] & \cos\left[(x+15)k_1\right] \end{bmatrix}$$

Que sería ***'la mitad'*** de una $fa+$ de orden 2, veremos que en cada fila, columna o diagonal se cumple que el cuarto término de la fila, columna o diagonal es el producto del tercero por la suma del 1ero más el tercero, sobre el segundo, todo esto menos una vez el segundo término:[6]

Por ejemplo:

$$\cos\left[(x+12)k_1\right] = \cos\left[(x+8)k_1\right]\frac{\left(\cos(xk_1)+\cos\left[(x+8)k_1\right]\right)}{\cos\left[(x+4)k_1\right]} - \cos\left[(x+4)k_1\right]$$

$$\cos\left[(x+15)k_1\right] = \cos\left[(x+10)k_1\right]\frac{\left(\cos(xk_1)+\cos\left[(x+10)k_1\right]\right)}{\cos\left[(x+5)k_1\right]} - \cos\left[(x+5)k_1\right]$$

[6] Sigue la forma $c\left[\frac{a+c}{b}\right] - b = d$ para cualquier fila, columna o diagonal. En general cualquier secuencia simple se genera a partir de sus dos primeros términos. Esta relación se cumple para pasos discrecionales, en cualquier secuencia de orden 1

Obtención de cos(k) para *fa*+ de orden 1 a partir de dos valores consecutivos de la secuencia

Por lo anterior, el espacio matricial que satisface la relación **<10 >** cumple:

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & c\left[\dfrac{a+c}{b}\right]-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2b\cos(k)-a \\ b & 2\cos(k)\left[2b\cos(k)-a\right]-b \end{bmatrix} = -sen(k)sen(2k) \Leftrightarrow$$

$$4ab\cos^2(k)-2a^2\cos(k)-ab-2b^2\cos(k)+ab=\frac{1}{2}\left[\cos(3k)-\cos(k)\right]\Leftrightarrow$$

$$4ab\cos^2(k)-2\cos(k)\left[a^2+b^2-\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}\cos(3k)\Leftrightarrow$$

$$8ab\cos^2(k)-4\cos(k)\left[a^2+b^2-\frac{1}{2}\right]=4\cos^3(k)-3\cos(k)\Leftrightarrow$$

$$2ab\cos^2(k)-\cos(k)\left[a^2+b^2-1\right]=\cos^3(k)\Leftrightarrow$$

$$\cos(k)\left[\cos^2(k)-2ab\cos(k)+\left[a^2+b^2-1\right]\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\cos^2(k)-2ab\cos(k)+\left[a^2+b^2-1\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\cos(k)=\frac{2ab\pm\sqrt{4a^2b^2-4(a^2+b^2-1)}}{2}$$

$$\cos(k)=ab\pm\sqrt{a^2b^2+1-a^2-b^2}=ab\pm\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}$$

Y por tanto:

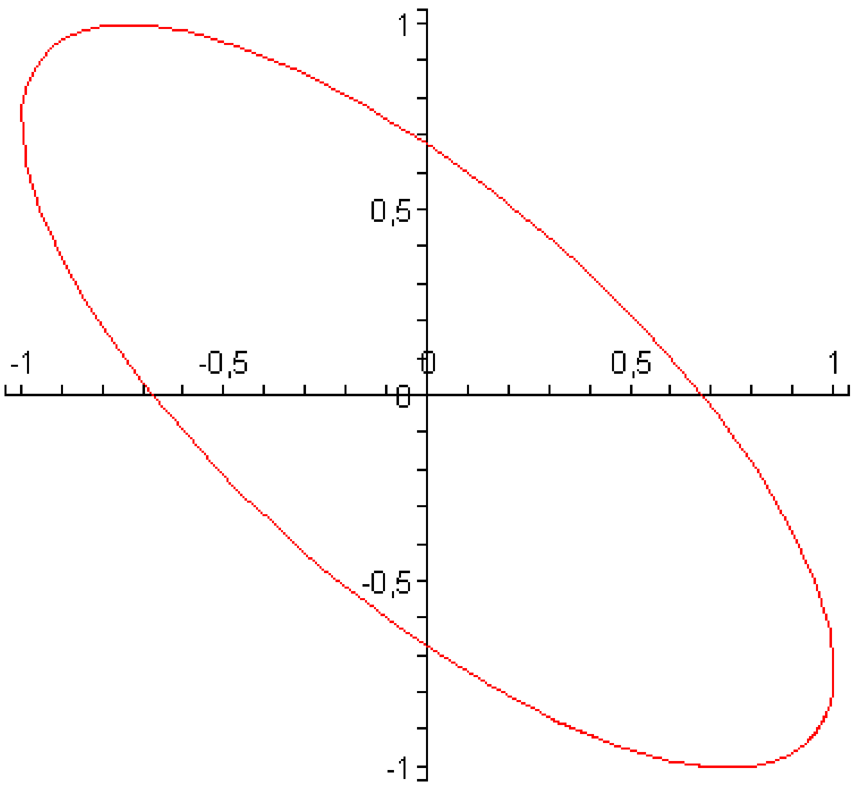
$$\boxed{\cos(k)=ab\pm\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}}$$

< 11 >

{{1}} {Dim_1 – E35}

La representación paramétrica del vector $\begin{bmatrix} \cos(xk) \\ \cos[(x+1)k] \end{bmatrix}$ corresponde a un **elipse rotado**[7], como se muestra en la **figura 4**

```
plot([cos(2.4 * t), cos(2.4 * (t+1)), t=0..Pi]);
```



<u>Figura 4</u>:
Ejemplo de representación paramétrica de ***fa*** (orden 1)

[7] La matriz que evoluciona un vector de esta forma al siguiente es

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 2\cos(k) \\ -2\cos(k) & 4\cos(k)^2 - 1 \end{bmatrix}$$

Hay un estudio particular sobre la misma, que excede a este trabajo.

Puede generalizarse la ecuación **<11>** de esta forma:

$$\boxed{\cos(k) = s_x s_{x+1} \pm \sqrt{(s_x{}^2 - 1)(s_{x+1}{}^2 - 1)}}$$

< 12 >

Donde s_x es el término **x** de la secuencia. Esto completa el criterio para determinar si una secuencia se inscribe en $fa+$ de orden 1.

Como era de esperar, no cualquier secuencia acotada superior e inferiormente puede expresarse como una secuencia correspondiente a una $fa+$ de orden 1.[8]

[8] Existe una rotación que lleva '**casi**' cualquier secuencia a cumplir la condición **<10>,** *pero a costa de desplazar y escalar la secuencia*. El ángulo de rotación se define por:

$$\arcsin\left\{\frac{(a^2+c^2)\cos\left[arctg\left[\frac{-c}{a}\right]-arctg\left[\frac{a+c}{c-a}\right]\right]\pm(b^2+d^2)\cos\left[arctg\left[\frac{d}{b}\right]-arctg\left[\frac{b+d}{d-b}\right]\right]}{\sqrt{\begin{array}{l}(a^2+c^2)^2+(b^2+d^2)^2\\ \pm 2(a^2+c^2)(b^2+d^2)\\ \left\{\begin{array}{l}\cos\left[arctg\left[\frac{-c}{a}\right]+arctg\left[\frac{a+c}{c-a}\right]\right]\cos\left[arctg\left[\frac{d}{b}\right]+arctg\left[\frac{b+d}{d-b}\right]\right]+\\ \sin\left[arctg\left[\frac{-c}{a}\right]+arctg\left[\frac{a+c}{c-a}\right]\right]\sin\left[arctg\left[\frac{d}{b}\right]+arctg\left[\frac{b+d}{d-b}\right]\right]\end{array}\right\}\end{array}}}\right\}\pm arctg\left[\frac{-\left\{(a^2+c^2)\cos\left[arctg\left[\frac{-c}{a}\right]+arctg\left[\frac{a+c}{c-a}\right]\right]\pm(b^2+d^2)\cos\left[arctg\left[\frac{d}{b}\right]+arctg\left[\frac{b+d}{d-b}\right]\right]\right\}}{\left\{(a^2+c^2)\sin\left[arctg\left[\frac{-c}{a}\right]+arctg\left[\frac{a+c}{c-a}\right]\right]\pm(b^2+d^2)\sin\left[arctg\left[\frac{d}{b}\right]+arctg\left[\frac{b+d}{d-b}\right]\right]\right\}}\right]=\pm 2\alpha$$

(ver demostración en **rotación.doc**)

<u>Propiedades de *fa*+ de orden 2</u>

Los corolarios **C1, C.2,** Establecen que**:**

$$\begin{cases} \dfrac{\left| M^{2n\times 2n}_{(f,x+m,+)} + M^{2n\times 2n}_{(f,x,+)} \right|}{\left| M^{2n\times 2n}_{(f,x,+)} \right|} = 16\prod_{i=1}^{n}\cos^2\left[\dfrac{mk_i}{2}\right] \\ \dfrac{\left| M^{2n\times 2n}_{(f,x+m,+)} - M^{2n\times 2n}_{(f,x,+)} \right|}{\left| M^{2n\times 2n}_{(f,x,+)} \right|} = 16\prod_{i=1}^{n}\sin^2\left[\dfrac{mk_i}{2}\right] \end{cases}$$

{{1}} {Dim_2 – S4}

Especializando para orden 2 (n = 2), se justifican las siguientes operaciones:

$$\sqrt{\frac{\left| M^{2n\times 2n}_{(f,x+m,+)} + M^{2n\times 2n}_{(f,x,+)} \right|}{16\left| M^{2n\times 2n}_{(f,x,+)} \right|}} + \sqrt{\frac{\left| M^{2n\times 2n}_{(f,x+m,+)} - M^{2n\times 2n}_{(f,x,+)} \right|}{16\left| M^{2n\times 2n}_{(f,x,+)} \right|}} =$$

$$\cos\left[\frac{mk_1}{2}\right]\cos\left[\frac{mk_2}{2}\right] + \sin\left[\frac{mk_1}{2}\right]\sin\left[\frac{mk_2}{2}\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left\{\cos\left[\frac{m(k_2-k_1)}{2}\right] + \cos\left[\frac{m(k_2+k_1)}{2}\right]\right\} + \frac{1}{2}\left\{\cos\left[\frac{m(k_2-k_1)}{2}\right] - \cos\left[\frac{m(k_2+k_1)}{2}\right]\right\}$$

$$\cos\left[\frac{m(k_2-k_1)}{2}\right] \Rightarrow$$

$$m(k_2-k_1) = 2\arccos\left\{\sqrt{\frac{\left| M^{2n\times 2n}_{(f,x+m,+)} + M^{2n\times 2n}_{(f,x,+)} \right|}{\left| M^{2n\times 2n}_{(f,x,+)} \right|}} + \sqrt{\frac{\left| M^{2n\times 2n}_{(f,x+m,+)} - M^{2n\times 2n}_{(f,x,+)} \right|}{\left| M^{2n\times 2n}_{(f,x,+)} \right|}}\right\}$$

Análogamente:

$$m(k_2+k_1) = 2\arccos\left\{\sqrt{\frac{\left| M^{2n\times 2n}_{(x+m,+)} + M^{2n\times 2n}_{(x,+)} \right|}{\left| M^{2n\times 2n}_{(x,+)} \right|}} - \sqrt{\frac{\left| M^{2n\times 2n}_{(x+m,+)} - M^{2n\times 2n}_{(x,+)} \right|}{\left| M^{2n\times 2n}_{(x,+)} \right|}}\right\}$$

con lo cual se definen los valores de los coeficientes **k** sub 1 y 2:

$$m(k_1)=\arccos\left\{\sqrt{\frac{\left|M^{2n\times 2n}{}_{(x+m,+)}+M^{2n\times 2n}{}_{(x,+)}\right|}{\left|M^{2n\times 2n}{}_{(x,+)}\right|}}-\sqrt{\frac{\left|M^{2n\times 2n}{}_{(x+m,+)}-M^{2n\times 2n}{}_{(x,+)}\right|}{\left|M^{2n\times 2n}{}_{(x,+)}\right|}}\right\}-$$
$$\arccos\left\{\sqrt{\frac{\left|M^{2n\times 2n}{}_{(x+m,+)}+M^{2n\times 2n}{}_{(x,+)}\right|}{\left|M^{2n\times 2n}{}_{(x,+)}\right|}}+\sqrt{\frac{\left|M^{2n\times 2n}{}_{(x+m,+)}-M^{2n\times 2n}{}_{(x,+)}\right|}{\left|M^{2n\times 2n}{}_{(x,+)}\right|}}\right\}$$

< 13 >

{{1}} {Dim_2 – T58}

$$m(k_2)=\arccos\left\{\sqrt{\frac{\left|M^{2n\times 2n}{}_{(x+m,+)}+M^{2n\times 2n}{}_{(x,+)}\right|}{\left|M^{2n\times 2n}{}_{(x,+)}\right|}}-\sqrt{\frac{\left|M^{2n\times 2n}{}_{(x+m,+)}-M^{2n\times 2n}{}_{(x,+)}\right|}{\left|M^{2n\times 2n}{}_{(x,+)}\right|}}\right\}+$$
$$\arccos\left\{\sqrt{\frac{\left|M^{2n\times 2n}{}_{(x+m,+)}+M^{2n\times 2n}{}_{(x,+)}\right|}{\left|M^{2n\times 2n}{}_{(x,+)}\right|}}+\sqrt{\frac{\left|M^{2n\times 2n}{}_{(x+m,+)}-M^{2n\times 2n}{}_{(x,+)}\right|}{\left|M^{2n\times 2n}{}_{(x,+)}\right|}}\right\}$$

< 14 >

{{1}} {Dim_2 – T59}

Queda aislar el valor del desplazamiento **m**. Sabemos que es un entero.

En un sentido, su determinación es automática, dado que el término siguiente de la secuencia se puede obtener de forma análoga a como se hizo en una *fa*+ de orden 1, ***es decir por extrapolación. Esta operación es válida para todos los órdenes.***

Por ejemplo (siempre para $fa+$ de orden 2), el término **17** de la secuencia de cardinalidad 16 se expresa:

$$
\begin{aligned}
&f_2(x+15)= \\
&\{ \\
&Det-\left[f_2(x+6)*f_2(x+15)-f_2(x+7)*f_2(x+10)\right]*\left[f_2(x)*f_2(x+13)-f_2(x+1)*f_2(x+12)\right] \\
&-\left[(f_2(x+2)*f_2(x+7)-f_2(x+3)*f_2(x+6))\right]*\left[(f_2(x+8)*f_2(x+13)-f_2(x+9)*f_2(x+12))\right] \\
&+\left[(f_2(x+2)*f_2(x+11)-f_2(x+3)*f_2(x+10))\right]*\left[(f_2(x+4)*f_2(x+13)-f_2(x+5)*f_2(x+12))\right] \\
&+(f_2(x+14)f_2(x+11)\left[(f_2(x)*f_2(x+5)-f_2(x+1)*f_2(x+4))\right] \\
&+(f_2(x+3)f_2(x+14)\left[(f_2(x+4)*f_2(x+9)-f_2(x+5)*f_2(x+8))\right] \\
&-(f_2(x+7)f_2(x+14)\left[(f_2(x)*f_2(x+9)-f_2(x+1)*f_2(x+8))\right] \\
&\}/\left\{\begin{array}{l} f_2(x+10)\left[f_2(x)f_2(x+5)-f_2(x+1)f_2(x+4)\right]+ \\ f_2(x+2)\left[f_2(x+4)f_2(x+9)-f_2(x+5)f_2(x+8)\right]- \\ f_2(x+6)\left[f_2(x)f_2(x+9)-f_2(x+1)f_2(x+8)\right] \end{array}\right\}
\end{aligned}
$$

Por tanto, podemos extrapolar el término siguiente de la secuencia de 16 términos, formar la matriz desplazada y operar.

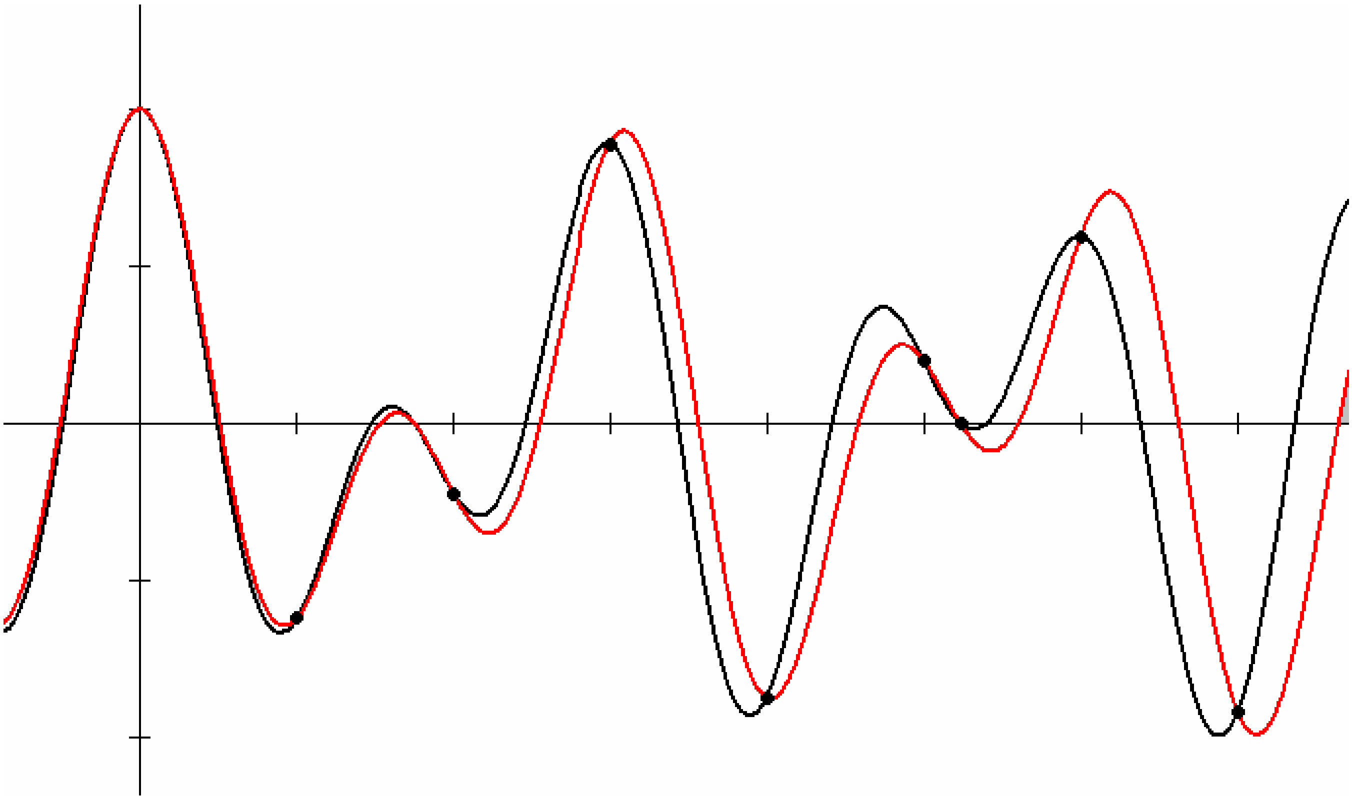
Dado que para este caso **m = 1**, obtenemos los términos del vector generador.

....

Observación: por el algoritmo descrito puede no obtenerse las frecuencias fundamentales originales. Si una frecuencia es mayor que **Pi** se halla su primer armónico.

En la **figura 5** se muestra dos funciones en la cual los generadores de la segunda se obtuvieron algorítmicamente. Como se ve, los valores son coincidentes para los enteros de **x**.

A pesar de esta distorsión la secuencia numérica original se puede reconstruir perfectamente como se muestra a continuación.



$$\cos(2.3x)+\cos(4.1x)$$

$$\cos(2.183185307x)+\cos(3.983185307x)$$

<u>Figura 5</u>:
Funciones asincrónicas de orden 2 en las cuales los generadores de la segunda se obtuvieron por la aplicación del algoritmo descrito en Pág. 46. Obsérvese que las funciones convergen en todos los valores enteros.

Algoritmo general de obtención de los generadores para una *fa*+ de Orden 2

Sintetizando, se puede describir un algoritmo del cual '*emergen*' los términos del vector generador.

Por extrapolación se logra el termino 17 para la secuencia (si es que la misma tiene al menos cardinalidad 16), se obtiene el determinante de la suma y de la resta de la matriz subsiguiente respecto a la anterior y estos valores se dividen por el determinante de la matriz original.

Obtenemos de aquí las productorias de los cosenos y senos, y por las operaciones descriptas en **<13>** y **<14>,** finalmente, los coeficientes **k** del vector generador.

Se explicita el esquema gráficamente en la **Figura 6** (Pág. 47).

{{1}} {Dim_2 – T59}

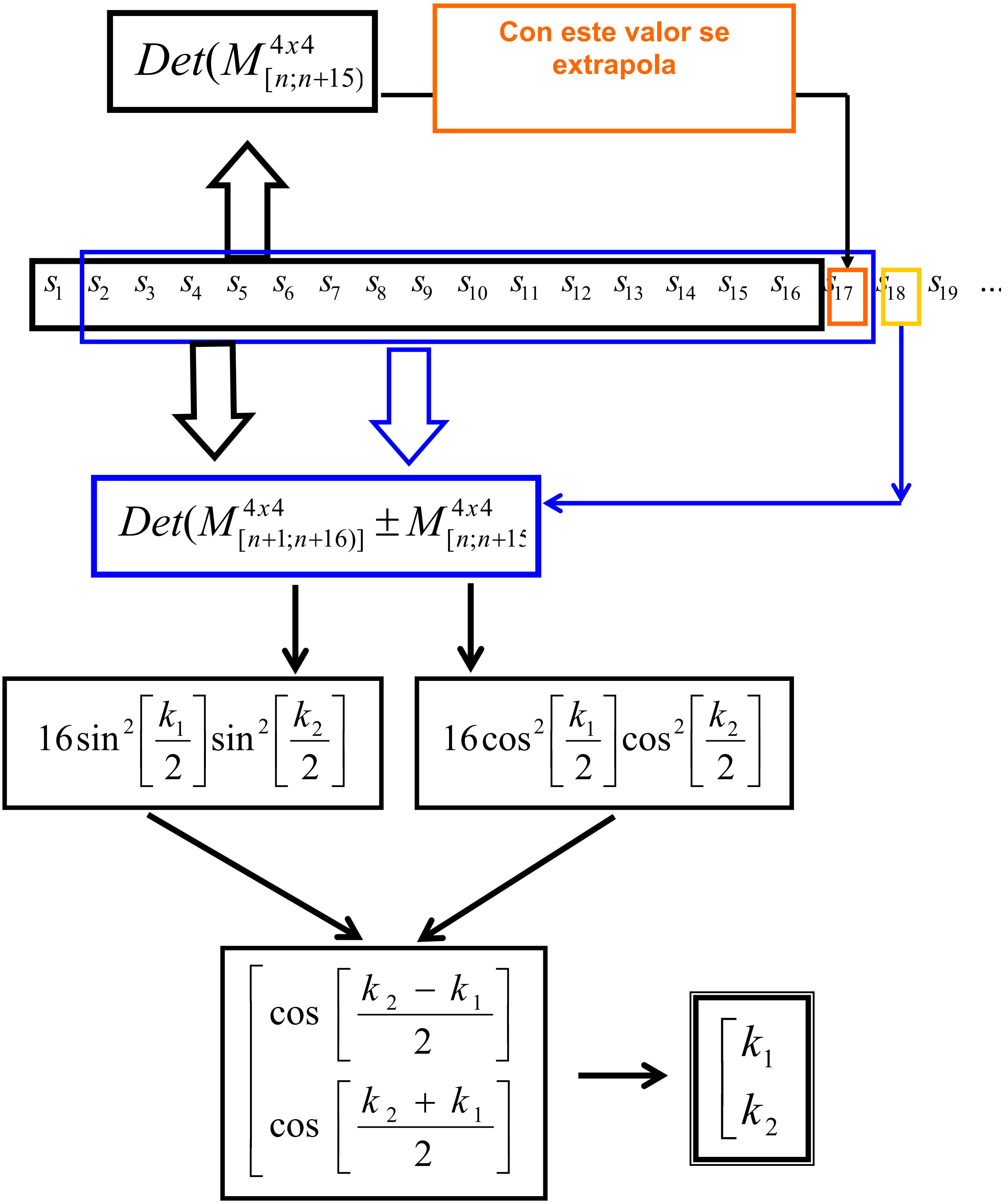


Figura 6:
Esquema general para obtener los valores sencillos de los generadores en *fa*+ **de orden 2**

Reconstrucción de la secuencia para una *fa*+ de Orden 2

Queda por delante la obtención de los orígenes **x** y los coeficientes multiplicadores asociados a cada subsecuencia.

Una vez obtenido el vector generador, se puede establecer el valor del producto de los términos generadores pues:

$$\frac{(-1)^2 a_{2-1} \prod_{i=1}^{2} (C_i)^2 \sin(k_i)\sin(4k_i) \prod_{i=1}^{2-1} \left\{ \prod_{j=i+1}^{2} \left[\cos(k_i)-\cos(k_j)\right]^2 \left[\cos(4k_i)-\cos(4k_j)\right]^2 \right\}}{(-1)^2 a_{2-1} \prod_{i=1}^{2} \sin(k_i)\sin(4k_i) \prod_{i=1}^{2-1} \left\{ \prod_{j=i+1}^{2} \left[\cos(k_i)-\cos(k_j)\right]^2 \left[\cos(4k_i)-\cos(4k_j)\right]^2 \right\}} =$$

$$\boxed{\prod_{i=1}^{2} (C_i)^2}$$

< P >

Considerando una secuencia con vector multiplicador unitario (todos los términos 1); por otro lado, podemos obtener los primeros términos de la secuencia 'pura' (con los coeficientes multiplicadores asociados unitarios) de esta forma:

$$\cos\left[xk_1\right]\cos\left[xk_2\right] =$$

$$\cos\left[\frac{2xk_1}{2}\right]\cos\left[\frac{2xk_2}{2}\right] =$$

$$\left[\cos^2\left[\frac{xk_1}{2}\right] - \sin^2\left[\frac{xk_1}{2}\right]\right]\left[\cos^2\left[\frac{xk_2}{2}\right] - \sin^2\left[\frac{xk_2}{2}\right]\right] =$$

$$\boxed{=\frac{|M_x - M_0| + |M_x + M_0|}{8|M_0|} - 1}$$

< 15 >

{{1}} {Dim_2 – U91}

donde M_0 es la matriz (vinculada a la fa+ de orden 2 estudiada) cuyo origen x es 0.

De lo anterior surge[9]:

$$\boxed{\begin{gathered}\left[\frac{|M_n - M_0| + |M_n + M_0|}{8|M_0|} - 1\right] = \beta \\ \cos(xk_1) = \frac{S_x \pm \sqrt{S_x^2 - 4\beta}}{2} \\ \cos(xk_2) = \frac{S_x \mp \sqrt{S_x^2 - 4\beta}}{2}\end{gathered}}$$

< 16 >

{{1}} {Dim_2 – U92}

Y por medio de la relación de **Tchebichev** se reconstruye la secuencia pura, es decir con coeficientes multiplicadores asociados unitarios.[10]

---

[9] Simplificamos de aquí en mas la notación de las matrices: $M_x = M^{2nx2n}{}_{(f,x,+)}$, considerando sólo esta estructura de matriz, se considera inequívoca la formulación

[10] Se pueden obtener recursivamente los primeros 4 sub - términos y operar por Tchebichev..

¿Cómo despejar los multiplicadores?

Pues bien, si a partir de lo hallado restamos la matriz '**pura**' (aquella en la que el vector multiplicador es unitario) a la original dada, tendremos:

$$\left| M^{2n\times 2n}{}_{(x,c,+)} - M^{2n\times 2n}{}_{(x,+)} \right| =$$

$$\left| \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}\{C_i \cos(xk_i) - \cos(xk_i)\} & . & . & . \\ \sum_{i=1}^{n}\{C_i \cos[(x+1)k_i] - \cos[(x+1)k_i]\} & . & . & . \\ \sum_{i=1}^{n}\{C_i \cos[(x+2)k_i] - \cos[(x+2)k_i]\} & . & . & . \\ .... & . & . & . \\ .... & . & . & \sum_{i=1}^{n}\{C_i \cos[(x+4n^2)k_i] - \cos[(x+4n^2)k_i]\} \end{bmatrix}^{2n\times 2n} \right| =$$

$$\left| \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}(C_i - 1)\cos(xk_i) & . & . & . \\ \sum_{i=1}^{n}(C_i - 1)\cos[(x+1)k_i] & . & . & . \\ \sum_{i=1}^{n}(C_i - 1)\cos[(x+2)k_i] & . & . & . \\ .... & . & . & . \\ .... & . & . & \sum_{i=1}^{n}(C_i - 1)\cos[(x+4n^2)k_i] \end{bmatrix}^{2n\times 2n} \right|$$

Aplicamos recursivamente el esquema descrito por la propiedad **< P >** y ahora obtenemos:

$$\prod_{i=1}^{2} (C_i - 1)^2$$

y haciendo:

No dejamos de recalcar que las ecuaciones **<13>, <14>, <15>, <16>** y **<17>** sólo son validas para ***fa*+ de orden 2, al igual que el algoritmo descripto en la figura 6**

$$\sqrt{\prod_{i=1}^{2}(C_i)^2} - \sqrt{\prod_{i=1}^{2}(C_i - 1)^2} - 1$$

Tenemos dos posibilidades:

a) signos iguales:

$$C_1C_2 - (C_1C_2 - C_1 - C_2 + 1) + 1 =$$
$$C_1 + C_2$$

b) signos distintos:

$$-C_1C_2 - (-C_1C_2 \pm C_1 \mp C_2 + 1) + 1 =$$
$$\pm C_1 \mp C_2$$

Formamos el sistema:

$$\begin{cases} \pm C_1C_2 = A \\ \pm C_1 \mp C_2 = B \end{cases}$$
$$C_1 = B + C_2$$
$$BC_2 + C_2^{\ 2} - A = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{C_2 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 + 4A}}{2}}$$

< 17 >

....

<u>Propiedades de *fa*+ de orden 3</u>

Especializando **<4>** y **<5>** para **n = 3** obtenemos:

$$\begin{cases} \dfrac{\left| M^{6\times 6}{}_{(f,x+1,+)} - M^{6\times 6}{}_{(f,x,+)} \right|}{\left| M^{6\times 6}{}_{(f,x,+)} \right|} = 64 \prod_{i=1}^{3} \sin^2\left[\dfrac{k_i}{2}\right] \\ \dfrac{\left| M^{6\times 6}{}_{(f,x+1,+)} + M^{6\times 6}{}_{(f,x,+)} \right|}{\left| M^{6\times 6}{}_{(f,x,+)} \right|} = 64 \prod_{i=1}^{3} \cos^2\left[\dfrac{k_i}{2}\right] \end{cases}$$

Pero:

$$64 \prod_{i=1}^{3} \cos^2\left[\frac{k_i}{2}\right] =$$

$$\frac{64}{4}\left[1 + \cos\left(k_1\right)\right]\left[1 + \cos\left(k_2\right)\right]\left[1 + \cos\left(k_3\right)\right] =$$

$$16 \begin{Bmatrix} 1 + \left[\cos(k_1) + \cos(k_2) + \cos(k_3)\right] + \\ \cos(k_2)\cos(k_3) + \cos(k_1)\cos(k_3) + \cos(k_1)\cos(k_2) + \\ \cos(k_1)\cos(k_2)\cos(k_3) \end{Bmatrix};$$

$$64 \prod_{i=1}^{3} \sin^2\left[\frac{k_i}{2}\right] =$$

$$\frac{64}{4}\left[1 - \cos\left(k_1\right)\right]\left[1 - \cos\left(k_2\right)\right]\left[1 - \cos\left(k_3\right)\right] =$$

$$16 \begin{Bmatrix} 1 - \left[\cos(k_1) + \cos(k_2) + \cos(k_3)\right] + \\ \cos(k_2)\cos(k_3) + \cos(k_1)\cos(k_3) + \cos(k_1)\cos(k_2) - \\ \cos(k_1)\cos(k_2)\cos(k_3) \end{Bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\left|M^{6\times6}_{(x+1,+)} + M^{6\times6}_{(x,+)}\right|}{\left|M^{6\times6}_{(x,+)}\right|} - \frac{\left|M^{6\times6}_{(x+1,+)} - M^{6\times6}_{(x,+)}\right|}{\left|M^{6\times6}_{(x,+)}\right|} =$$

$$64\left\{\prod_{i=1}^{3}\cos^2\left[\frac{k_i}{2}\right] - \prod_{i=1}^{3}\sin^2\left[\frac{k_i}{2}\right]\right\} =$$

$$16\left\{\left[\cos(k_1) + \cos(k_2) + \cos(k_3)\right] + \cos(k_1)\cos(k_2)\cos(k_3)\right\}$$

< 18 >

{{1}} {Dim_3 – AA3}

Tenemos la ***sumatoria*** de los cosenos de las frecuencias (que corresponden a **x = 1**) y la ***productoria*** de los mismos.

Pero estos se pueden obtener también obteniendo la segunda matriz desplazada, es decir, iterando *2 veces* para obtener el término **38** de la secuencia.

Simbólicamente:

$$\sqrt{\left\{\frac{\left|M^{6\times6}_{(x+2,+)} + M^{6\times6}_{(x,+)}\right|}{8\left|M^{6\times6}_{(x,+)}\right|}\right\}} =$$

$$\sqrt{\left\{\prod_{i=1}^{3}\cos^2\left[\frac{2k_i}{2}\right]\right\}} =$$

$$\sqrt{\left\{\cos^2(k_1)\cos^2(k_2)\cos^2(k_3)\right\}} =$$

$$\pm\cos(k_1)\cos(k_2)\cos(k_3)$$

< 19 >

Uniendo todo:[11]

$$\frac{\left|M^{6\times6}{}_{(x+1,+)}+M^{6\times6}{}_{(x,+)}\right|}{16\left|M^{6\times6}{}_{(x,+)}\right|}-\frac{\left|M^{6\times6}{}_{(x+1,+)}-M^{6\times6}{}_{(x,+)}\right|}{16\left|M^{6\times6}{}_{(x,+)}\right|}\pm\frac{\left|M^{6\times6}{}_{(x+2,+)}+M^{6\times6}{}_{(x,+)}\right|}{16\left|M^{6\times6}{}_{(x,+)}\right|}=$$

$$\left\{\prod_{i=1}^{3}\cos^{2}\left[\frac{k_i}{2}\right]-\prod_{i=1}^{3}\sin^{2}\left[\frac{k_i}{2}\right]\right\}\pm\sqrt{\prod_{i=1}^{3}\cos^{2}\left[\frac{2k_i}{2}\right]}=$$

$$\begin{cases}\pm\left\{\left[\cos(k_1)+\cos(k_2)+\cos(k_3)\right]+2\cos(k_1)\cos(k_2)\cos(k_3)\right\}\\ \vee\\ \pm\left[\cos(k_1)+\cos(k_2)+\cos(k_3)\right]\end{cases}$$

< 20 >

Con lo cual formamos el sistema:

$$\begin{cases}\cos(k_1)\cos(k_2)\cos(k_3)=\mathrm{A}\\ \cos(k_1)+\cos(k_2)+\cos(k_3)=\mathrm{B}\end{cases}$$

$$\left[B-\cos(k_2)-\cos(k_3)\right]\cos(k_2)\cos(k_3)=\mathrm{A}$$
$$B\cos(k_2)\cos(k_3)-\cos^{2}(k_2)\cos(k_3)-\cos(k_2)\cos^{2}(k_3)=\mathrm{A}$$
$$\cos(k_2)\cos^{2}(k_3)+\cos(k_3)\left[\cos^{2}(k_2)-B\cos(k_2)\right]+\mathrm{A}=0$$

<R>

$$\boxed{\cos(k_3)=\frac{\left[B\cos(k_2)-\cos^{2}(k_2)\right]\pm\sqrt{\left[\cos^{2}(k_2)-B\cos(k_2)\right]^{2}-4\cos(k_2)\mathrm{A}}}{2\cos(k_2)};}$$

<21>

Reemplazando **<21>** en **<R>** se obtiene uno de los generadores; y luego se utiliza recursión para hallar los restantes. Un procedimiento análogo al aplicado para *fa*+ orden 2 (conformación y substracción de la matriz '*pura'*, etc) es factible para hibridar los términos del vector multiplicador (aunque requiere cierta iteración no algebraica).

[11] Igualmente remarcamos que las ecuaciones **<18>, <19>, <20>** y **<21>** sólo son validas para ***fa*+ de orden 3.**

3.9) Extensiones a matrices cuyos vectores son equidistantes, pero no inmediatamente consecutivos

Vamos agotando las posibilidades de aplicación del álgebra trigonométrica para definir vectores generadores y multiplicadores.

En secuencias de funciones asincrónicas de orden mayores a 3 no tenemos por lo general ningún método algebraico para aislar los k_i y las C_i

Antes de encarar ordenes superiores, vamos a ampliar el alcance de los **Teoremas 1, 2 y 3** para funciones sinusoidales desplazadas sobre el eje **x,** Ídem para matrices asincrónicas cuyos vectores no son inmediatamente consecutivos, pero si equidistantes, en la disposición de la secuencia.

Las conclusiones de tal ampliación, son totalmente generales y válidas para todos los órdenes.

Lema 2

Extensión para cantidades sinusoidales

¿Qué pasa si a las $fa+$ descritas se le suma una cantidad constante $A_i \in \Re$, vinculada a cada k_i que no varía en la evolución de la secuencia?

La expresión sería esta:

$$M^{2n\times 2n}{}_{(f,x,+)} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} C_i \cos(xk_i + A_i) & & \\ \sum_{i=1}^{n} C_i \cos[(x+p)k_i + A_i] & & \\ \sum_{i=1}^{n} C_i \cos[(x+2p)k_i + A_i] & & \\ \ldots & & \\ \ldots & & \sum_{i=1}^{n} C_i \cos[(x+2p)k_i + A_i] \end{bmatrix}^{2n\times 2n}$$

Previsiblemente, el determinante no varía (ver **figura 7** Pág. 59)

Demostración:

Para **n = 1**:

$$C^2\{\cos(xk_1 + A_1)\cos[(x+3)k_1 + A_1] - \cos[(x+1)k_1 + A_1]\cos[(x+2)k_1] + A_1\} =$$

$$\frac{1}{2}C^2[\cos(-3k_1) + \cos[(2x+3)k_1 + 2A_1] - \cos(k_1) - \cos[(2x+3)k_1 + 2A_1]] =$$

$$\frac{1}{2}C^2[\cos(3k_1) - \cos(k_1)] = -C_1^{\,2}\sin(2k_1)\sin(k_1) =$$

$$(-1)^n a_n\left\{\prod_{i=1}^{n}(C_i)^2\sin(k_i)\sin(2nk_i)\right\}\prod_{i=1}^{n-1}\left\{\prod_{j=i+1}^{n}[\cos(k_i)-\cos(k_j)]^2[\cos(2nk_i)-\cos(2nk_j)]^2\right\}$$

El resto de la demostración es inductiva, análoga a la del **Teorema 1**.

Lema 3

Extensión para vectores equidistantes m desplazamientos

Sea una secuencia de $fa+$ de orden n[12]. Su cardinalidad es tal que se pueden elegir los vectores:

$$\begin{cases} v_1 = \begin{bmatrix} f_{(x,+)} \\ f_{(x+1,+)} \\ .. \\ f_{(x+2n-1,+)} \end{bmatrix} \\ v_2 = \begin{bmatrix} f_{(x+m,+)} \\ f_{(x+m+1,+)} \\ .. \\ f_{(x+m+2n-1,+)} \end{bmatrix} \\ \ldots \\ v_n = \begin{bmatrix} f_{(x+2m,+)} \\ f_{(x+2m+1,+)} \\ .. \\ f_{(x+2m+2n-1,+)} \end{bmatrix} \end{cases}$$

Entonces la Matriz vinculada a esta estructuración de la secuencia tiene un determinante que sólo está determinando por los vectores generador, multiplicador ***y el paso de desplazamiento vectorial m***

[12] De aquí n adelante, extendemos las proposiciones a cantidades sinusoidales según descrito en **Pág. 52**.

El determinante de la matriz 2n x 2n asociada a una secuencia de la función asíncrona *fa*+ de orden n (n natural) donde los vectores columna tal cual se describe en T.1 tienen una distancia entre sí de m, las columnas de la matriz están ordenadas crecientemente tal cual se describe en T.1, es dependiente de los coeficientes multiplicadores, de los coeficientes generadores, y del paso de desplazamiento entre vectores m, y solamente de estos.

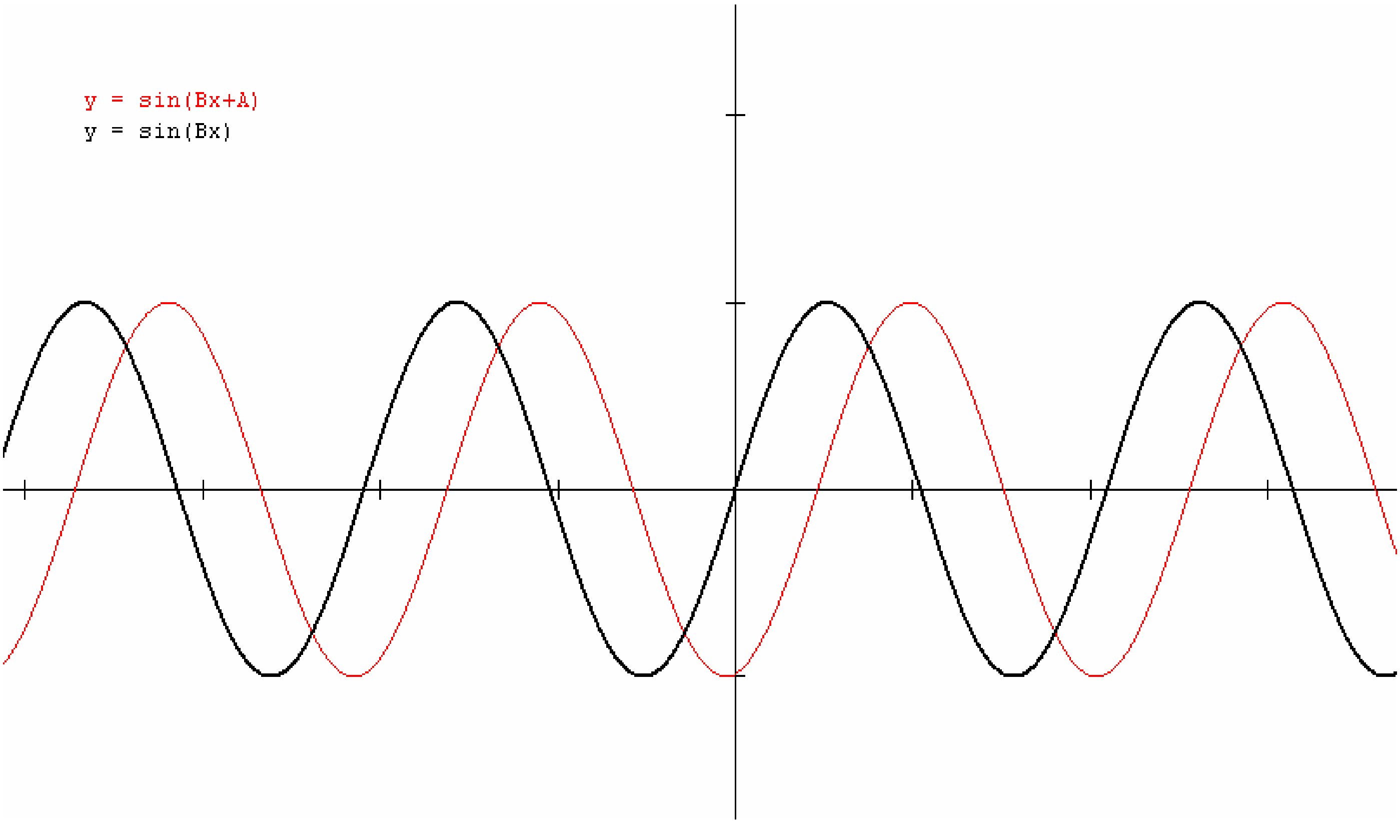
Su expresión es:

$$(-1)^n a_n \left\{ \prod_{i=1}^{n} (C_i)^2 \sin(k_i)\sin(2mk_i) \right\} \prod_{i=1}^{n-1} \left\{ \prod_{j=i+1}^{n} \left[\cos(k_i) - \cos(k_j)\right]^2 \left[\cos(2mk_i) - \cos(2mk_j)\right]^2 \right\};$$

< 22 >

Obsérvese que el valor de orden **n** que participaba en la expresión **<1>** es un caso particular para vectores consecutivos. La demostración es la misma que para **T.1**.

El **Lema 3** extiende las proposiciones de los **Teoremas** 1, 2 y 3 a vectores *equidistantes* en la secuencia, pero no inmediatamente consecutivos, y el **Lema 2** extiende las mismas a toda combinación lineal de sumatorias finitas de *expresiones sinusoidales asincrónicas*.



<u>Figura 7</u>:
Desplazamiento en una onda simple

3.10) Un Algoritmo Iterativo para obtener los valores Simples de los generadores

Hay una propiedad importante que surge de la definición de la función asincrónica: si a la misma le sumamos una secuencia senoidal simple de la misma frecuencia que una de sus componentes, entonces el determinante será un producto del determinante original por $\xi_i \sin\left[\frac{\Delta k_i}{2}\right]$, siendo k_i la frecuencia participante de la matriz asincrónica original y de la secuencia simple sumada ó restada termino a término.

Demostración:

Tenemos la matriz suma original:

$$\left| M^{2n\times 2n}{}_{(x,+)} \right| =$$

$$\left| \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} C_i \cos(xk_i) & & \\ \sum_{i=1}^{n} C_i \cos\left[(x+1)k_i\right] & & \\ \sum_{i=1}^{n} C_i \cos\left[(x+2)k_i\right] & & \\ \ldots\ldots & & \\ \ldots\ldots & & \sum_{i=1}^{n} C_i \cos\left[(x+4n^2-1)k_i\right] \end{bmatrix}^{2n\times 2n} \right| =$$

Si a la misma le restamos una secuencia simple (aunque con otro origen **y**) de una de las frecuencias componentes de *fa+:*

$$
\left|
\begin{bmatrix}
\left[\sum_{i=1}^{n} C_i \cos(xk_i)\right] - \cos(yk_n) & & \\
\left[\sum_{i=1}^{n} C_i \cos[(x+1)k_i]\right] - \cos[(y+1)k_n] & & \\
\left[\sum_{i=1}^{n} C_i \cos[(x+2)k_i]\right] - \cos[(y+2)k_n] & & \\
\cdots & & \\
\cdots & & \left[\sum_{i=1}^{n} C_i \cos[(x+4n^2-1)k_i]\right] - \cos[(y+4n^2-1)k_n]
\end{bmatrix}^{2n\times 2n}
\right|
$$

A modo de ejemplo expandamos el primer término de esta nueva matriz:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} C_i \cos(xk_i)\right] - \cos(yk_n) =$$

$$C_1 \cos(xk_1) + C_2 \cos(xk_2) + .. + C_n \cos(xk_n) - \cos(yk_n) =$$

$$C_1 \cos(xk_1) + C_2 \cos(xk_2) + .. + (C_n - 1)\cos(xk_n) + [\cos(xk_n) - \cos(yk_n)] =$$

$$C_1 \cos(xk_1) + C_2 \cos(xk_2) + .. + (C_n - 1)\cos(xk_n) + \left[\sin\left[\frac{k_n(x-y)}{2}\right]\sin\left[\frac{k_n(x+y)}{2}\right]\right] =$$

$$C_1 \cos(xk_1) + C_2 \cos(xk_2) + .. + (C_n - 1)\cos(xk_n) + \left[\sin\left[\frac{k_n(\Delta)}{2}\right]\sin\left[\frac{k_n(x+y)}{2}\right]\right]$$

Los términos:

$(C_n - 1)\cos(xk_n) + \left[\sin\left[\frac{k_n(\Delta)}{2}\right]\sin\left[\frac{k_n(x+y)}{2}\right]\right]$ expresan una cantidad sinusoidal determinada por la frecuencia k_n, lo que es equivalente a modificar el origen **x** de la subsecuencia vinculada a k_n por una $x_n + \lambda$, y al coeficiente C_n por otro C'_n. No importa, por el momento, la determinación de estas nuevas variables de desplazamiento y escalado. *Lo importante es que el determinante de esta nueva matriz es constante nuevamente respecto a la posición* ***x*** *de la secuencia, y los cocientes descritos en* **C.2.1** *y* **C.2.2** *darán el mismo resultado que la matriz original*

Si hemos generado una extrapolación de una matriz de **2n x 2n** de esta forma:

$$\left| \begin{bmatrix} S_{x+1} & & \\ S_{x+2} & & \\ S_{x+3} & & \\ \cdots & & \\ \cdots & & S_{x+4n^2} \end{bmatrix}^{2n \times 2n} \right|$$

Y le restamos o sumamos término a término una secuencia generada por una de las frecuencias componentes de la matriz original, tanto ésta como aquella tendrán el mismo determinante.

Hemos aislado un generador. Procedamos recursivamente.

Existen 9 submatrices de 2(n-1) x 2(n-1) en una de 2n x 2n, sumando o restando una secuencia generada por otra frecuencia, los determinantes de estas submatrices coincidirán.

Completado el proceso de definición de los generadores, podemos encarar los multiplicadores.

El procedimiento es similar a lo actuado en *fa*+ de orden 2 (Pág. 41). Restamos una matriz '*pura*' a la matriz original y su determinante será de la forma:

$$= (-1)^n a_n \left\{ \prod_{i=1}^{n} (C_i - 1)^2 \sin(k_i)\sin(2mk_i) \right\} \prod_{i=1}^{n-1} \left\{ \prod_{j=i+1}^{n} \left[\cos(k_i) - \cos(k_j)\right]^2 \left[\cos(2mk_i) - \cos(2mk_j)\right]^2 \right\};$$

Podemos aislar:[13]

$$\prod_{i=1}^{n} (C_i - 1)^2$$

E iterar, etc.

[13] Esto es más bien de interés teórico, ya que es más efectivo para **n < 30** una búsqueda tabulada

/* Esto que sigue es un agregado al documento original, estoy investigando las ecuaciones

Para orden 2 del polinomio */

$$\left\|\begin{bmatrix} a_{11}+\cos(-2k) & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21}+\cos(-k) & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31}+\cos(0k) & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41}+\cos(k) & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}\right\| =$$

$$\left\|\begin{bmatrix} a_{21}+\cos(-k) & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31}+\cos(0k) & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41}+\cos(k) & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{12}+\cos(2k) & a_{13} & a_{14} & a_{ex} \end{bmatrix}\right\|$$

Transponiendo:

$$\left\|\begin{bmatrix} a_{11}+\cos(-2k) & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21}+\cos(-k) & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31}+\cos(0k) & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41}+\cos(k) & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}\right\| =$$

$$\left\|\begin{bmatrix} a_{21}+\cos(-k) & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31}+\cos(0k) & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41}+\cos(k) & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{12}+\cos(2k) & a_{13} & a_{14} & a_{ex} \end{bmatrix}\right\|$$

$$\left[a_{11}+\cos(-2k)\right]\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} -$$

3.11) *Ratios* Teóricos de Compresión

Llegando hasta aquí, no puede no pensarse en la relación de una secuencia comprimida (es decir expresada por sus vectores generadores multiplicadores, de desplazamiento y origen, necesarios para parametrizar la **función generadora** $fa+$ respecto a la secuencia original, hallados v_m y v_g, y suponiendo hallado el origen **x,** y el vector de desplazamiento v_Δ :[14]

$$v_\Delta = \langle \Delta_1, \Delta_2, .., \Delta_n \rangle$$

Tenemos 3 vectores de dimensión **n**, necesarios para expresar los generadores, los multiplicadores y los desplazamientos, y un vector de dimensión 1, para el origen.

Por tanto:

$$\boxed{R_n = \frac{3n+1}{4n^2}}$$

< 23 >

La modelación continua de esta relación se muestra en **Figura 8**

[14] ..Que agregamos aquí como definición, con lo que completamos la definición de $fa+$ que asume entonces la forma de una **secuencia de cantidades sinusoidales**, haberlo hecho antes no aportaba nada conceptualmente sustancioso. No hay un vector n -dimensional de origen **x**, pues siempre podemos remitirnos a un origen común y alterar los valores del vector de desplazamiento, es una idea relativamente pueril, pero no se demuestra aquí.

$$R_n = \frac{3n+1}{4n^2}$$

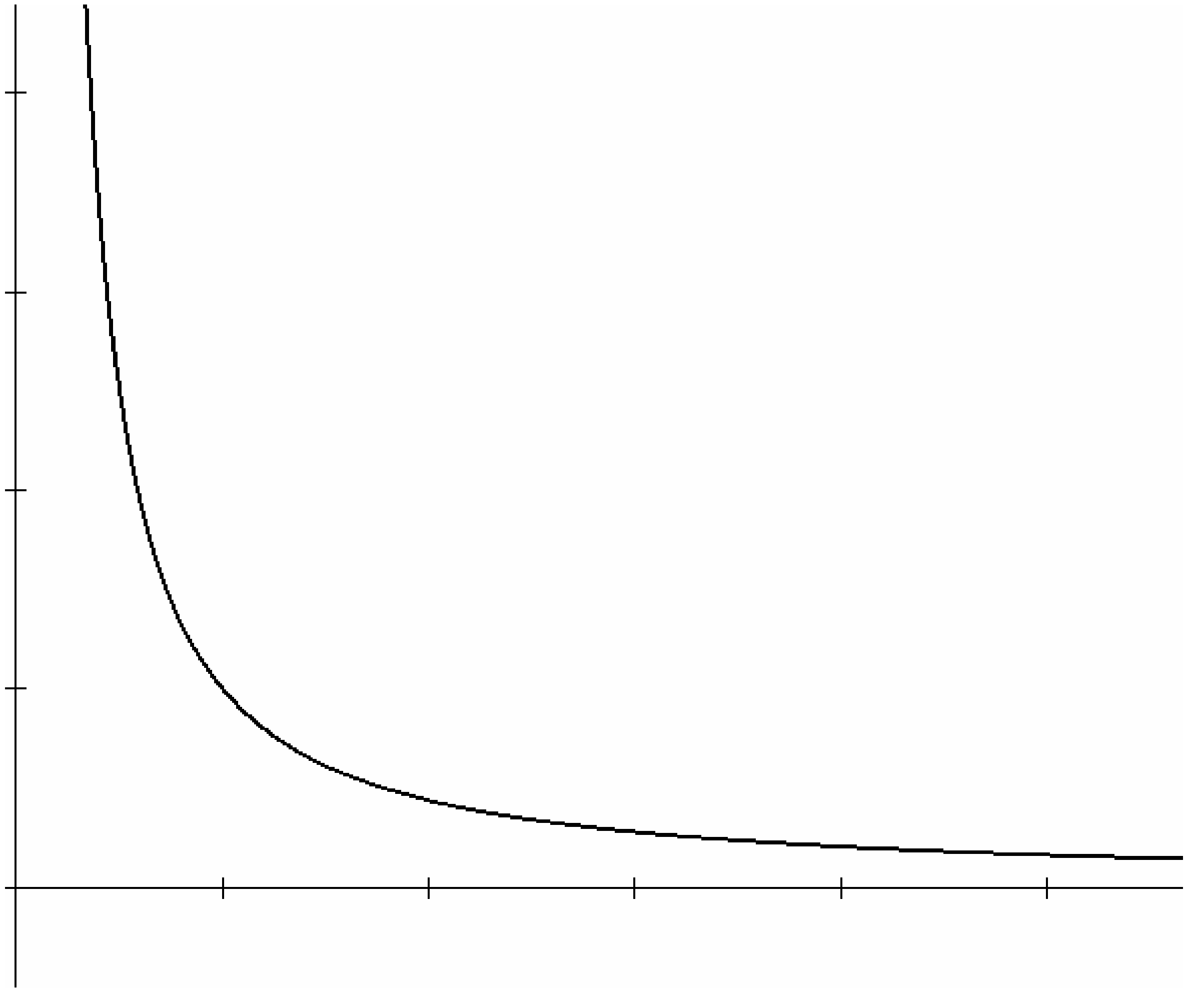


Figura 8:
Modelo continuo de Compresión para distintos órdenes de *fa+*

3.12) Otras propiedades

Hasta aquí se ha utilizado el **coseno** en la composición de los términos de la secuencia de *fa+*.

Nada impide utilizar el seno, o combinar senos y cosenos. Todo se puede convertir a expresiones de cosenos siempre y cuando la conversión de una función a otra no alteren los generadores a la forma:

$$k_{i+1} \neq k_i + 2s\pi;$$

Es decir, cuando se preserve la asincronía.

Hay otras propiedades interesantes, algunas derivan de la teoría de matrices, se enumeran sin demostrar.

P.1)

El determinante de una matriz asincrónica en la cual la secuencia se compone alternativamente de términos en senos y cosenos es invariante respecto a la posición x de cada subsecuencia o delta de desplazamiento constante. Como su cálculo varía de acuerdo al '***teselado***' de las funciones, no hay una demostración única.

Simbólicamente:

$$M^{2n\times 2n}{}_{(x,+)} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} C_i \cos(xk_i) & . \; . \; . & . \\ \sum_{i=1}^{n} C_i \sin[(x+1)k_i] & . \; . \; . & . \\ \sum_{i=1}^{n} C_i \cos[(x+2)k_i] & . \; . \; . & . \\ \sum_{i=1}^{n} C_i \sin[(x+3)k_i] & . \; . \; . & . \\ . & . \; . \; . & \sum_{i=1}^{n} C_i \cos[(x+2n^2-1)k_i] \end{bmatrix}^{2n\times 2n}$$

También tiene un determinante que no depende de su posición x, sino de sus vectores generador, multiplicador, de desplazamiento, etc

P.2)

Una matriz asincrónica en la cual a una o varias columnas se combinan linealmente múltiplos de otras (que no es lo mismo que una sea combinación lineal de otras), preserva el determinante.

Simbólicamente (expresando cada columna como vector):

$$\left| M^{2n\times 2n}{}_{(f,x,+)} \right| =$$

$$\left| \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & . & . & v_n \end{bmatrix}^{2n\times 2n} \right| =$$

$$\left| \begin{bmatrix} v_1 + a_1 v_2 & v_2 + a_2 v_3 & . & . & v_n + a_n v_{n-1} \end{bmatrix}^{2n\times 2n} \right|$$

$$a_1 \in \Re;$$

$$..$$

$$a_n \in \Re;$$

3.13) Epilogo

“Pauca sed Matura...”

...Dicen que decía el sello personal de Karl Friedrich Gauss (*‘Pocas pero Maduras’*).

Modestia injustificada a juzgar por su obra prolífica y extraordinaria.

Con el debido respeto y distancia, mi opinión es otra; la ambición de presentar resultados incontestables ha inducido en más de una ocasión la pérdida de valiosa investigación que en algunos casos se redescubrió de manera casual.

..Y en otros se ha perdido.

Respecto a la investigación en la cual se basa este manuscrito, debo decir que no está madura, pero tampoco es **‘Pauca’.**

Espero que la comunidad matemática pueda *‘cerrar el circulo’* de las proposiciones que aquí se presentan, para explotar sus potenciales utilidades (pienso aparte de la algoritmia descrita, en geología y acústica, modelización genética, etc, sin contar la concurrencia o colaboración que pueda haber con otros métodos mencionados aquí).

No obstante, como se mencionó anteriormente, hay varias líneas de investigación en curso.

Puede parece paradójico que en una investigación cuya base es el álgebra lineal y una rara combinación de matrices y trigonometría, no se mencione una vez operaciones típicas, como la diagonalización, los autovalores, etc.

No podíamos obviarlos, pero tampoco se puede presentar al momento nada maduro. Justamente es parte de una de las líneas de continuación de este trabajo, sucede que al igual (o peor aún) que lo que sucede con el cálculo simbólico de determinantes para *fa+* de ordenes superiores a 1 (incluso de orden 2) los cálculos son tan tediosos, y el software matemático presenta de modo tan intratable sus resultados que cierta operación manual es inevitable[15] (al margen de software especial que el autor desarrolló auxiliarmente).

Solo diremos que los autovalores (y por lo tanto sus autovectores asociados) no son, como era de prever invariantes respecto a la posición en la secuencia.

Siempre se puede construir una matriz simétrica a partir de una secuencia dada, esto es otro campo de trabajo que aporta a la reconstrucción de los generadores implícitos.

Finalmente, como una casualidad abrió camino a los resultados (parciales, es verdad, pero no exentos de sustancia a mi juicio), es posible que estas relaciones aquí descritas, concurran como otra '***casualidad***' en otras investigaciones.

Dante E. Wojtiuk

[15] Como comentario, diremos que el cálculo de la expresión del determinante de una matriz asincrónica de orden 2 nunca se hubiera podido reducir a la forma presentada en este trabajo utilizando por ejemplo **Mathematica** o **Maple**. Sin una forma 'inteligible', difícilmente se hubiera hallado una expresión general para orden **n**

3.14) Información

Durante la investigación en la cual esta monografía se basa, se ha utilizado el siguiente Software matemático Entornos de desarrollo y programas de utilidad general:

Maple 9.5

Mathematica 5

Microsoft Excel (office 2000)

GNU WinPlot

GNU WinMat

GNU Scilab 3.0 (INRIA)

Visual Basic 6.0

Borland C++ 5.3

Microsoft Word (office 2000)