EL QUINTO AXIOMA DE EUCLIDES

Uno de los hitos más extraordinarios de la Matemática es la gran aventura intelectual en la que se embarcó la ciencia durante un periodo de más de dos mil años a fin de resolver y aclarar una sospecha histórica que afectaba a la misma fundamentación de la geometría clásica: la inquietante sospecha de que uno de los cinco axiomas de Euclides, el quinto, no fuera realmente un axioma independiente, sino, en todo caso, una consecuencia, una derivación, de los otros cuatro axiomas.

Los grandes matemáticos posteriores al gran Euclides, en todo este tiempo renovados por el paso sucesivo de generaciones, intentaron obtener por derivación el llamado "axioma de las paralelas", sin dejar nunca de afrontar el reto que representaba este enunciado euclidiano, hasta desembocar, ya en el siglo XIX, a una situación extraordinaria: el descubrimiento de la posibilidad de construir geometrias no euclidianas, que, como luego se comprobó, tendrían aplicabilidad real en los desarrollos de la Física cuántica y relativista del siglo XX.

1. La construcción euclidiana:

El espacio, considerado desde la Antigüedad como la más directa e intuitiva de las imágenes sensoriales, fué pronto asociado con el concepto más elemental de medición, y su estudio sistemático consistió, principalmente, en desarrollar parcelariamente una teoría del medir, o sea, en la obtención de relaciones entre las medidas de los objetos físicos. Esta es la situación que fué definida como geometría: medida del espacio.

Las investigaciones de las relaciones entre las diversas medidas de los objetos físicos, los resultados y proposiciones paulatinamente conseguidos, tuvieron un carácter inconexo, parcelario, hasta la aparición de su primer sistematizador y recopilador: Euclides.

Se cree que Euclides de Alejandría vivió del 325 al 265 a. de J.C.

La ciudad de Alejandría, en el delta del Nilo, era, desde un punto de vista geográfico, el lugar de reunión adecuado para griegos, árabes y judíos. Allí se conservó, en la gran Biblioteca, lo más extraordinario de la Filosofía Griega; se perfeccionaron las matemáticas de los antiguos, y el genio intelectual de los griegos entró en contacto vivo con el desarrollo moral e intelectual de los judíos.

Fué aquí donde Ptolomeo creó la Biblioteca y fundó la Universidad, entre cuyos primeros maestros se encontraba Euclides. Aunque de la vida de Euclides se conoce poco, se considera muy probable que pasara en Atenas sus años de instrucción, hasta aceptar la invitación de Ptolomeo para que enseñara en Alejandría.

Durante más de treinta años enseñó Euclides en la Universidad Ptolemaica de Alejandría, construyendo, entre otros muy notables trabajos, sus famosos Elementos de Geometría. La doctrina enseñada por Euclides produjo excelentes discípulos, como Arquímedes y Apolonio.

La historia ha recogido de Euclides la imágen de un hombre de estudios genial, modesto y escrupulosamente honrado, siempre dispuesto a reconocer el trabajo intelectual de otros, amable y paciente.

En los *Elementos* comenzó Euclides a exponer una descripción exhaustiva de la Matemática, tarea colosal, aún en su tiempo. La obra estaba constituida por trece libros cuyos temas son sobradamente conocidos.

Los libros I, II, IV y VI tratan sobre líneas, áreas y figuras regulares simples. En el libro III, sobre los círculos, sigue los trabajos de Hipócrates. En el libro V, sobre proporciones, elabora el trabajo de Eudoxo, justificando, con estos resultados, las propiedades principales de las figuras semejantes, que expone en el libro VI.

Los libros VII, VIII y IX están dedicados a la teoría de números, desarrollando en estos volúmenes mucho de lo que fué el trabajo de Pitágoras. Se introducen en estos libros los números primos y compuestos, distinción relativamente tardía; también introduce, por primera vez, el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo, así como la teoría de las progresiones geométricas y el teorema $a^{m+n} = a^m . a^n$, para a, m, n, números enteros. Contiene además un método para sumar una progresión mediante una genial utilización de las razones iguales. Euclides utilizó este método para presentar los números que llamó *perfectos* , números como 6, 28, 496, ... que tienen la curiosa propiedad de que se obtienen como suma de sus factores, repetidos o no.

El libro X de los Elementos sitúa a Euclides en la primera linea entre los analistas. Se halla ampliamente relacionado con la teoría de los numeros irracionales, principalmente de la forma

$$\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$$

donde a y b son enteros positivos. Queda elaborado aquí por Euclides, el aspecto aritmético de la obra de Eudoxo, habiendo establecido ya el aspecto geométrico en los libros V y VI.

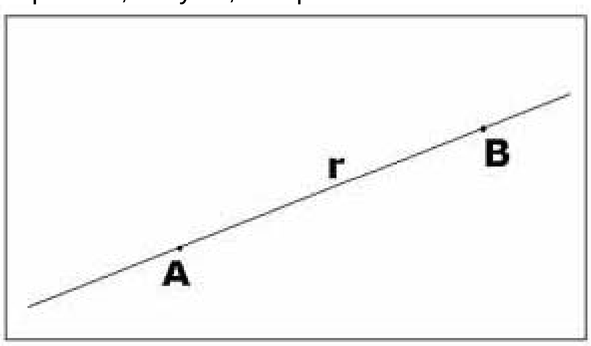
El libro XI trata de la geometr5ia elemental del espacio, y el libro XII, uno de los mas celebres, desarrolla extraordinariamente el metodo exhaustivo. Hace la demostración formal de teorema de Hipócrates que da πr^2 para el area del circulo de radio *r*.

El libro XIII, ultimo de la obra, proporciona y demuestra las construcciones de los cinco cuerpos geométricos regulares de Pitágoras, acabando en el dodecaedro, símbolo de universo.

La construcción euclidiana de la geometría es la primera gran edificación axiomática. Es un sistema deductivo desarrollado desde cinco axiomas o postulados, sin demostración, a partir de las cuales habría de ser posible edificar todo el sistema mediante demostraciones exhaustivas.

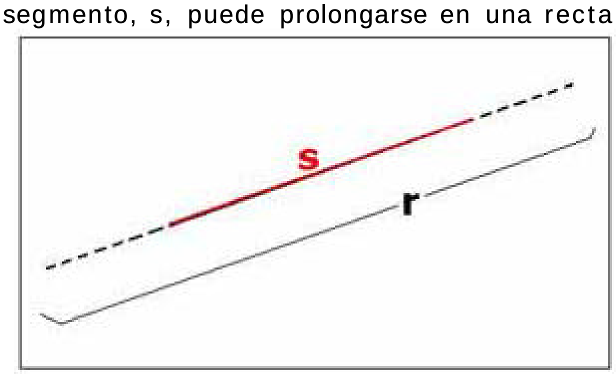
Tales axiomas, expuestos ya en el libro I fueron, usando una nomenclatura actual, los siguientes:

1) Por dos puntos, A y B, se puede trazar una línea recta r.



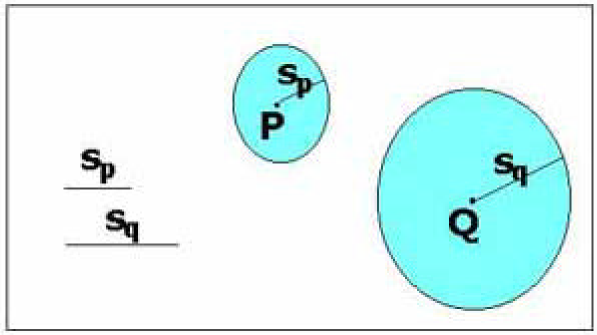
Primer axioma: por dos puntos una linea recta

2) Todo segmento, s, puede prolongarse en una recta infinita r.



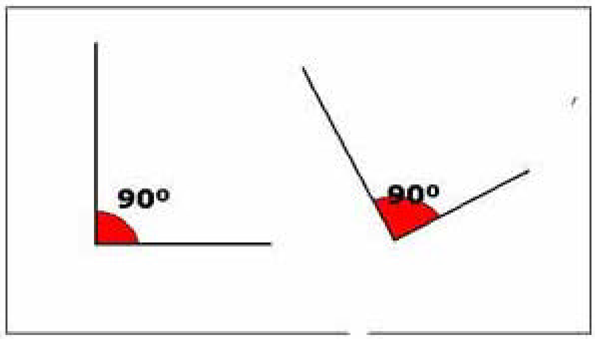
Segundo axioma: todo segmento es prolongable en una recta.

3) Para todo punto P y todo segmento s existe un círculo de centro en P y radio s.



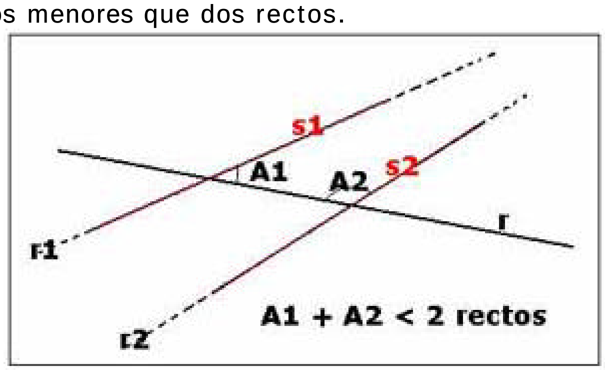
Tercer axioma: Un punto y un segmento definen un círculo.

4) Todos los angulos rectos son iguales (tienen la misma medida).



Cuarto axioma: Todos los rectos son iguales.

5) Si una recta r, al incidir sobre dos segmentos, s1 y s2, forma del mismo lado angulos internos, A1 y A2, que suman menos que dos rectos, los dos segmentos, s1 y s2, prolongados en sendas rectas r1 y r2 al infinito se encontraran en el lado en que esten los angulos menores que dos rectos.



Quinto axioma: las dos rectas r1 y r2 se cortarán

Cuando Euclides formuló estos enunciados como axiomas o postulados, esto es, como verdades de inicio de los procesos de razonamiento, no lo hizo en el sentido actual de formulación de reglas de juego para el desarrollo de la inferencia lógica, sino, más bien, y siguiendo la concepcion predominante hasta finales del siglo XIX, porque le parecieron "autoevidentes" o correctos, o, simplemente, "convincentes".

Lo fundamental es que fueran indecidibles, es decir, que ninguno de ellos se pudiera obtener como conclusión desde los restantes. Hoy día sabemos que un sistema axiomático ha de ser también consistente internamente y no contradictorio.

2. La crisis de la construcción euclidiana:

Los elementos de Euclides fueron costruidos sobre la base de un sistema de 5 axiomas, sistema que habria de ser con toda seguridad consistente, no contradictorio e indecidible, a causa de su aparente autoevidencia. Pero nunca fue exactamente así.

El comienzo de la crisis data de los mismos tiempos de Euclides, y tuvo su origen en la duda sobre la evidencia del quinto de los axiomas, que se dió en llamar "axioma de las paralelas".

En efecto, fueron varias las razones por las que ya los griegos no consideraron autoevidente este axioma. La principal de tales razones es que en él se formula una afirmacion sobre las regiones infinitamente remotas de espacio, puesto que se dice que si la suma de los dos ángulos internos, A1 + A2, fuera precisamente igual dos rectos, entonces ambas rectas, r1 y r2 (figura) no se encontarían nunca, ni siquiera en el infinito. Serían paralelas siempre.

Euclides define las lineas paralelas como lineas rectas situadas en un plano que prolongándose indefinidamente en ambas direcciones no se encuentran. Por consiguiente, decir que dos lineas rectas son paralelas es, simplemente, decir que no se encontraran ni siquiera en el infinito. Sin embargo, los antiguos griegos conocían lineas que, aunque no se cortan en ninguna region finita del plano, se encuentran en el infinito: las lineas asintoticas. Pensaron en la posibilidad de que se juntaran en el infinito.

Puesto que este quinto axioma no se veia claramente como algo autoevidente, y siguiendo la concepción de la época, y de épocas posteriores hasta finales del siglo XIX, según la cual, los axiomas han se ser evidentes, "convincentes", se pensó entonces que no sería realmente un axioma, sino que tendría que obtenerse como conclusión, como un teorema, a partir de los restantes.

Tratóse, entonces, de probar que el axioma de las paralelas es una verdad geométrica decidible, es decir, deducible de los restantes axiomas euclidianos. Seria una verdad demostrable, un teorema, y puesto que al sistema de Euclides se le consideraba completo, es decir capaz de dar de si todos los teoremas de la geometría, seria posible dar con una demostración para el "axioma de la paralelas".

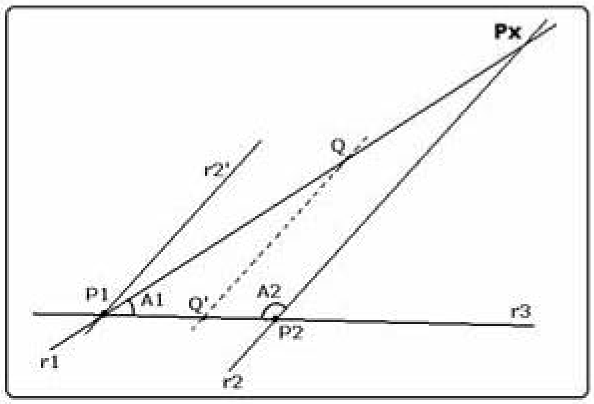
Pero los intentos continuos de demostración de la proposición encontraron siempre el fracaso. Algunos de los intentos mas notables se muestran a continuación.

Proclo (410-485) fué el primero en dejar información a las generaciones posteriores sobre los intentos de demostración hechos hasta entonces, en sus "Comentarios al libro I de Euclides".

Refiere Proclo, por ejemplo, cómo en el siglo I antes del nacimiento de Jesucristo, Posidonio, intentando resolver la cuestión, propuso definir las rectas paralelas como rectas coplanarias y equidistantes, concepto que no es equivalente a la definición de Euclides, pues existen curvas como la hipérbola o la ocoide, que son paralelas a sus respectivas asíntotas según la definición euclidiana, pero no lo son según la definición de Posidonio.

Posteriormente, en el siglo II después de Jesucristo hubo un intento de Ptolomeo, y, en el siglo XIII, de Nasir-Eddin (1201-1274), sin que obtuvieran ningún resultado significativo. Hasta que en el siglo XVII Giordano Vitali (1633-1711) intentó resucitar el concepto de equidistancia de Posidonio para concebir de una forma novedosa el paralelismo, tratando en definitiva de probar que el lugar geométrico de los puntos equidistantes de una recta es, también, una recta.

J. Wallis (1616-1703) abandonó el concepto de equidistancia que habían utilizado en vano, desde la época de Posidonio, Giordano Vitali y otros, estableciendo una demostración a partir de una noción común: "De toda figura existe otra semejante de magnitud arbitraria". El razonamiento de Wallis es, en síntesis, el siguiente:



Sean r1 y r2 dos rectas que están cortadas en los puntos P1 y P2 por la transversal r3. Llamemos A1 y A2 los respectivos ángulos internos del mismo lado formados con r3, construidos de modo que A1 + A2 < 180º. Veamos que en este caso ha de existir un punto Px de corte de ambas rectas, tal como afirma el axioma de Euclides.

Si trazamos por el punto P1 una recta r2' paralela a r2 y la transportamos manteniéndola paralela a r2, cortará a la recta r1 en un punto Q y a r3 en un punto Q', formándose un triángulo P1,Q,Q', que, por la hipótesis de Wallis, será semejante a otro triángulo P1,P2,Px, donde siendo el lado P1P2 proporcional a P1Q, habrá un punto Px de forma que P1Px será proporcional a P1Q y P2Px proporcional a Q'Q. Si es cierto pues, que la figura semejante existe, habrá de existir, necesariamente, el punto Px de corte de ambas rectas r1 y r2. Ambas rectas, pues, se encuentran en algún punto Px, tal como afirma el quinto postulado.

Digamos, sin embargo, que la hipótesis de la que parte Wallis podría presentar menor autoevidencia que el propio axioma euclidiano.

La incógnita sobre el enunciado euclidiano continúa, pues, hasta el siglo XVIII, siglo en el que comienza ya a plantearse la posibilidad de que, aun no siendo un enunciado autoevidente, podría efectivamente ser un axioma independiente del resto de los axiomas euclidanos.

Si los cinco axiomas de Euclides son un conjunto indecidible, representan las reglas del juego en el proceso de inferencia que permite construir toda la geometría euclidiana. Y esto es así tanto si tales axiomas son autoevidentes como si no lo son. Se fué comprendiendo que el hecho de que las reglas del juego fueran autoevidentes, o "convincentes" por sí mismas no tiene nada que ver con el hecho de que sean la base axiomática de una determinada construcción.

Se fué intuyendo la posibilidad de que si en lugar de tomar como quinto postulado el enunciado de Euclides se tomase una afirmación que lo negase, también el conjunto de los nuevos axiomas podría ser base de una nueva construcción que ahora podríamos llamar "no euclidiana".

Antes de llegar esta conclusión, ya entrado el siglo XIX, es necesario considerar los trabajos de otros geómetras como el jesuita Gerolamo Sacheri o Juan Enrique Lambert o los geómetras franceses de finales del siglo XVIII, o bien de Federico Luis Wachter, o Wolfgang Bolyai, los cuales son considerados en la historia de la matemática como los precursores de las geometrías no euclidianas.

3. Los precursores de las construcciones no euclidianas:

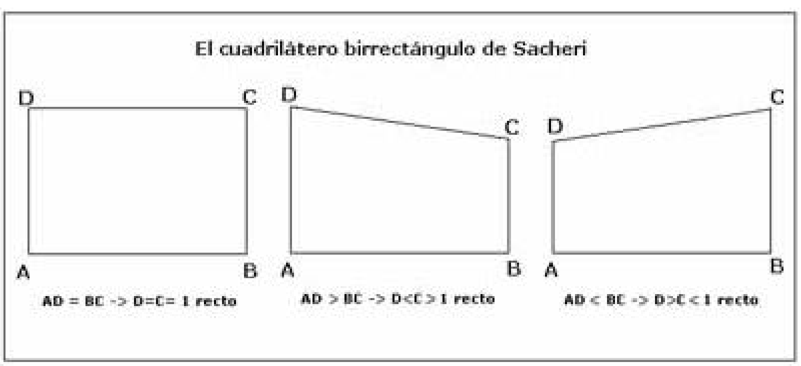
Gerolamo Sacheri (1667-1733):
Su trabajo sobre el quinto postulado de Euclides está descrito en su obra principal "Euclides ab Omni nuoevo vindicatus: sive conatus geometricae quo stabiliantur prime ipsa universal geometricae principia".

Tomando como datos las 26 primeras proposiciones de Euclides, y, en el supuesto de la falsedad del quinto postulado, intenta obtener una consecuencia que le permita afirmar la verdad del postulado mismo.

Hace el análisis mediante una figura plana que llamó "cuadrilátero birrectángulo" y "cuadrilátero birrectángulo isósceles" y que define el primero como un cuadrilátero con dos ángulos consecutivos rectos y el segundo como un cuadrilátero que tiene dos angulos consecutivos rectos y los lados no comunes son iguales.

Las propiedades del cuadrilátero birrectángulo vienen definidas por una proposición-lema, fácil de demostrar desde los postulados de Euclides, que puede enunciarse así: "Si los ángulos A y B son ambos iguales a un recto, se verifica que

a) si los lados AD y BC son iguales, entonces los ángulos C y D son ambos iguales a un recto.
b) si los lados AD y BC son distintos, entonces es mayor el ángulo contiguo a lado menor.



En el supuesto de la posible falsedad del quinto postulado de Euclides, estableció que en el cuadrilátero birrectángulo (A = B = 1 recto y AD = BC) pudieran darse las siguientes hipótesis alternativas:

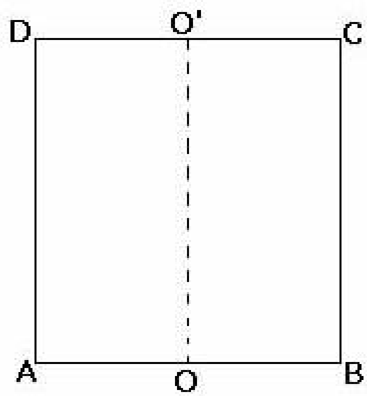
1) que los angulos C y D sean iguales y rectos *(hipótesis del ángulo recto)*.
2) que los ángulos C y D sean iguales y agudos *(hipótesis del ángulo agudo)*.

3) que los ángulos C y D sean iguales y obtusos *(hipótesis del ángulo obtuso)*.

Es inmediato que la hipótesis del ángulo recto corresponde a la construcción euclidiana.

En la hipótesis del ángulo agudo (C = D < 1 recto), la perpendicular OO' por el punto medio del segmento AB, que también pasa por el punto medio del segmento CD, dividirá al cuadrilátero en dos cuadriláteros iguales en donde A = O = O' = 1 recto. por tanto es AB < CD, lo cual implica que: ángulo ACB < ángulo DAC y de esto se deduce que la suma de los tres ángulos es menor que dos rectos: A + B + C < 2 rectos.

En la hipótesis del ángulo obtuso (C = D > 1 recto), actuando análogamente, la perpendicular OO' por el punto medio del segmento AB, que también pasa por el punto medio del segmento CD, dividirá al cuadrilátero en dos cuadriláteros iguales en donde A = O = O' = 1 recto. por tanto es AB > CD, lo cual implica que: ángulo ACB > ángulo DAC y de esto se deduce que la suma de los tres ángulos es menor que dos rectos: A + B + C > 2 rectos.



Prueba Sacheri a continuación que según estemos en la hipótesis del ángulo recto, del ángulo obtuso o del ángulo agudo, la suma de los tres ángulos de un triángulo suman, respectivamente, 180º, mas de 180º, o menos de 180º.

Estos resultados, que obtiene en primer lugar para triángulos rectángulos, los extiende rápidamente al caso de un triángulo cualquiera sin más que descomponerlo en triángulos rectángulos.

Demuestra Sacheri a continuación que en la hipótesis del ángulo recto es verdadero el quinto axioma de Euclides y en el cuadrilátero fundamental la suma de los cuatro ángulos es igual a cuatro rectos.

Intenta descubrir contradicciones en la hipótesis del ángulo agudo, pero no logra evidenciar ninguna contradicción. Ante este fracaso no duda en hacer una afirmación extraordinaria: en la hipótesis del ángulo agudo podría construirse un sistema axiomático para la geometría desde el cual el quinto axioma de Euclides pudiera ser demostrable o refutable.

Juan Enrique Lambert (1728-1777):
La continuación de las investigaciones de Gerolamo Sacheri se deben a Juan Enrique Lambert, que expone sus ideas en su obra "Theorie der parallellinien".

La figura fundamental que utiliza Lambert es lo que llamó "el cuadrilátero trirrectángulo", un rectángulo en el que considera rectos tres de los cuatro ángulos, presentando una alternativa sobre la medida del 4º ángulo.

La hipótesis del ángulo recto conduce inmediatamente al sistema euclidiano. Lambert rebate, como ya habia hecho Sacheri, la hipótsis del ángulo obtuso, estudiando, sin descubrir contradicciones, la hipótesis del ángulo agudo. En esta hipótesis del ángulo agudo demuestra Lambert que la suma de los tres ángulos de un triángulo es menor que dos rectos. Descubre también Lambert que la "deficiencia" de un polígono, esto es, la diferencia entre 2.(n - 2) y la suma de los ángulos del polígono es proporcional a su área.

Lambert sugiere incluso que la geometría que sería válida sobre el plano, de ser lícita la hipótesis del ángulo obtuso, resultaría análoga a la geometría de la superficie esférica. De todas maneras, Lambert, al igual que Sacheri, dejó en suspenso la cuestión del quinto postulado.

Geómetras franceses de finales del siglo XVIII:
Los grandes geómetras de finales del siglo XVIII se ocuparon también del problema. D'alembert propuso llamar "paralela a una recta dada" a cualquier recta complanaria que una dos puntos equidistantes y situados en un mismo semiplano de los dos que define la recta. Sin embargo, es necesario probar que estas paralelas son equidistantes, teorema que D'Alembert propuso a sus contemporáneos.

Una famosa discusión sobre el mismo fué mantenida, por otra parte por los grandes matemáticos Fourier y Monge, estando interesados también Carnot, Laplace y, en particular, Adrian María Legendre.

Adrian Marie Legendre (1752-1833):
En lo que respecta a Adrian María Legendre, sus ideas están resumidas en "Reflexions on the theorem sur la somme des trois angles du triangle". Trata Legendre de descartar la hipótesis sacheriana del ángulo obtuso, estableciendo que en cualquier triángulo la suma de sus tres ángulos es menor o igual que dos rectos.

Dió varias demostraciones, usando razonamientos analíticos y también, erróneamente, de magnitudes infinitas. La obra de Legendre con respecto al tema del quinto axioma de Euclides, no aporta, realmente, nada nuevo a lo que ya se habia logrado asentar.

Wolfgang Bolyai (1775-1856):
Fué compañero de estudios de Gauss en la Universidad de Gotinga. Se ocupó del axioma quinto de Euclides ya desde su época de estudiante. En 1804 envió a Gauss un ejemplar de su "Theoria Parallelarum", que contenían una tentativa de probar la existencia de rectas equidistantes, que Gauss impugnó. Sin embargo, Wolfgang no dejó de ocuparse del tema, llegando a dudar de su demostrabilidad, esto es, de reducir la hipótesis euclidiana. Un notable postulado del que Wolfgang Bolyai deduce fácilmente el de Euclides es este: "Tres puntos no alineados están siempre en una circunferencia".

Federico Luis Wachter(1729-1817):
Fué discípulo de Gauss en la Universidad de Gottinga. Puesto que el postulado de Euclides depende de la posibilidad de trazar un círculo por tres puntos no alineados, se presenta espóntaneamente la idea de presentar la existencia de tal círculo a toda investigación sobre las líneas paralelas. Este fué el intento de Wachter, tratando de establecer que por cuatro puntos arbitrarios del espacio, no coplanarios, pasa una esfera. Sus deducciones tienen, sin embargo, un carácter intuitivo.

4. Fundadores de las construcciones no euclidianas:

Gracias a los trabajos anteriormente mencionados, una serie de matemáticos de principios del siglo XIX, pudieron iniciar en la geometría moderna una revolución de extraordinario alcance: la construcción de las geometrías no euclidianas.

Pueden ser considerados fundadores de las geometrías no euclidianas a los siguientes matemáticos:

a) Carlos Federico Gauss.
b) Fernando Carlos Schweikart.
c) Francisco Adolfo Taurinus.
d) Nicolas Ivanovich Lobatchevski.
e) Juan Bolyai.

a) Carlos Federico Gauss (1777-1855):
Al parecer Gauss fue el primero en tener una concepción clara de una geometría independiente del quinto postulado euclidiano; estas ideas solo las publicó Gauss después de ver las obras de Lobatschefski y Juan Bolyai.

Es así que tanto Gauss como Bolyai se ocuparon, en la Universidad de Gottinga del problema de las paralelas, pero es solo a partir de 1813 cuando desarrolla y formula los teoremas fundamentales de un cuerpo de doctrina que denominó "geometría antieuclidiana", luego "geometría astral" y , finalmente, "geometría no euclidiana".

La posible incomprensión de sus contemporáneos hizo que Gauss reservase sus meditaciones sobre estos temas. En sus primeros apuntes daba una definición bastante aceptable de rectas paralelas: “Si la recta AM es coplanaria y no incidente sobre BN, entonces AM se dice paralela a BN".

Estos apuntes los interrumpió Gauss al conocer en, 1832 la obra “Geometría absoluta”, de Juan Bolyai.

b) Fernando Carlos Schweikart (1780-1856):
Estudió Derecho y Matemática en la Universidad de Marburgo. En diciembre de 1818 consigno a Gerling un pliego para Gauss conteniendo sus ideas sobre su “Geometría astral”, que es la no euclidiana de Gauss, correspondiente al sistema de Sacheri y Lambert en la hipótesis de ángulo agudo. En marzo de, 1819, Gauss, correspondiendo por Gerling, ensalza a Schweikart y declara que concuerda con todo cuanto contiene el pliego enviado y concluye determinando el limite superior del área de un triangulo bajo la forma:

$$A = \frac{\pi c}{\left[\log\ hip\left(1+\sqrt{2}\right)\right]^2}$$

donde c es la llamada constante de Schweikart.

c) Francisco Adolfo Taurinus:
Sobrino de Schweikart, fue inducido por su tio a ocuparse del asunto de las nuevas geometrías.

Construye Taurinus una geometría basada en la hipótesis del angulo agudo en sus obras “Theorie der parallellinien” (1825) y “Geometría prima elemento”.

En su desarrollo inicial parte de la formula de trigonometría esferica:

$$\cos\frac{a}{k} = \cos\frac{b}{k}.\cos\frac{c}{k} + sen\frac{b}{k}.sen\frac{c}{k}.\cos\alpha \quad [1]$$

y en ella sustituye el radio esferico *k* por *i.k*:

$$ch\frac{a}{k} = ch\frac{b}{k}.ch\frac{c}{k} - sh\frac{b}{k}.sh\frac{c}{k}.\cos\alpha \quad [2]$$

Que es la formula fundamental de la Geometría Logaritmico-esferica, en la que la suma de los ángulos de un triángulo es menor que 180º. En efecto, basta hacer referencia, por sencillez, al caso equilátero (a = b = c) y resolviendo respecto a $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{ch^2\frac{a}{k} - ch\frac{a}{k}}{sh^2\frac{a}{k}} = \frac{ch\frac{a}{k}}{1 + ch\frac{a}{k}} = \frac{1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{a}{k}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{a}{k}\right)^4 + \ldots}{2 + \frac{1}{2!}\left(\frac{a}{k}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{a}{k}\right)^4 + \ldots} > \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha < 60^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma < 180^\circ$$

Es, ademas, inmediato que:

$$\lim_{k \to \infty} \cos\alpha = \frac{1}{2}$$

Y en general, la formula [l] se convierte para $k \to \infty$ en:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\alpha$$

que es una de las fórmulas fundamentales de la trigonometría plana, conocida como "teorema del coseno".

Análogamente, la formula de trigonometría esferica

$$\cos\alpha = -\cos\beta.\cos\gamma + sen\beta.sen\gamma.\cos\frac{a}{k}$$

pasa en la geometría logaritmico-esferica a ser

$$\cos\alpha = -\cos\beta.\cos\gamma + sen\beta.sen\gamma.ch\frac{a}{k}$$

Para $\alpha = 0$ y $\gamma = 90^\circ$ se obtiene:

$$ch\frac{a}{k} = \frac{1}{sen\beta}$$

El triangulo correspondiente a esta formula tiene un angulo nulo y los dos lados, que lo forman son de longitud infinita y paralelos. El angulo β es funcion de a y podremos llamarlo "angulo de paralelismo" correspondiente a la distancia. Para $\beta = 45^\circ$, el segmento BC es la constante de Schweikart C:

$$ch\frac{c}{k} = \sqrt{2}$$

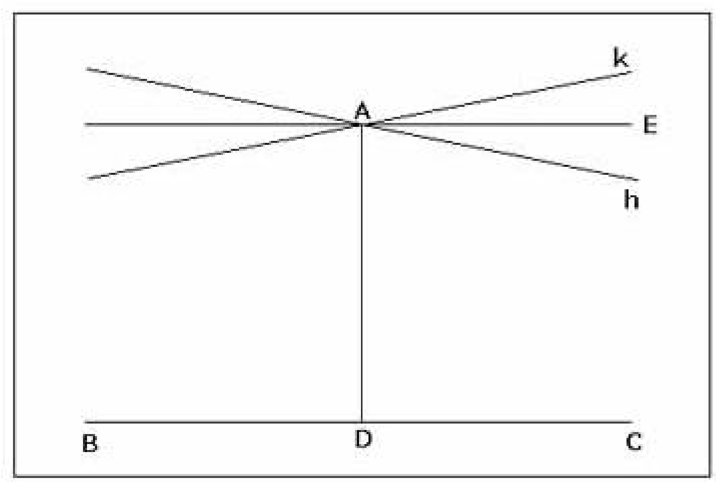
De donde, resolviendo respaecto a k:

$$k = \frac{c}{\log\left(1+\sqrt{2}\right)}$$

Taurinus reconocio finalmente que la Geometría esferica corresponde a la hipótesis del angulo obtuso y que la geometría euclidea constituye un eslabon de enlace entre la geometría esferica y la geometría logaritmico-esferica. En efecto, si el radio k varia de un modo continuo del campo real al campo puramente imaginario, pasando por el infinito, se pasa del sistema esferico al sistema logaritmico esferico a traves del de Euclides.

d) Nicolás Ivanovich Lobatschefski (1793-1856) :

Estudió matemática en la Universidad de Kazan, bajo la dirección del aleman Barels. En 1826 expone los fundamentos de una geometría más general que la ordinaria de Euclides, en la que por un mismo punto pasan dos paralelas a una recta dada y donde la suma de los angulos de un triangulo es menor, que dos rectos. Es realmente la misma geometría concebida por las mentes de Gauss, Schweikart y Taurinus, y que Lobatschefski llama ahora Geometría Imaginaria, o Pangeometria.



Lobatshefski considera un haz de rectas, una recta BC no perteneciente a tal haz, la perpendicular AD por A a BC y la perpendicular a AD por A, esto es, AE. Esta recta es, en el sistema de geometría euclidea, la unica que no corta a BC. En la geometría de Lobatschefski existen en el haz A otras rectas no secantes BC; las no secantes estan separadas de las secantes por las rectas h, k, que no encuentran a BC, y que son paralelas, la h por la derecha y la k por la izquierda. El angulo formado por la perpendicular AB con una de las paralelas h y k es el angulo de paralelismo que corresponde a la distancia AD, denotándose por $\pi(AB)$.

La parte mas importante de la Geometría Imaginaria es la constituida por los sistemas de fórmulas trigonométricas. Para deducirlas introduce Lobatschefski dos nuevas figuras: El *oriciclo* (círculo de radio infinito), y la *orisfera*, (esfera de radio infinito). Si en el triangulo plano ABC, $\pi(a)$, $\pi(b)$, $\pi(c)$ son los angulos de paralelismo correspondientes a los lados, la formula fundamental de Lobatschefski es:

$$\cos A.\cos \pi(b).\cos \pi(c) + \frac{sen\ \pi(b).sen\ \pi(c)}{sen\ \pi(a)} = 1$$

Puede pasarse de esta formula a la de Taurinus y viceversa, bastando observar que es $\beta = \pi(a)$. Para el paso inverso basta aplicar la relacion dada por Lobatschefski

$$tg\frac{1}{2}\pi(x) = a^{-x}$$

Que es la fórmula [2] de Taurinus bajo forma diferente.

De las formulas obtenidas por Lobatschefski en su Pangeometria, se deducen las importantes conclusiones siguientes:

1. Para triangulos infinitesimales, pueden ser sustituidas las formulas de la Geometría Imaginaria por las formulas de la Geometría Ordinaria.
2. La sustitución de los lados a,b,c, en lados puramente imaginarios ia, ib, ic convierte las formulas de la Trigonometría imaginaria en formulas de la trigonometría esferica.
3. Estableciendo en el plano y en el espacio un sistema de coordenadas semejante al cartesiano ordinario, el posible, con los metidos de la geometría analítica, calcular las longitudes de las lineas, las areas de las superficies y los volúmenes de los solidos.

e) Juan Bolyai (1802-1860):
Hijo de Wolfgang Bolyai y oficial en el ejercito austriaco, que descubrio en 1823 la formula fundamental:

$$e^{-\frac{a}{k}} = tg\frac{1}{2}\pi(a)$$

Tal formula, que liga al angulo de paralelismo $\pi(a)$ al correspondiente segmento, es la primera de las descubiertas que parmite ahondar en la verdadera naturaleza del problema de las paralelas. Los mas importantes resulltados de la obra de Juan Bolyai se muestran en un apéndice al "Tentamen" de Wolfgang Bolyai:

1. Definición de las paralelas u de sus propiedades em forma independiente al postulado euclideo.
2. Circulo u esfera de radio infinito. La Geometría sobre la esfera de radio infinito es idéntica a la geometría plana ordinaria.
3. La Trigonometría esferica es independiente del postulado de Euclides. Demostración directa de las formulas.
4. Trigonometría plana en el caso no euclideo. Aplicaciones al calculo de las area de los volúmenes.
5. Problemas resolubles elementalmente. Construccion de un cuadrado equivalente a un circulo en la hipótesis de que sea falso el postulado V de Euclides.

Aunque Lobatschefski habia dado mayor desarrollo ala Geometría imaginaria, sobre todo en su aspecto analítico, Bolyai ha tratado mas profundamente la cuestion de la dependencia e independencia de las proposiciones Geométricas respecto del postulado euclideo. Bolyai pone de manifiesto aquellas proposiciones que en la Geometría ordinaria no dependen de aquel postulado, llamadas por el, absolutamente verdaderas, y pertenecientes a la ciencia absoluta del espacio.

5. Conclusión:

Los trabajos mencionados constituyen, en esencia, la fundación de la nueva geometria, o mas bien, la asimilación de un nuevo concepto de geometría y de la misma ciencia matemática.

La geometría no euclidiana, en sus desarrollos sucesivos de finales del siglo XIX y principios del siglo XX, ha seguido dos direcciones bien definidas, a saber, la metricodiferencial y la Proyectiva.

El desarrollo metricodiferencial de la geometría no Euclidiana tiene como máximo representante Bernhard Riemann, que ya en 1954 compone su celebre Disertación publicada a su muerte por Dedekind.

Riemann desarrolla la hipótesis del angulo obtuso, hipótesis que en manos de Gerolamo Sacheri habia resultado contradictoria, y ello se debia a que suponia la recta infinita. Riemann sustituyó este concepto de recta infinita por el mas general de limitada, compatible tanto con la hipótesis de recta infinita (abierta) como con la de recta finita (cerrada).

En la hipótesis de angulo obtuso, todas las rectas que pasan por un punto a exterior a una recta r de un plano, cortan a r.

A pesar de la claridad interna de las geometrías no eucllidianas, la mayoria de los matemáticos interesados en el tema siguieron creyendo que si bien no habian sido descubiertas incompatibilidades logicas, podría ser posible que apareciesen tales incompatibilidades al hacer un más profundo estudio de las propiedades de dichas Geometrías.

Esta situación cambio radicalmente gracias a un trabajo de E. Beltrami: “Saggio di interpretazione della geometría non-euclidea” (1868). Beltrami demostró que si se consideran las geodesicas de una superficie de curvatura negativa constante, y se las interpreta con rectas, mientras que los ángulos y las longitudes son interpretados de acuerdo con los métodos ordinarios de la geometría diferencial, se obtiene una geometría que verifica la hipótesis del angulo agudo. De esta manera, Beltrami probo que la compatibilidad de la geometría de Lobatschefski-Bolyai es consecuencia de la compatibilidad de la geometría euclidea, ya que cualquier incompatibilidad en la primera supondría una incompatibilidad en la teoria de las superficies de curvatura negativa constante, que esta basada en los postulados de Euclides.

Hoy ya se conoce que la Geometría de Riemann puede ser interpretada sobre una esfera, considerando los circulos máximos como rectas, con tal que identifiquemos dos puntos diametralmente opuestos (en otro caso no se verificaria que dos puntos determinan siempre una recta unica). La equivalencia logica de las tres geometrías quedo asi completamente establecida.

En cuanto al desarrollo de las nuevas geometrías en la dirección proyectiva, cabe citar en este contexto los nombres de Daguerre, Cayley y Klein.

Laguerre dio la siguiente definición proyectiva de angulo: el angulo es proporcional al logaritmo de la razon doble del haz formado por las dos rectas (cuyo angulo se define) y las dos rectas isótropas que pasan por el vértice del haz. Es definición coincidente con la clásica.

Cayley subordino la geometría métrica a la proyectiva definiendo la distancia entre dos puntos como proporcional al logaritmo de la razon doble de los dos puntos (cuya distancia se mide) y de la intersección de la recta que los une con el absoluto (la cónica impropia).

Klein trabajó principalmente en probar la consistencia interna de las nuevas geometrías, en especial en lo que respecta al establecimiento de la validez de la geometría proyectiva.