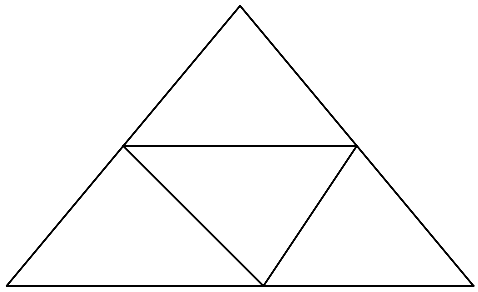
La Geometría Fractal

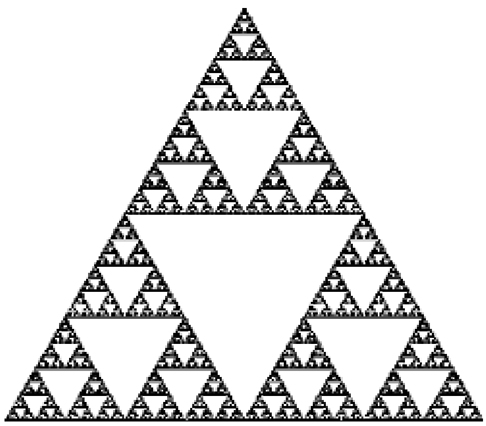
Joaquín González Alvarez

Un fractal es un ente geométrico el cual en su desarrollo espacial se va reproduciendo a si mismo cada vez a una escala menor. Una característica esencial de los fractales consiste en que si observamos digamos, con una lupa, una parte cualquiera del mismo, ésta reproduce a escala menor la figura total del fractal.

Como primer ejemplo vamos a presentar la construcción del fractal conocido como Triángulo o Alfombra de Sierpinski. Se parte de un triángulo equilátero. Se marcan los puntos medios de cada lado y se unen por segmentos rectilíneos con lo que aparecerán 4 triángulos. El triángulo del medio se elimina. El procedimiento descrito se reitera en cada triángulo no suprimido una y otra vez.



Boceto de proceso inicial para el fractal de Sierpinski.



Algo mas que identifica a los fractales es el hecho de que el número de sus dimensiones es fraccionario y no 1, 2, o 3 como ocurre en la geometría habitual.

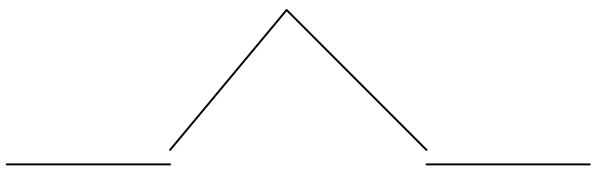
Para calcular la dimensión de un fractal se lleva a cabo atendiendo al concepto de dimensión de Hausdorff para explicar la cual utilizaremos el cálculo de algo conocido como es la dimensión de un cubo. Marcaremos los puntos medios de todas sus aristas. Guiándonos por estos puntos haremos los cortes necesarios con algo semejante a un cuchillo para dividirlo en 8 cubos iguales. Para aplicar la fórmula de la dimensión de Hausdorff se llama N al número de partes en que queda dividido el cuerpo inicial, D a la dimensión y R al número de partes en que se dividió cada arista. La fórmula de Hausdorff la escribiremos así: $D=\log N/\log R$.

Para el ejemplo del cubo: N=8, R=2, al sustituir en la fórmula tendremos para la dimensión del cubo; $D=\log 8/\log 2$, lo cual nos da 3 como ya sabíamos pero ha valido la pena el trabajo para mostrar como aplicaremos ese procedimiento para determinar la dimensión de un fractal caso en el que no podemos aplicar otro procedimiento.

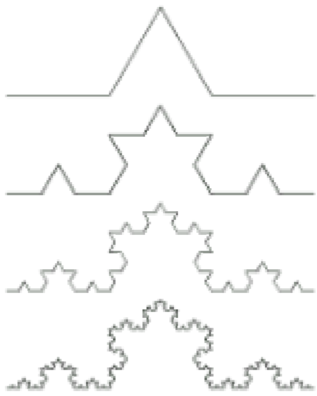
Veamos la dimensión de Sierpinski para lo cual recordemos que se obtuvieron 3 triángulos y cada arista se dividió en 2 partes por lo que $D=\log 3/\log 2$ lo cal nos da: 1,58496, un número fraccionario , característica distintiva, como ya dijimos, de los fractales.

Para mostrar otras sorprendentes propiedades de algunos fractales, las mostraremos describiendo uno de los mas conocidos: la Curva de Koch, figura creada por Helge von Koch en 1904 cuando aún Benoit de Mandelbrot no había establecido la Teoría de los Fractales a mediados del pasado siglo XX y por tanto la curva en cuestión no recibió la denominación de fractal. La Curva de Koch se construye mediante el siguiente algoritmo. Se parte de un segmento (en este contexto llamaremos arista a estos segmentos), de longitud l al cual se le divide en 3 partes iguales (R=3). Tomando como base al segmento central, levantamos un triángulo equilátero de lado l/3 y se borra la base, Se tienen ahora 4 nuevas aristas (N=4). Se aplica la fórmula de Hausdorff: $D=\log 4/\log 3$ con lo que obtenemos D=1,2619. El procedimiento se irá repitiendo teóricamente en cada arista que surja hasta el infinito. Las nuevas propiedades las veremos en una variante de la Curva de Koch llamada Copo de Nieve. Para el Copo de Nieve se parte de un triángulo equilátero y en cada lado se ejecuta el procedimiento antes descrito para la curva de Koch. Nos damos cuenta que al multiplicarse las aristas el perímetro de la figura va aumentando. Dicho perímetro viene dado por la expresión $P=(3(4/3)^n)l$ donde n número de iteraciones y l longiud de la arista o segmento inicial. Como teóricamente las iteraciones se pueden hacer

infinitas, aplicando límites en la expresión del perímetro, n tenderá a infinito con lo cual P lo hará también y tendremos el insólito hecho de que el Copo de Nieve es una figura de área finita i con contorno infinito!

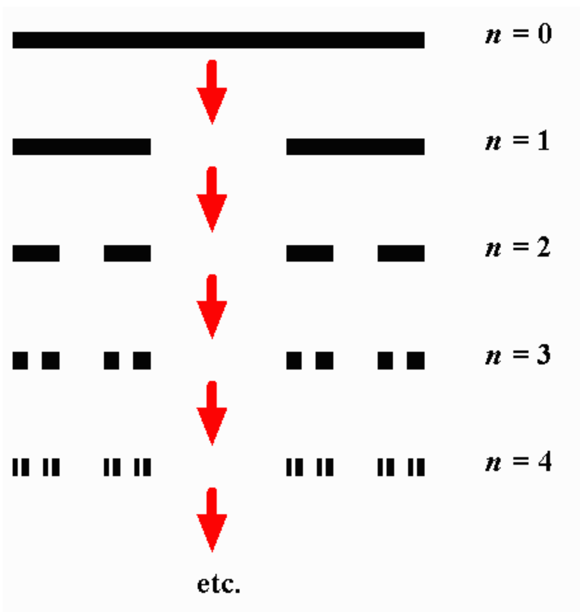


Boceto de proceso inicial de los fractales de Koch



Un fractal que, aunque estéticamente atractivo, reviste sin embargo gran importancia, es el conocido como conjunto de Cantor. Se construye partiendo de un segmento rectilíneo el cual se divide en 3 partes (R=3), se borra la porción central con lo que quedarán 2 porciones (N=2) a cada una de las cuales se le aplicará el mismo procedimiento y así seguirán las iteraciones indefinidamente al cabo de un gran número de las cuales quedarán una serie de puntos guardando el ordenamiento fratal del Conjunto de Cantor. La importancia de éste se basa en que en la situación previa al Caos en la Teoría que de éste trata, los números que resultan de la iteración del Mapa Logístico, si se sitúan como puntos en un eje de abscisas (o de ordenadas), quedan dispuestos como los fragmentos que resultan de las iteraciones del citado fractal.

Boceto de proceso de inicio del fractal de Cantor.



No todos los fractales se construyen mediante algoritmos como los vistos hasta ahora. Otros como los muy bellos de Mandelbrot y Julia, resultan de la iteración de mapas del tipo $z_{n+1}=z_n^2 + c$ donde las z representan números complejos del tipo a+bi. De modo que el anterior mapa podrá tener la forma;

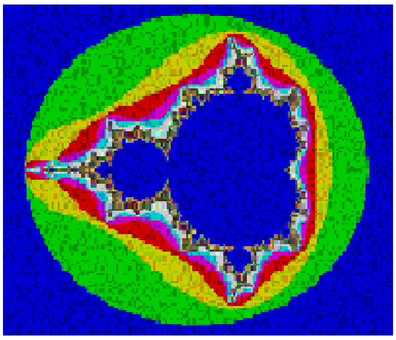
$$a+bi = (c+di)^2+ (e+fi)$$

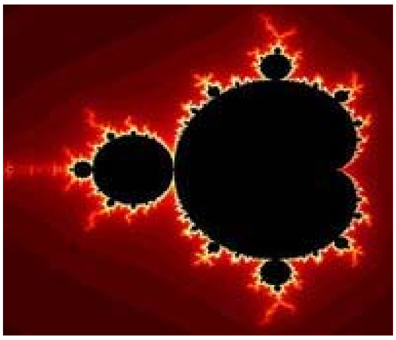
y por tanto:

$$a = c^2-d^2+e$$

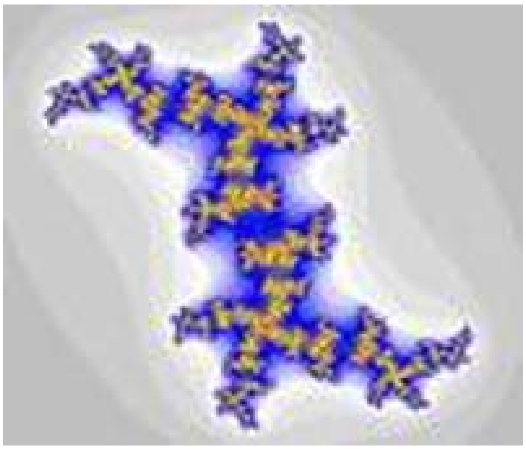
$$b = 2cd+f$$

Ejemplo sea el punto inicial del fractal (c, d) = (1,0) y la constante (0,1) con lo que a=1 y b=1, así que el siguiente punto será (1,1). Iterando el que le sigue es (0,3) y continuando el proceso se irán obteniendo mas puntos y conformándose el fractal.





Ejemplos del fractal de Mandelbrot



Ejemplos del fractal de Juliá

Fractales aparecen en el arte, pintura fractal, escultura fractal, en la música. Los encontramos en aplicaciones técnicas como la compresión de imágenes y en la naturaleza tenemos aproximados fractales, los ejemplos de la coliflor, los helechos y otros muchos.

Gastón Juliá (1893-1978)

Benoit Mandelbrot, año 2007

Podemos decir que la Geometría Fractal junto con la Teoría del Caos constituyen los pilares de la Posmodernidad Científica.

Joaquín GONZÁLEZ ÁLVAREZ
j.gonzalez.a@hotmail.com