Ajuste de funciones
Ajuste con funciones ortogonales en un intervalo

1. Idea de Interpolación y de ajuste. Soporte y base de ajuste:

Es frecuente encontrar en el análisis numérico funciones $y=f(x)$ definidas por tablas, de forma que solo se conocen los valores que toman en un conjunto finito de puntos, $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$:

x_0	x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n
y_0	y_1	y_2	...	y_{n-1}	y_n

Con la necesidad de conocer valores de tal función $f(x)$ en puntos distintos de los que ya figuran en la tabla.

El problema de la interpolación consiste en la determinación de una función $g(x)$ que en los puntos de la tabla dada, $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$, toma los mismos valores, $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n$, de la función f(x) tabulada, mientras que en los puntos intermedios se toman como valores de $f(x)$ los valores que tome la función interpoladora $g(x)$.

Son muchos los fenómenos experimentales que se comportan en ciertos intervalos como funciones de determinadas variables. Realizando su medición en un número finito de puntos se obtendrá una tabla y, al interpolar, una función que describe con un cierto error el fenómeno tabulado.

Teniendo en cuenta el espacio de las funciones de una variable real y en él, el conjunto de $n+1$ funciones $g_0(x), g_1(x), \ldots, g_{n-1}(x), g_n(x)$, de forma que cualquier subconjunto de las mismas es linealmente independiente, se trata de encontrar un polinomio generalizado

$$p_n(x)=c_0.g_0(x)+c_1.g_1(x)+\ldots+c_{n-1}.g_{n-1}(x)+c_n.g_n(x)$$

tal que

$$p_n(x_i)=y_i,\ i=0,1,\ldots,n-1,n$$

Los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$, se denominan soporte de la interpolación, y el error cometido depende tanto de la base de la interpolación, las funciones $g_0(x), g_1(x), \ldots, g_{n-1}(x), g_n(x)$, como del criterio escogido para la determinación de los coeficientes $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n$, del polinomio generalizado $p_n(x)$.

Sin embargo, cuando se conoce una base de $m+1$ funciones

$$g_0(x), g_1(x), \ldots, g_{m-1}(x), g_m(x)$$

con m<n, es decir, en número menor que el número de puntos del soporte, el problema de determinar las $p(x_i)=y_i,\ i=0,1,\ldots,n-1,\ n$, no tiene solución, siendo preciso idear otros métodos y otros criterios de aproximación. El problema ahora es el conocido como *problema del ajuste de funciones*.

En lo que sigue consideramos el ajuste de una función en un intervalo cerrado como soporte, utilizando como base del ajuste un conjunto de funciones que sean ortonormales en dicho intervalo cerrado, y determinaremos los coeficientes del polinomio generalizado del ajuste minimizando la norma euclidiana del vector de errores, esto es, del vector definido por las diferencias entre los valores dados en los puntos del soporte por la función a ajustar y los valores que en tales puntos toma el polinomio generalizado.

2. Ajuste con funciones ortogonales en un intervalo

2.1. Definición:

El proceso de ajuste con polinomios ortogonales puede extenderse de forma natural a un conjunto de funciones que sean ortogonales u ortonormales en un intervalo cerrado.

Sea el conjunto de funciones reales de una variable real

$$\left\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_m(x)\right\}$$

tales que en el intervalo $\left[a,b\right]$ se verifica que

$$\int_a^b \varphi_j(x)\varphi_k(x).dx = \delta_{jk}.h \equiv \begin{cases} 0, & si\ j \neq k \\ h, & si\ j = k \end{cases}$$

diremos que se trata de un conjunto de funciones ortogonales en el intervalo cerrado $\left[a,b\right]$. Si $h=1$ tales funciones se dicen ortonormales en dicho intervalo.

2.2. Ajuste:

Si aproximamos en el intervalo $\left[a,b\right]$ la función $y=f(x)$ por una combinación lineal $\sum_{j=0}^{m} c_j.\varphi_j(x)$ de funciones ortonormales, se tiene que si es $e(x) = y - \sum_{j=0}^{m} c_j.\varphi_j(x)$ el error cometido en cada punto *x* del intervalo [a,b] del ajuste, la norma euclidiana del vector de errores vendrá dada por

$$\left|e\right|^2 = \int_a^b e(x)^2.dx = \int_a^b \left(y - \sum_{j=0}^{m} c_j.\varphi_j(x)\right)^2.dx$$

e imponiendo la condición de mínimo:

$$\frac{\partial}{\partial c_k}\left|e\right|^2 = \frac{\partial}{\partial c_k}\int_a^b \left(y - \sum_{j=0}^{m} c_j.\varphi_j(x)\right)^2.dx = \int_a^b 2\left(y - \sum_{j=0}^{m} c_j.\varphi_j(x)\right).\frac{\partial}{\partial c_k}\left(y - \sum_{j=0}^{m} c_j.\varphi_j(x)\right).dx =$$

$$= \int_a^b -2\left(y - \sum_{j=0}^{m} c_j.\varphi_j(x)\right).\varphi_k(x).dx = 2\int_a^b \sum_{j=0}^{m} c_j.\varphi_j(x).\varphi_k(x).dx - 2\int_a^b y.\varphi_k(x).dx = 0$$

por tanto

$$\sum_{j=0}^{m} c_j \int_a^b \varphi_j(x)\varphi_k(x).dx - \int_a^b y.\varphi_k(x).dx = 0 \rightarrow c_k - \int_a^b y.\varphi_k(x).dx = 0 \rightarrow c_k = \int_a^b y.\varphi_k(x).dx$$

[2.2_1]

resultando, para la función de ajuste:

$$p(x)=\sum_{k=0}^{m}c_k\varphi_k(x)=\sum_{k=0}^{m}\left(\int_a^b y.\varphi_k(x).dx\right)\varphi_k(x)$$

2.3. Medida de la aproximación:
Para establecer la medida de la aproximación en el ajuste, determinamos la norma euclidiana del vector de errores. Cuanto menor sea tal norma, menor será el error cometido en el proceso de ajuste:

$$|e|^2=\int_a^b\left(y-\sum_{j=0}^{m}c_j.\varphi_j(x)\right)^2.dx=\int_a^b\left(y^2-2.y\sum_{j=0}^{m}c_j.\varphi_j(x)+\sum_{j=0}^{m}c_j.c_k\varphi_j(x)\varphi_k(x)\right).dx=$$

$$=\int_a^b y^2.dx-2\int_a^b y\sum_{j=0}^{m}c_j.\varphi_j(x).dx+\sum_{j=0}^{m}c_j.c_k\int_a^b\varphi_j(x)\varphi_k(x).dx=$$

$$=\int_a^b y^2.dx-2\sum_{j=0}^{m}c_j.\int_a^b y\varphi_j(x).dx+\sum_{j=0}^{m}c_j.c_k\int_a^b\varphi_j(x)\varphi_k(x).dx=\int_a^b y^2.dx-2\sum_{j=0}^{m}c_j^2+\sum_{j=0}^{m}c_j^2=\int_a^b y^2.dx-\sum_{j=0}^{m}c_j^2$$

por tanto:

$$|e|^2=\int_a^b y^2.dx-\sum_{i=0}^{m}c_j^2$$

3. El ejemplo de las funciones trigonométricas.

3.1. La ortogonalidad de las funciones trigonométricas en $[0,2\pi]$
Sea el conjunto de funciones trigonométricas:

$$\{\cos kx, senkx\}_0^{k=m}=\{\cos 0,\cos x,\cos 2x,....,\cos mx, sen0, senx, sen2x,...senmx\}$$

y veamos que son ortogonales en el intervalo $[0,2\pi]$:
- el producto de cosenos:

$$\int_0^{2\pi}\cos jx.\cos kx.dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos(j-k)x+\cos(j+k)x).dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(j-k)x.dx+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(j+k)x.dx=$$

$$=\frac{1}{2(j-k)}sen(j-k)x\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{2(j+k)}sen(j+k)x\Big|_0^{2\pi}=\frac{1}{2(j-k)}(0-0)+\frac{1}{2(j-k)}(0-0)=0$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 jx.dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2jx).dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}dx+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2jx.dx=\frac{1}{2}(2\pi-0)+\frac{1}{4j}(\cos(2j.2\pi)-\cos 0)=$$

$$=\pi+0=\pi$$

por tanto es

$$\int_0^{2\pi}\cos jx.\cos kx.dx=\pi\delta_{jk}=\begin{cases}0, & si\ j\neq k\\ \pi, & si\ j=k\end{cases}$$

- el producto de senos:

$$\int_0^{2\pi} senjx.senkx.dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(sen(j-k)x - sen(j+k)x).dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} sen(j-k)x.dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} sen(j+k)x.dx =$$

$$= \frac{-1}{2(j-k)}\cos(j-k)x\Big|_0^{2\pi} + \frac{-1}{2(j+k)}\cos(j+k)x\Big|_0^{2\pi} = \frac{-1}{2(j-k)}(1-1) + \frac{-1}{2(j-k)}(1-1) = 0$$

$$\int_0^{2\pi} sen^2 jx.dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1-\cos 2jx\right).dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2jx.dx = \frac{1}{2}(2\pi - 0) - \frac{1}{4j}(\cos(2j.2\pi) - \cos 0) =$$

$$= \pi - \frac{1}{4j}(1-1) = \pi$$

por tanto, se cumple también que

$$\int_0^{2\pi} senjx.senkx.dx = \pi\delta_{jk} = \begin{cases} 0, & si\ j \neq k \\ \pi, & si\ j = k \end{cases}$$

- producto de seno por coseno:

$$\int_0^{2\pi} senjx.\cos kx.dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(sen(j+k)x + sen(j-k)x).dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} sen(j+k)x.dx + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} sen(j-k)x.dx =$$

$$= \frac{-1}{2(j+k)}\cos(j+k)x\Big|_0^{2\pi} + \frac{-1}{2(j-k)}\cos(j-k)x\Big|_0^{2\pi} = \frac{-1}{2(j+k)}(1-1) + \frac{-1}{2(j-k)}(1-1) = 0$$

en definitiva es

$$\int_0^{2\pi} senjx.\cos kx.dx = 0$$

así, pues, veamos como realizar el ajuste con un conjunto de estas funciones en el intervalo de ortogonalidad.

3.2. Ajuste:

Aproximemos en el intervalo $\left[0,2\pi\right]$ la función $y = f(x)$ por una combinación lineal, $\sum_{k=0}^{m}(a_k \cos kx + b_k senkx)$, de estas funciones ortogonales. Se tiene, repitiendo el proceso descrito en el apartado 2.2:

$$|e|^2 = \int_0^{2\pi}\left(y - \sum_{j=0}^{m}(a_j \cos jx + b_j senjx)\right)^2 .dx$$

Derivamos primero respecto a los coeficientes a_k:

$$\frac{\partial}{\partial a_k}|e|^2 = \frac{\partial}{\partial a_k}\int_0^{2\pi}\left(y - \sum_{j=0}^{m}(a_j \cos jx + b_j senjx)\right)^2 .dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\left(y - \sum_{j=0}^{m}(a_j \cos jx + b_j senjx)\right).\frac{\partial}{\partial a_k}\left(y - \sum_{j=0}^{m}(a_j \cos jx + b_j senjx)\right).dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} -2\left(y - \sum_{j=0}^{m}(a_j \cos jx + b_j senjx)\right).\cos kx.dx =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\sum_{j=0}^{m}(a_j \cos jx + b_j senjx).\cos kx.dx - 2\int_0^{2\pi} y.\cos kx.dx = 0$$

por tanto

$$\sum_{j=0}^{m} a_j \int_0^{2\pi} \cos jx.\cos kx.dx + \sum_{j=0}^{m} b_j \int_0^{2\pi} senjx.\cos kx.dx - 2\int_0^{2\pi} y.\cos kx.dx = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \pi a_k - \int_0^{2\pi} y.\cos x.dx = 0 \rightarrow a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y.\cos kx.dx$$

derivamos ahora con respecto a los coeficientes b_k:

$$\frac{\partial}{\partial b_k}|e|^2 = \frac{\partial}{\partial b_k}\int_0^{2\pi}\left(y - \sum_{j=0}^{m}(a_j \cos jx + b_j senjx)\right)^2 .dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\left(y - \sum_{j=0}^{m}(a_j \cos jx + b_j senjx)\right).\frac{\partial}{\partial b_k}\left(y - \sum_{j=0}^{m}(a_j \cos jx + b_j senjx)\right).dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} -2\left(y - \sum_{j=0}^{m}(a_j \cos jx + b_j senjx)\right) senkx.dx =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\sum_{j=0}^{m}(a_j \cos jx + b_j senjx).senkx.dx - 2\int_0^{2\pi} y.senkx.dx = 0$$

$$\sum_{j=0}^{m} a_j \int_0^{2\pi} \cos jx.senkx.dx + \sum_{j=0}^{m} b_j \int_0^{2\pi} senjx.senkx.dx - 2\int_0^{2\pi} y.senkx.dx = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \pi b_k - \int_0^{2\pi} y.senx.dx = 0 \rightarrow b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y.senkx.dx$$

En definitiva, los coeficientes de la función de ajuste son

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x).\cos kx.dx,\ \ b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x).senkx.dx,\ \ k = 0,1,...,m$$

Con lo que la podemos expresar la función de ajuste en la forma:

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{m}\left(\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x).\cos kx.dx\right)\cos kx + \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x).senkx.dx\right)senkx\right)$$

3.3. Medida de la aproximación:
Como en los apartados anteriores, determinaremos también aquí la norma euclidiana del vector de errores.

$$|e|^2 = \int_0^{2\pi}\left(y - \sum_{k=0}^{m}(a_k \cos kx + b_k senkx)\right)^2 .dx =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(y^2 - 2y\sum_{k=0}^{m}(a_k \cos kx + b_k senkx) + \sum_{\substack{k=0 \\ j=0}}^{m}(a_k \cos kx + b_k senkx)(a_j \cos jx + b_j senjx)\right).dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} y^2 .dx - 2\sum_{k=0}^{m}\int_0^{2\pi} y(a_k \cos kx + b_k senkx).dx + \sum_{k=0}^{m} a_k a_j \int_0^{2\pi} \cos kx.\cos jx.dx +$$

$$+\sum_{k=0}^{m} b_k b_j \int_0^{2\pi} senkx.senjx.dx + \sum_{k=0}^{m} a_k b_j \int_0^{2\pi} \cos kx.senjx.dx + \sum_{k=0}^{m} b_k a_j \int_0^{2\pi} senkx.\cos jx.dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} y^2.dx - 2\sum_{k=0}^{m} a_k \int_0^{2\pi} y\cos kx.dx - 2\sum_{k=0}^{m} b_k \int_0^{2\pi} ysenkx.dx + \sum_{k=0}^{m} a_k a_j \pi.\delta_{kj} + \sum_{k=0}^{m} b_k b_j + \pi.\delta_{kj} +$$

$$+\sum_{k=0}^{m} a_k b_j.0 + \sum_{k=0}^{m} b_k a_j.0 = \int_0^{2\pi} y^2.dx - 2\pi\sum_{k=0}^{m} a_k^2 - 2\pi\sum_{k=0}^{m} b_k^2 + \pi\sum_{k=0}^{m} a_k^2 + \pi\sum_{k=0}^{m} b_k^2 =$$

$$= \int_0^{2\pi} y^2.dx - \pi\sum_{k=0}^{m} a_k^2 - \pi\sum_{k=0}^{m} b_k^2 = \int_0^{2\pi} y^2.dx - \pi\left(\sum_{k=0}^{m} a_k^2 + \sum_{k=0}^{m} b_k^2\right)$$

En definitiva:

$$|e|^2 = \int_0^{2\pi} f(x)^2.dx - \pi\left(\sum_{k=0}^{m} a_k^2 + \sum_{k=0}^{m} b_k^2\right)$$

4. Bibliografía:

Apóstol, T.M., Calculus, Editorial Reverté, Barcelona, 1970
Rey Pastor, Y., Calleja, P., Trejo, C.,Análisis Matemático, Editorial Kapeluz, Buenos Aires, 1957
Henrici, P., Elements of Numerical Análisis, John Wiley, N. York, 1964
Scheid, F., Análisis numérico, Mc Graw-Hill, Madrid, 1972
Chinea, C. S., Ajuste de funciones. El método de los mínimos cuadrados (http://casanchi.com/mat/ajustemc01.htm)
Chinea, C. S., Ajuste de funciones. Ajuste con polinomios ortogonales (http://casanchi.com/mat/ajustepo01.htm)