La aleatoriedad y las álgebras de sucesos

INTRODUCCIÓN

Los procesos aleatorios, no deterministas, abundan en la vida corriente. Son, efectivamente, la esencia de los juegos de azar, pero, también es necesario comprender que en la vida real la aleatoriedad es lo común y lo determinista, lo no aleatorio, resulta ser la excepción.

Lo que caracteriza a una experiencia aleatoria es la posibilidad de resultados entre si diferentes al realizarse físicamente la experiencia.

Un suceso es cada uno de los resultados posibles en la realización de la experiencia aleatoria. Hay sucesos que se pueden expresar equivalentemente como disyunción de otros sucesos más sencillos. Así, en la experiencia aleatoria del lanzamiento de un dado, el suceso "número par" puede expresarse equivalentemente como la disyunción "número 2" o "número 4" o "número 6". En cambio, el suceso "numero 2" no puede expresarse equivalentemente por la disyunción de otros sucesos mas sencillos. Esto permite clasificar los sucesos en *compuestos* y *elementales.*

Un suceso *elemental A* de un experimento s es un suceso que no puede expresarse mediante la disyunción de otros sucesos del mismo experimento. Los restantes sucesos del experimento se denominan *compuestos*.

El *espacio muestral* de un experimento aleatorio, s, es el conjunto de sus sucesos elementales. Se denomina *Universo, Población* o *Colectivo* asociado a un determinado experimento s al conjunto de todos sus sucesos, elementales y compuestos.

La realización de un experimento aleatorio se denomina una *prueba*. Una colección de pruebas se llama *muestra aleatoria* del experimento.

Las relaciones entre los sucesos de un mismo experimento aleatorio son siempre de naturaleza lógica. Se trata de hacer corresponder a cada suceso A de un determinado experimento s una proposición lógica: p(A)="el suceso A se verifica", que siempre se entenderá asociada al suceso A. El universo $U(s)$ de todos los sucesos asociados a cada experimento s puede, en definitiva, ser estructurado algebraicamente con el recurso de las propiedades y las operaciones del álgebra de proposiciones lógicas.

Cuando hablamos de sucesos de un experimento aleatorio, pensamos en la posible verificación simultánea de dos sucesos dados, o bien, pensamos en la alternativa de que se verifiquen uno o bien que se verifique el otro, o, finalmente, el que se verifique el suceso contrario de un suceso dado (es decir, que no se verifique el suceso dado).

Estas ideas son la base del establecimiento de lo que llamaremos *operaciones con sucesos* en el universo, $U(s)$, asociado a cada experimento s.

Veremos que estas operaciones con sucesos presentan propiedades tales que coinciden con las que George Boole (1815-1864) estableció en el siglo XIX para las estructuras algebraicas que hoy llamamos *álgebras de Boole de la Teoría de Conjuntos.*

Sin embargo, la pregunta que nos hacemos es si podemos identificar el universo de los sucesos aleatorios de un experimento dado, $U(s)$, finito o infinito, con alguna estructura algebraica establecida.

Lo que a continuación mostramos es que, efectivamente, hay isomorfismo entre sucesos y álgebras de conjuntos, aún cuando al hacer la exposición nos lleve el tener que idear estructuras intermedias, como, por ejemplo, el concepto de *haz de sucesos*.

ÁLGEBRA DE BOOLE DE SUCESOS ALEATORIOS

Operaciones:

Implicación: Se dice que el suceso A implica el suceso B si siempre que se verifica A se verifica B, lo cual podemos representarlo con la notación conjuntista $A \subseteq B$.

Dos sucesos, A y B, se dicen iguales, si hay una implicación recíproca, esto es, si $A \subseteq B, B \subseteq A$, lo que se representa por $A = B$.

Producto: El suceso producto de dos sucesos del mismo experimento es el suceso cuya verificación consiste en que se verifiquen ambos simultáneamente. Se puede representar, para dos sucesos A y B, por $A.B$.

$$P(A.B) \leftrightarrow P(A) \wedge P(B)$$

"Se verifica $A.B$ sii se verifica A y se verifica B"

Suma: El suceso suma de dos sucesos del mismo experimento es el suceso cuya verificación consiste en que se verifique uno u otro de estos sucesos. Se puede representar, para dos sucesos A y B, por $A + B$.

$$P(A + B) \leftrightarrow P(A) \vee P(B)$$

"Se verifica $A+B$ sii se verifica A o se verifica B"

Opuesto o complementario: El suceso opuesto del suceso *A* es el suceso cuya verificación consiste en que no se verifique A. Se acostumbre a representar por $\overline{A}$.

$$P(\overline{A}) \leftrightarrow \neg P(A)$$

"Se verifica $\overline{A}$ sii no se verifica A"

Propiedades de las operaciones:

Las propiedades de estas operaciones convierten al conjunto U(s) de los sucesos asociados al experimento aleatorio s en un Álgebra de Boole.

	Producto	Suma
Idempotencia:	$A.A=A$	$A+A=A$
Conmutatividad:	$A.B=B.A$	$A+B=B+A$
Asociatividad:	$A.(B.C)=(A.B).C$	$A+(B+C)=(A+B)+C$
Absorción:	$A.(A+B)=A$	$A+(A.B)=A$
Distributividad:	$A.(B+C)=A.B+A.C$	$A+(B.C)=(A+B).(A+C)$

Elemento Universal:	$A.I=I.A=A$	$A+I=I+A=I$
Elemento Nulo:	$A.0=0.A=0$	$A+0=0+A=A$
Complementario:	$A.\overline{A}=0$	$A+\overline{A}=I$

Es obvio que un suceso es compuesto sii puede descomponerse en suma de otros sucesos del mismo experimento. Los sucesos elementales son, por tanto, aquellos en los que no pude darse esta descomposición.

Demostración de las propiedades:
La prueba de estas propiedades es una versión de la prueba de la proposición lógica equivalente en el álgebra de enunciados:

- Idempotencia: p(A.A)="se verifica A y A" es equivalente a p(A)="se verifica A", lo cual es tautología. Asimismo es tautología p(A+A)="se verifica A o se verifica A" equivalente a p(A).
- Conmutatividad: p(A+B)="se verifica A o se verifica B" equivalente a p(B+A)="se verifica B o se verifica A". Asimismo p(A.B)="se verifica A y se verifica B" equivalente a p(B.A)="se verifica B y se verifica A", ambas son obviamente tautologías.
- Asociatividad: También son formulas tautológicas p(A.(B.C))$\leftrightarrow$p((A.B).C), o bien p(A+(B+C))$\leftrightarrow$p((A+B)+C).
- Absorción: p(A.(A+B))$\leftrightarrow$P(A), p(A+(A.B))$\leftrightarrow$P(A)
- Distributividad: p(A.(B+C))$\leftrightarrow$p(A.B+A.C), P(A+(B.C))$\leftrightarrow$p((A+B).(A+C))
- Elemento Universal: p(A.I)=p(I.A)=p(A), p(A+I)=p(I+A)=p(A). El suceso I se llama *suceso seguro* del experimento.
- Elemento nulo: p(A.0)=p(0.A)=p(0), p(A+0)=p(0+A)=p(A). El suceso 0 se llama *suceso imposible* del experimento.
- Complementario: p(A.$\overline{A}$)=p($\overline{A}$.A)=p(0), p(A+$\overline{A}$)=p($\overline{A}$+A)=p(I)

La familia U(s) de todos los sucesos aleatorios asociados al experimento s, tiene, con estas operaciones, estructura de Álgebra de Boole.

$(U(s),+..)$ Álgebra de Boole de los sucesos aleatorios

Veamos a continuación otras propiedades que se verifican en las operaciones con sucesos, y que se conocen como leyes de De Morgan:

Teorema 01 (Las Leyes de De Morgan)
Se verifican las igualdades:

$$\overline{A+B}=\overline{A}.\overline{B} \quad \text{y} \quad \overline{A.B}=\overline{A}+\overline{B}$$

(el complementario de la suma es el producto de los complementarios y el complementario del producto es la suma de los complementarios)

Demostración:
Puesto que si el producto de dos sucesos es el suceso nulo, ambos han de ser complementarios, tenemos:

$$A.B.\left(\overline{A}+\overline{B}\right)=A.B.\overline{A}+A.B.\overline{B}=A.\overline{A}.B+A.B.\overline{B}=0.B+A.0=0+0=0\rightarrow\overline{A}+\overline{B}=\overline{A.B}$$

$$(A+B).\left(\overline{A}.\overline{B}\right)=A.\overline{A}.\overline{B}+B.\overline{A}.\overline{B}=A.\overline{A}.B+B.\overline{B}.\overline{A}=0.B+0A=0+0=0\rightarrow\overline{A}.\overline{B}=\overline{A+B}$$

Otras operaciones en el Álgebra de Boole de los sucesos aleatorios:
Se define la diferencia entre sucesos y la diferencia simétrica de la siguiente forma:

Diferencia del suceso B al suceso A: $A-B=A.\overline{B}$, es decir, la diferencia del suceso B al suceso A es la intersección del suceso A con el complementario de B.

Diferencia simétrica: se define como la suma de las dos diferencias, de A a B y de B a A, o sea: $A\Delta B=(A-B)+(B-A)$
Se verifican trivialmente las siguientes propiedades:

01) $A.(B-C)=A.B-A.C$
02) $A.B-C=(A-C).(B-C)$
03) $\overline{A}=I-A$
04) $A\Delta A=0$
05) $A\Delta 0=A$
06) $A\Delta I=\overline{A}$
07) $A\Delta B=B\Delta A$
08) $A\Delta B=(A+B)-A.B$
09) $A+B=(A\Delta B)\Delta A.B$
10) $A.(B\Delta C)=A.B\Delta A.C$
11) $A.B\Delta B=B-A$
12) $(A\Delta B).B=B-A$

Sistemas completos de sucesos:
Un conjunto de sucesos $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$ correspondientes a un mismo experimento aleatorio s se dice que es un *sistema completo* si su suma es el suceso seguro y su producto, dos a dos, es imposible, siendo todos los sucesos del sistema distintos del suceso imposible.

$$\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}\ sist.\ completo \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\alpha_j \neq 0,\ j=1,...,n)\wedge(\alpha_1+\alpha_2...+\alpha_n=I)\wedge(\alpha_i.\alpha_j=0, i,j=1...n, i\neq j)$$

LA ESTRUCTURA DE LAS ÁLGEBRAS FINITAS DE SUCESOS

Un álgebra de Boole de sucesos aleatorios se dice que es un álgebra finita si está constituida por un número finito de sucesos.

Todos los sucesos de un álgebra finita, $\sum$, son compuestos o bien son elementales.

$$A\in\sum\ compuesto \leftrightarrow \exists A_1,A_2\in\sum / A=A_1+A_2\ \wedge A_1,A_2\neq 0$$

Teorema 02
Sea $\sum$ un álgebra de sucesos y sea A un suceso no imposible de la misma.
1) $A\ elemental \Leftrightarrow [\forall B\in\sum / B\subseteq A\rightarrow B=0\vee B=A]$
2) $A_1,A_2\in\sum\ \ elementales / A_1\neq A_2\rightarrow A_1.A_2=0$

Demostración:
1) Probemos en primer lugar que $A\ elemental \Rightarrow [\forall B\in\sum / B\subseteq A\rightarrow B=0\vee B=A]$ por reducción al absurdo, ya que si $B\neq 0\wedge B\neq A$, siempre se puede expresar que $A=A.I=A.(B+\overline{B})=A.B+A.\overline{B}$, por lo que $A=A.B+A.\overline{B}$, siendo entonces A suma de dos sucesos no nulos $A.B\neq 0, A.\overline{B}\neq 0$, por lo que A no sería elemental, contra la hipótesis, luego $A\ elemental \Rightarrow [\forall B\in\sum / B\subseteq A\rightarrow B=0\vee B=A]$.
Probemos ahora que $[\forall B\in\sum / B\subseteq A\rightarrow B=0\vee B=A]\Rightarrow A\ elemental$. Se tiene que $A=A.B+A.\overline{B}$. Si $B=0\rightarrow A=0+A=A$, y si $B=A\rightarrow A=A+0=A$. Es decir, en todos los casos, no existen dos sucesos distintos no nulos cuya suma es A, por lo que A es elemental.
2) Si A_1,A_2 son elementales y distintos, se tiene, por 1):

$$A_1, A_2 elementales \rightarrow A_1.A_2 \subseteq A_1 \wedge A_1.A_2 \subseteq A_2 \rightarrow (A_1.A_2 = 0 \vee A_1.A_2 = A_1) \vee$$
$$\vee (A_1.A_2 = 0 \vee A_1.A_2 = A_2) \wedge A_1 \neq A_2 \rightarrow A_1.A_2 = 0$$

Teorema 03

Para todo suceso compuesto de un álgebra finita de sucesos, $\sum$, existe siempre un suceso elemental que le implica.

$$\forall M \in \sum, \exists A \in \sum / A\ elemental \wedge A \subseteq M$$

Demostración:

Del teorema 02 sabemos que $M\ compuesto \wedge A \subseteq M \rightarrow A \neq 0 \wedge A \neq M$

Si A es elemental, hemos terminado. Caso contrario, existe un A_1 tal que se cumple $A\ compuesto \wedge A_1 \subseteq A \rightarrow A_1 \neq 0 \wedge A_1 \neq A$. Si A_1 es elemental, terminamos, en caso contrario seguimos aplicando el razonamiento un número finito de pasos, pues se trata de un álgebra finita. Con lo cual encontraremos un A_k tal que es elemental y está contenido en el suceso M de partida.

Teorema 04

Cualquier suceso no nulo de un álgebra finita de sucesos puede descomponerse unívocamente en suma de un número finito de sucesos elementales de dicha álgebra.

Demostración:

Sea el suceso $M \in \sum / M \neq 0$. Si M es elemental, hemos terminado.

Si M no es elemental, por el teorema 03, $\exists A_1 \in \sum / A_1 elemental \wedge A_1 \subseteq M$

Sea $A_2 = M.\overline{A_1} \rightarrow M = A_1 + M.\overline{A_1} = A_1 + A_2$. Si A_2 es elemental, hemos terminado.

Si A_2 no es elemental, $\exists A_3 \in \sum / A_3 elemental \wedge A_3 \subseteq A_2$.Sea ahora los mismo de antes: $A_4 = A_2.\overline{A_3} \rightarrow A_2 = A_3 + A_2.\overline{A_3} = A_3 + A_4$. Si Si A_4 es elemental, terminamos, caso contrario seguimos con los pasos de razonamiento. El número de estos pasos ha de ser finito porque el álgebra de sucesos que consideramos es finita.

En definitiva, todo suceso puede descomponerse en suma de un número finito de sucesos elementales del álgebra:

$$\forall M \in \sum, \exists A_k, k = 1,...,n\ elementales / M = A_1 + A_2 + ... + A_n$$

Veamos que esta descomposición es única, pues si hubieran dos descomposiciones del mismo suceso se tendría:

$$M = A_1 + A_2 + ... + A_n$$
$$M = A_1^{'} + A_2^{'} + ... + A_m^{'}$$

Siendo elementales los sucesos sumandos de ambas descomposiciones. Bastaría que solamente uno solo de una de las descomposiciones fuera distinto a los sucesos de la otra descomposición para que, al realizar el producto resultara nulo el suceso M de partida:

Así, si es $A_1^{'} \neq A_i, i = 1,...,n$, entonces, los productos son nulos $A_1^{'}.A_1 = 0,\ A_1^{'}.A_2 = 0, ...$
$...A_1^{'}.A_n = 0 \rightarrow M.A_1^{'} = 0 + 0 + ... + 0 = 0$

Luego, la descomposición en sumandos de sucesos elementales es única.

Corolario 1:

El número de elementos de un álgebra finita de sucesos, $\sum$, es 2^n, donde es n el número de sucesos elementales de $\sum$.

Demostración:
Como todo suceso puede descomponerse en un número finito de n sucesos elementales, resulta que los sucesos corresponden a todas las combinaciones posibles de sucesos elementales del álgebra:

$$card(\Sigma) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

fórmula que resulta inmediata de la expresión del binomio de Newton, pues haciendo $a=1$, $b=1$ en la misma se obtiene:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} .a^n .b^{n-k} \rightarrow 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

Corolario 2:
Todo álgebra finita de sucesos, con n sucesos elementales, es isomorfa al álgebra de Boole $P(n)$ de las partes de un conjunto de n elementos.

Demostración:
Consideremos el conjunto E_n cuyos elementos son los n sucesos elementales del álgebra finita Σ. Sea $P(E_n)$ el conjunto de sus partes.

Sabemos que $(P(E_n), \cup, \cap)$, con la complementariedad, es un Álgebra de Boole.

Podemos establecer la correspondencia

$$f : \Sigma \rightarrow P(E_n)$$

por la condición:

$$\forall M \in \Sigma,\ f(M) = \varphi_M \in P(E_M)$$

siendo φ_M la parte de $P(E_n)$ constituida por los sucesos elementales cuya suma es M.

$$\varphi_M = \{A_j, j = s, \ldots, r / A_s + \ldots + A_r = M\}$$

Trivialmente f es una biyección que verifica:

a) $f(I) = E_n$

b) $f(0) = \phi$

c) $f(\overline{M}) = E_n - f(M)$

d) $f(A+B) = f(A) \cup f(B)$

e) $f(A.B) = f(A) \cap f(B)$

Por lo cual, f es isomorfismo entre álgebras booleanas.

Esto quiere decir que para todo álgebra finita de sucesos es siempre posible encontrar un álgebra de conjuntos isomorfa, en donde al producto de sucesos le corresponde la intersección de conjuntos y a la suma de sucesos, la unión de conjuntos. Asimismo, a la implicación de sucesos le corresponde la inclusión de conjuntos, de forma que se induce al álgebra de sucesos el orden correspondiente al álgebra de conjuntos, pudiéndose hablar de familias de sucesos maximales, minimales, etc.

REPRESENTACIÓN DE LAS ÁLGEBRAS DE SUCESOS POR ÁLGEBRAS DE CONJUNTOS

Veremos en este apartado que todo álgebra de sucesos, sea finita o no, resulta ser isomorfa a un álgebra de conjuntos, subálgebra del álgebra de las partes de un conjunto. Las operaciones suma y producto de sucesos se traducen, en el álgebra isomorfa, por las operaciones de unión e intersección de conjuntos. Para hacer este estudio hemos de considerar familias de sucesos que sin contener al suceso imposible, 0, sean cerradas para el producto de sucesos y maximales entre las que tienen estas propiedades. Son las familias que denominaremos *haces de sucesos* y que definimos a continuación.

Definición 1
Dada un álgebra de sucesos, $\sum$, una familia Ψ de la misma se dice que es un *haz de sucesos* si y solo si se verifican las condiciones siguientes:
1) No contiene al suceso imposible: $0 \notin \Psi$
2) Es cerrada para el producto: $\forall A, B \in \sum / A \in \Psi \wedge B \in \Psi \rightarrow A.B \in \Psi$
3) Es familia maximal entre las que verifican las condiciones 1) y 2), con el orden inducido por la inclusión de conjuntos.

Teorema 05
Para todo haz de sucesos Ψ del álgebra de sucesos $\sum$, se verifica:
a) $I \in \Psi$
b) $A \in \Psi \leftrightarrow \overline{A} \notin \Psi$
c) $\forall A, B \in \sum,\ A + B \in \Psi \rightarrow A \in \Psi \vee B \in \Psi$

Demostración:
a) $I \in \Psi$, pues caso contrario la familia $\Psi' = \Psi \cup \{I\}$ contendría a Ψ y verificaría las condiciones 1) y 2) de la definición de haz de sucesos:
1) $0 \notin \Psi \wedge 0 \notin \{I\} \rightarrow 0 \notin \Psi \cup \{I\} = \Psi'$
2) $\forall A, B \in \Psi' \rightarrow A.B \in \Psi'$, pues en todas alternativas se cumple la pertenencia:
- si $A, B \in \Psi \rightarrow A.B \in \Psi \rightarrow A.B \in \Psi'$, por hipótesis.
- si $A \in \Psi, B \notin \Psi \rightarrow A \in \Psi \wedge B = I \rightarrow A.B = A.I = A \in \Psi \rightarrow A.B \in \Psi'$
- si $A \notin \Psi, B \notin \Psi \rightarrow A = I, B = I \rightarrow A.B = I.I = I \in \Psi' \rightarrow A.B \in \Psi'$

y como $\Psi \subseteq \Psi \cup \{I\} = \Psi'$, la familia Ψ no sería maximal, por lo que no sería un haz de sucesos, contra la hipótesis. Por tanto siempre ha de ser: $I \in \Psi$.
b) $A \in \Psi \leftrightarrow \overline{A} \notin \Psi$. Para probar la equivalencia probemos la implicación en los dos sentidos:
$A \in \Psi \rightarrow \overline{A} \notin \Psi$, pues caso contrario sería $A \in \Psi, \overline{A} \in \Psi \rightarrow A.\overline{A} \in \Psi \rightarrow A.\overline{A} = 0 \in \Psi$ con lo que la familia Ψ no sería un haz de sucesos.
$\overline{A} \notin \Psi \rightarrow A \in \Psi$, pues caso contrario consideremos la familia $\Psi_A = \{A.X / X \in \Psi\}$ y $\Psi'' = \Psi \cup \Psi_A$, que contiene a Ψ, verificando las condiciones 1) y 2) de la definición de haz de sucesos:
1) $0 \notin \Psi \wedge 0 \notin \Psi_A \rightarrow 0 \notin \Psi \cup \Psi_A = \Psi''$
2) $\forall M, N \in \Psi'' \rightarrow M.N \in \Psi''$, pues se cumple en las tres alternativas:
- si $M, N \in \Psi \rightarrow M.N \in \Psi$ por hipótesis, luego $M.N \in \Psi''$.
- si $M \in \Psi, N \notin \Psi \rightarrow M \in \Psi, N \in \Psi_A \rightarrow (M \in \Psi) \wedge (\exists X_N \in \Psi / A.X_N = N) \rightarrow$
$\rightarrow M.N = M.(A.X_N) = A.(M.X_N) \wedge M.X_N \in \Psi \rightarrow M.N \in \Psi_A \rightarrow M.N \in \Psi''$
- si $M \notin \Psi, N \notin \Psi \rightarrow (\exists X_M \in \Psi / A.X_M = M) \wedge (\exists X_N \in \Psi / A.X_N = N) \rightarrow$
$\rightarrow M.N = (A.X_M).(A.X_N) = (A.A).(X_M.X_N) = A.(X_M.X_N) \wedge$
$\wedge X_M.X_N \in \Psi \rightarrow M.N \in \Psi_A \rightarrow M.N \in \Psi''$

y como $\Psi \subseteq \Psi \cup \Psi_A = \Psi''$, la familia Ψ no sería maximal, por lo que no sería un haz de sucesos, contra la hipótesis. Por tanto siempre $\overline{A} \notin \Psi \rightarrow A \in \Psi$.

c) $\forall A, B \in \sum, A + B \in \Psi \to A \in \Psi \vee B \in \Psi$, pues caso contrario se tendría que $A \notin \Psi \wedge B \notin \Psi$, y por el apartado b) anterior: $\overline{A} \in \Psi \wedge \overline{B} \in \Psi \to \overline{A}.\overline{B} \in \Psi$, por lo que, aplicando las leyes de De Morgan, $\overline{A + B} \in \Psi$. Esto significaría que: $A + B \in \Psi \wedge \overline{A + B} \in \Psi \to (A + B).(\overline{A + B}) = 0 \in \Psi \to \Psi$ no sería haz de sucesos. Luego, debe cumplirse que $A + B \in \Psi \to A \in \Psi \vee B \in \Psi$.

Teorema 06

Para todo haz de sucesos Ψ del álgebra de sucesos $\sum$, se verifica que si el producto de dos sucesos pertenece a un haz, entonces ambos sucesos pertenecen a dicho haz.

$$\forall A, B \in \sum, A.B \in \Psi \to A \in \Psi \wedge B \in \Psi$$

Demostración:

Supongamos que uno de los sucesos, por ejemplo A, no pertenezca a la familia Ψ y sea la familia $\Psi" = \Psi \cup \Psi_A$, donde es $\Psi_A = \{A.X / X \in \Psi\}$. Obviamente, la familia $\Psi"$ contiene a Ψ. Veamos que cumple 1) y 2) de la definición de haz de sucesos.

1) $A.B \in \Psi \wedge 0 \notin \Psi \to A.B \neq 0 \to A \neq 0 \to \forall X \in \Psi, A.X \neq 0 \to 0 \notin \Psi_A \to$
$\to 0 \notin \Psi \wedge 0 \notin \Psi_A \to 0 \notin \Psi \cup \Psi_A = \Psi"$

2) $\forall M, N \in \Psi" \to M.N \in \Psi"$, pues se cumple en las tres alternativas:

- si $M, N \in \Psi \to M.N \in \Psi$ por hipótesis, luego $M.N \in \Psi"$.
- si $M \in \Psi, N \notin \Psi \to M \in \Psi, N \in \Psi_A \to (M \in \Psi) \wedge (\exists X_N \in \Psi / A.X_N = N) \to$
  $\to M.N = M.(A.X_N) = A.(M.X_N) \wedge M.X_N \in \Psi \to M.N \in \Psi_A \to M.N \in \Psi"$
- si $M \notin \Psi, N \notin \Psi \to (\exists X_M \in \Psi / A.X_M = M) \wedge (\exists X_N \in \Psi / A.X_N = N) \to$
  $\to M.N = (A.X_M).(A.X_N) = (A.A).(X_M.X_N) = A.(X_M.X_N) \wedge$
  $\wedge X_M.X_N \in \Psi \to M.N \in \Psi_A \to M.N \in \Psi"$

y como $\Psi \subseteq \Psi \cup \Psi_A = \Psi"$, la familia Ψ no sería maximal, por lo que no sería un haz de sucesos, contra la hipótesis. Por tanto ha de ser $A \in \Psi$.

Corolario (a los teoremas 05 y 06)

Para todo haz de sucesos Ψ del álgebra de sucesos $\sum$, se verifica que dados dos sucesos de los cuales un pertenece Ψ, se cumple que la suma de ambos pertenece también a Ψ:

$$\forall A, B \in \sum, A \in \Psi \vee B \in \Psi \to A + B \in \Psi$$

Demostración:

Veámoslo por reducción al absurdo: si $A + B \notin \Psi$, por teorema 5,b) se tendrá que $\overline{A + B} \in \Psi \to \overline{A}.\overline{B} \in \Psi$ (por De Morgan). Si es, por ejemplo, $A \in \Psi$, se tendrá que:

$$A \in \Psi \wedge \overline{A}.\overline{B} \in \Psi \to A.(\overline{A}.\overline{B}) \in \Psi \to (A.\overline{A}).B \in \Psi \to 0.B \in \Psi \to 0 \in \Psi$$

y Ψ no sería un haz de sucesos, luego $\forall A, B \in \sum, A \in \Psi \vee B \in \Psi \to A + B \in \Psi$

Esto quiere decir, a la vista del teorema 05,c) que se puede escribir la equivalencia:

$$\forall A, B \in \sum, A \in \Psi \vee B \in \Psi \leftrightarrow A + B \in \Psi$$

Teorema 07

Para todo suceso A de un álgebra $\sum$ existe siempre un haz de sucesos de $\sum$ al cual pertenece A.

$$\forall A \in \sum, \exists \Psi \text{ } haz \text{ } de \sum / A \in \Psi$$

Demostración:
Sea Φ el conjunto de todas las familias de sucesos de Σ que conteniendo al suceso $A \in \Sigma$ verifican las condiciones 1) y 2) de la definición de haz de sucesos:

$$\Phi = \left\{ \phi_j \in \Sigma / A \in \phi_j \wedge 0 \notin \phi_j \wedge (\forall M_j, N_j \in \phi_j \rightarrow M_j . N_j \in \phi_j), j \in J \right\}$$

Ordenemos parcialmente por inclusión y extraigamos de $(\Phi, \subseteq)$ una cadena α .

Veamos que $M = \bigcup \{ \varphi / \varphi \in \alpha \}$ es un mayorante de α :

a) Obviamente, $A \in M \wedge \forall \varphi \in \alpha, \varphi \subseteq M$

b) $0 \notin M$, pues $0 \notin \varphi, \forall \varphi \in \alpha$

c) $\forall P, Q \in M, \exists \varphi \in \alpha / P, Q \in \varphi \rightarrow P.Q \in \varphi \wedge P.Q \neq 0$

En definitiva, el conjunto $(\Phi, \subseteq)$ es inductivo.

Por el lema de Zorn admite entonces una familia maximal que, por hipótesis, contiene a A y verifica las condiciones 1) y 2) de la definición de haz de sucesos. Tal familia es, consiguientemente, al ser maximal, un haz de sucesos que contiene al suceso A.

Teorema 08 (Teorema de Stone)
Toda álgebra de sucesos es isomorfa a un álgebra de conjuntos.

Demostración:
Sea Σ un álgebra de sucesos y sea Γ el conjunto de todos los haces de sucesos de Σ. Si consideramos un suceso cualquiera A del álgebra Σ, sabemos, por el teorema 07, que existe al menos un haz de sucesos del álgebra al cual pertenece. Representemos, entonces, por Γ_A al conjunto formado por aquellos haces de sucesos a los cuales pertenece A. Se tiene, en definitiva:

$$\Gamma = \left\{ \Psi \subseteq \Sigma / \Psi \text{ } haz \text{ } de \text{ } sucesos \right\}, \qquad \Gamma_A = \left\{ \Psi \subseteq \Sigma / \Psi \text{ } haz \text{ } de \text{ } sucesos \wedge A \in \Psi \right\}$$

Si representamos por $p(\Gamma)$ el conjunto de las partes de Γ, podemos definir la aplicación

$$f : \Sigma \rightarrow p(\Gamma)$$

por la condición:

$$\forall A \in \Sigma, \ f(A) = \begin{cases} \Gamma_A, \ si \ A \neq 0 \\ \phi, \ si \ A = 0 \end{cases}$$

Llamemos Ω a la imagen de Σ por f, es decir, $\Omega = \left\{ f(A) / A \in \Sigma \right\}$

La aplicación $f : \Sigma \rightarrow \Omega$ es obviamente sobreyectiva, y verifica que:

a) $f(\overline{A}) = \Gamma - f(A)$

pues por el teorema 5, b):

$$A \in \Psi \leftrightarrow A \notin \Psi \rightarrow \overline{A} \in c\Psi \rightarrow f(\overline{A}) = \Gamma - \Gamma_A = \Gamma - f(A)$$

b) $f(A.B) = f(A) \cap f(B)$

pues aplicando la definición de haz de sucesos y el teorema 06:

$$\forall \Psi \in f(A) \cap f(B) \leftrightarrow A, B \in \Psi \leftrightarrow A.B \in \Psi \leftrightarrow \Psi \in f(A.B)$$

c) $f(A+B) = f(A) \cup f(B)$

pues aplicando el corolario a los teoremas 05 y 06, tenemos:

$$\forall \Psi \in f(A+B) \leftrightarrow A+B \in \Psi \leftrightarrow A \in \Psi \vee B \in \Psi \leftrightarrow \Psi \in f(A) \vee \Psi \in f(B) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \Psi \in f(A) \cup f(B)$$

Veamos la inyectividad de la aplicación $f : \Sigma \rightarrow \Omega$. Hemos de comprobar que $f(A) = f(B) \rightarrow A = B$ o bien que si $A \neq B \rightarrow f(A) \neq f(B)$. En efecto:

$$A \neq B \rightarrow A \Delta B = (A - B) + (B - A) = A.\overline{B} + B.\overline{A} \neq 0 \rightarrow A.\overline{B} \neq 0 \vee B.\overline{A} \neq 0$$

Si es $A.\overline{B} \neq 0$:

$A.\overline{B} \neq 0 \rightarrow f(A.\overline{B}) = f(A) \cap f(\overline{B}) \rightarrow \forall \Psi \in f(A.\overline{B}), \Psi \in f(A) \wedge \Psi \in f(\overline{B}) \rightarrow$
$\rightarrow \Psi \in f(A) \wedge \Psi \notin f(B) \rightarrow f(A) \neq f(B)$

Análogamente, si es $B.\overline{A} \neq 0$

$B.\overline{A} \neq 0 \rightarrow f(B.\overline{A}) = f(B) \cap f(\overline{A}) \rightarrow \forall \Psi \in f(B.\overline{A}), \Psi \in f(\overline{A}) \wedge \Psi \in f(B) \rightarrow$
$\rightarrow \Psi \in f(B) \wedge \Psi \notin f(A) \rightarrow f(A) \neq f(B)$

En definitiva, la aplicación $f : \Sigma \rightarrow \Omega$, al ser biyectiva y estable para la complementación, la suma y el producto de sucesos, es un isomorfismo de álgebras, por lo que

$$\left(\Omega, \cup, \cap, ^{-}\right)$$

es un álgebra de conjuntos, subálgebra del álgebra de las partes de Γ e isomorfa al álgebra Σ de sucesos aleatorios.

SIGMA-ÁLGEBRAS

Toda álgebra de sucesos, finita o infinita, es, como se ha visto en el anterior apartado, isomorfa a un álgebra de conjuntos, subálgebra del álgebra de las partes de un universo dado (conjunto de todos los haces de sucesos del álgebra de sucesos). Sin embargo, sabemos que aunque un álgebra de conjuntos es cerrada para la unión finita de elementos, es decir, es tal que la unión de un número finito de elementos es también elemento del álgebra, no podemos afirmar que la unión de un conjunto infinito numerable de elementos del álgebra sea también un elemento del álgebra. Necesitamos, para la identificación por isomorfismo con álgebras de sucesos, establecer las álgebras en las que la unión infinita numerable de sus elementos pertenece también al álgebra. A estas álgebras las llamaremos $\sigma - \acute{a}lgebras$ (sigma-álgebras).

Veremos en este apartado que para todo álgebra de sucesos, Σ, isomorfa a una subálgebra Ω del álgebra de las partes de un conjunto Γ, existe una $\sigma - \acute{a}lgebra$ mínima en $p(\Gamma)$ que contiene a la subálgebra Ω.

Veamos en primer lugar una condición suficiente para que un subconjunto de un álgebra booleana sea también álgebra booleana.

Teorema 09

Todo conjunto φ de partes de un conjunto U ($\varphi \subseteq p(U)$) en donde se verifiquen las dos condiciones siguientes:

a) La unión de un número finito de elementos del conjunto es elemento del conjunto:

$$\forall A_1, ..., A_n \in \varphi \rightarrow \bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \varphi$$

b) El complementario de un elemento del conjunto pertenece también al conjunto:

$$\forall A \in \varphi \rightarrow \overline{A} \in \varphi$$

es también un álgebra de Boole de conjuntos.

Demostración:

1) por a): $\forall A, B \in \varphi,\ A \cup B \in \varphi$. Por otra parte:
2) por b): $\forall A, B \in \varphi \to \overline{A}, \overline{B} \in \varphi \to \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B} \in \varphi \to A \cap B \in \varphi$

y como *p(U)* es un álgebra de Boole y estando φ contenida en *p(U)*, las operaciones de unión e intersección en φ tienen las mismas propiedades que en *p(U)*. Tiene, pues, φ, la misma estructura de álgebra que *p(U)*.

Definición 2

Se dice que un conjunto φ de partes de un conjunto U ($\varphi \subseteq p(U)$) es una $\sigma - \acute{a}lgebra$ si se verifica que:

c) La unión de un número infinito numerable de elementos de φ es elemento del conjunto φ:
$$\forall A_1, \ldots, A_j, \ldots \in \varphi \to \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \varphi$$
d) El complementario de un elemento del conjunto φ pertenece también al conjunto φ:
$$\forall A \in \varphi \to \overline{A} \in \varphi$$

Esta definición equivale a afirmar que una $\sigma - \acute{a}lgebra$ φ es un subálgebra de $p(U)$ en donde se verifica que la unión de un número infinito numerable de elementos de φ pertenece a φ, en virtud del teorema anterior.

Teorema 10

Para todo conjunto φ de partes de un conjunto U, $\left(\varphi \subseteq p(U)\right)$, existe un $\sigma - \acute{a}lgebra$ que contiene a φ y que es mínima entre las que cumplen dicha inclusión.

Demostración:

- El conjunto de $\Phi(\varphi)$ de las $\sigma - \acute{a}lgebras$ que contienen a φ no es vacío, pues $p(U) \in \Phi(\varphi)$.
- Sea $\Phi_m(\varphi)$ la intersección de todas estas $\sigma - \acute{a}lgebras$: $\Phi_m(\varphi) = \bigcap \Phi(\varphi)$.
- Puesto que la intersección de una familia de $\sigma - \acute{a}lgebras$ es también un $\sigma - \acute{a}lgebra$, ya que la intersección de una familia de álgebras también lo es, se tiene que $\Phi_m(\varphi) \subseteq \Phi(\varphi), \forall \Phi(\varphi) \subseteq p(U)$, es decir, $\Phi_m(\varphi)$ es mínima entre todas las $\sigma - \acute{a}lgebras$ que contienen a φ. Se denomina a $\Phi_m(\varphi)$ $\sigma - \acute{a}lgebra$ *engendrada por* φ.

En definitiva, vemos que todo álgebra de sucesos Σ es isomorfa a un subálgebra Ω del álgebra booleana $p(\Gamma)$, conjunto de las partes de los haces de sucesos de Σ. Si Ω no fuera un $\sigma - \acute{a}lgebra$, existe entonces, por el teorema 10, una $\sigma - \acute{a}lgebra$ mínima $\Phi_m(\Omega)$ que la contiene, que es la $\sigma - \acute{a}lgebra$ engendrada por Ω.

BIBLIOGRAFÍA

Cramer, H.; "Métodos matemáticos de la Estadística". Ediciones Aguilar.
Frechet, M.; "Recherches theoriques modernes sur la theorie des probabilities", Gauthier-Villars, 10ª edic. 1950
Gndenko, B. ; "Teoría de probabilidades ». Editorial Mir
Schweizer, B;Sklar, A.; "Probabilistic metric spaces", North Holland, N.York, 1983