Aplicaciones de las integrales anidadas

José Albeiro Sánchez Cano
Departamento de Ciencias Básicas_ Universidad EAFIT
josanche@eafit.edu.co

Resumen

En este artículo se demuestra una propiedad de las integrales iteradas y su aplicación

Abstract

This paper demonstrates a property of the nested integrals and its applications.

Palabras claves: *Integrales iteradas, Transformada de Laplace*

Keys words: *Nested integrals, Laplace transforms*

Introducción

La integral anidada es una integral evaluada múltiple veces sobre una misma variable en contraste a las integrales múltiples, que consiste de un número de integrales evaluadas con respecto a variables diferentes. Más exactamente, si $f(x)$ es una función continua definida en $\mathrm{I} \subseteq R.$ y $x_0 \in \mathrm{I}$, entonces

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x_n}\cdots\int_{x_0}^{x_3}\int_{x_0}^{x_2} f(x_1)dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-1} dx_n}_{n-veces} = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-u)^n f(u)du \qquad (1)$$

Para su demostración ver (ver [G. Shilov]).

En particular, se resolverá el PVI (2) integrando repetidamente (n veces) la ecuación (2) y usando las condiciones iniciales dadas. En cada paso se usará la ecuación (1) para llegar a la solución general en forma cerrada, esto es, la obtención de una formula.

Propiedad S. Sea $T(x)=\prod_{i=1}^{k} f(x_i), \quad x=(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ una función continua en el conjunto $[a,b]^k$, sea $x\in[x_0,b]^i$ .Entonces se tiene la siguiente relación:

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_2}\cdots\int_{x_0}^{x_{k-1}} f(x_1)f(x_2)f(x_2)\cdots f(x_k)dx_k dx_{k-1}\ldots dx_2 dx_1 = \frac{1}{k!}\left(\int_{x_0}^{x} f(x_1)dx_1\right)^k \qquad (1)$$

Demostración.

La demostración la haremos por inducción.

Se tiene claramente para $n=1$.

Veamos para $n=2$ en este caso deberá tener que

$$\int_{x_0}^{x} f(x_1)\left(\int_{x_0}^{x_1} f(x_2)dx_2\right)dx_1 = \frac{1}{2!}\left(\int_{x_0}^{x} f(x_1)dx_1\right)^2. \qquad (2)$$

En efecto, usando integración por partes, esto es, haciendo

$$u=\int_{x_0}^{x_1} f(x_2)dx_2\ , \qquad dv=f(x_1)dx_1$$

Se encuentra, al usar el teorema fundamental de cálculo, que

$$du=f(x_1)dx_1\ , \qquad v=\int_{x_0}^{x} f(x_1)dx_1$$

Así que según la fórmula de integración por partes, tenemos:

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x_1} f(x_1)f(x_2)dx_2 dx_1 = \left(\int_{x_0}^{x} f(x)dx_1\right)\left(\int_{x_0}^{x_1} f(x_2)dx_2\right)\Bigg|_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} f(x_1)\int_{x_0}^{x_1} f(x_2)dx_1$$

La primera ecuación del lado derecho no es más que

$$\left(\int_{x_0}^{x} f(x)dx_1\right)\left(\int_{x_0}^{x_1} f(x_2)dx_2\right)\Bigg|_{x_0}^{x} = \left(\int_{x_0}^{x} f(x)dx_1\right)^2$$

O bien, al reemplazar en la última ecuación se tiene lo pedido, esto es (2).

Supongamos ahora que se cumple para $n=k$ y veamos que se cumple para el siguiente, esto es, para $n=k+1$.

Esto es, se tiene la hipótesis de inducción:

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_2}\cdots\int_{x_0}^{x_{k-1}} f(x_2)f(x_3)\cdots f(x_k)dx_k dx_{k-1}\dots dx_2}_{k-1 \quad veces} = \frac{1}{k!}\left(\int_{x_{i_0}}^{x} f(x_1)dx_1\right)^k \qquad (HI)$$

y veamos que

$$I = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_2}\cdots\int_{x_0}^{x_{k-1}} f(x_1)f(x_2)f(x_3)\cdots f(x_k)dx_k dx_{k-1}\dots dx_2 dx_1 = \frac{1}{(k+1)!}\left(\int_{x_0}^{x} f(x_1)dx_1\right)^{k+1} \qquad (3)$$

En efecto,

Observar que la parte izquierda de la ecuación (3) puede escribirse en la forma:

$$\int_{x_0}^{x} f(x_1)\left(\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_2}\cdots\int_{x_0}^{x_{k-1}} f(x_2)f(x_3)\cdots f(x_k)dx_k dx_{k-1}\dots dx_2\right)dx_1$$

de donde, al observar la forma de esa última ecuación, hacemos la siguiente sustitución

$$F(x_1) = \underbrace{\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_2}\cdots\int_{x_0}^{x_{k-1}} f(x_2)f(x_3)\cdots f(x_k)dx_k dx_{k-1}\dots dx_2}_{k-1 \quad veces} = \frac{1}{n!}\left(\int_{x_{i_0}}^{x} f(x_1)dx_1\right)^n \qquad (4)$$

Luego lo que se debe probar es

$$I = \int_{x_0}^{x} f(x_1)F(x_1)dx_1 = \frac{1}{k!}\left(\int_{x_0}^{x} f(x_1)dx_1\right)^k \qquad (5)$$

Usamos ahora integración por partes, del cual se tiene lo siguiente:

Haciendo

$$u = F(x_1), \qquad dv = f(x_1)dx_1 \qquad (6)$$

Encontramos que:

$$du = F'(x_1)dx_1\ , \qquad v = \int_{x_0}^{x_1} f(x_2)dx_2 \qquad (7)$$

Donde

$$F'(x_1) = \frac{k}{k!}\left(\int_{x_0}^{x} f(x_1)dx_1\right)^{k-1} f(x_1)dx_1 \qquad (8)$$

Reemplazando (8) en (7), se tiene

$$du = \frac{1}{(k-1)!}\left(\int_{x_0}^{x} f(x_1)dx_1\right)^{k-1} f(x_1)dx_1\ , \qquad v = \int_{x_0}^{x_1} f(x_2)dx_2 \tag{9}$$

Luego aplicando la fórmula de integración por partes, usando las formulas (6) y (9)

, tenemos:

$$\begin{aligned} I &= \int_{x_0}^{x} f(x_1)F(x_1)dx_1 \\ &= F(x_1)\int_{x_0}^{x_1} f(x_2)dx_2\Big|_{x_0}^{x} - \frac{1}{(k-1)!}\int_{x_0}^{x}\left\{ f(x_1)\left[\left(\int_{x_0}^{x_1} f(x_2)dx_2\right)^{k-1}\int_{x_0}^{x_1} f(x_2)dx_2\right]\right\}dx_1 \qquad (10) \\ &= F(x)\int_{x_0}^{x} f(x_2)dx_2 - \frac{1}{(k-1)!}\int_{x_0}^{x}\left\{ f(x_1)\left(\int_{x_0}^{x_1} f(x_2)dx_2\right)^{k}\right\}dx_1 \end{aligned}$$

Pero por (4) tenemos que

$$\left(\int_{x_0}^{x_1} f(x_2)dx_2\right)^{k} = k!F(x_1)$$

Que al reemplazar en la última expresión de (10) obtenemos:

$$\begin{aligned} I &= F(x)\int_{x_0}^{x} f(x_2)dx_2 - \frac{1}{(k-1)!}\int_{x_0}^{x} f(x_1)(k!F(x_1))dx_1 \\ &= F(x)\int_{x_0}^{x} f(x_2)dx_2 - \frac{k!}{(k-1)!}\int_{x_0}^{x} f(x_1)F(x_1)dx_1 \\ &= \frac{1}{k!}\left(\int_{x_0}^{x} f(x_2)dx_2\right)^{k}\left(\int_{x_0}^{x} f(x_2)dx_2\right) - kI \end{aligned}$$

Pasado kI al lado izquierdo y simplificar, se tiene:

$$(1+k)I = \frac{1}{k!}\left(\int_{x_0}^{x} f(x_1)dx_1\right)^{k+1}$$

O bien, finalmente

$$I = \frac{1}{(1+k)!}\left(\int_{x_0}^{x} f(x_1)dx_1\right)^{k+1}$$

Lo que se quería probar.*

Nota: En el caso en que $T(x)=\prod_{i=1}^{k} 1 = k!, \quad x=(x_1,x_2,\ldots,x_k)$

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_2}\cdots\int_{x_0}^{x_{k-1}} dx_k dx_{k-1}\ldots dx_2 dx_1 = \frac{1}{k}\left(\int_{x_0}^{x} dx_1\right)^k$$

Observar que

$$I=\int_{x_0}^{x} f(x_1)F(x_1)dx_1 = \frac{1}{k!}\left(\int_{x_0}^{x} f(x_1)dx_1\right)^k$$

$$\int_{x_0}^{x} k!\, f(x_1)F(x_1)dx_1 = \left(\int_{x_0}^{x} f(x_1)dx_1\right)^k$$

con $f(x_i)=1$

$$\int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{s} dx_1\right)^k ds = \int_{x_0}^{x} k!\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_2}\cdots\int_{x_0}^{x_{k-1}} dx_k dx_{k-1}\ldots dx_2 dx_1 = k!\frac{1}{(k+1)!}\left(\int_{x_0}^{s} dx_1\right)^{k+1} = \frac{1}{(k+1)}\left(\int_{x_0}^{x} ds\right)^{k+1}$$

Ejemplo 1. Supongamos que deseamos resolver la integral doble

$$\int_0^x\int_0^u f(v)f(u)dvdu \text{ , donde } f(x)=\frac{1}{x^2+1},\ x\in R$$

Luego según el teorema

$$\int_0^x\int_0^u f(v)f(u)dvdu = \int_0^x\int_0^u \frac{1}{1+u^2}\frac{1}{1+v^2}dvdu = \int_0^x \frac{1}{1+u^2}\left(\int_0^u \frac{1}{1+v^2}dv\right)dv$$

Entonces por un lado se tiene que

$$\int_0^x\int_0^x \frac{1}{1+u^2}\left(\int_0^u \frac{1}{1+v^2}dv\right)dv = \int_0^x \frac{1}{1+u^2}\tan^{-1} u du \qquad (11)$$

Haciendo $w=\tan^{-1} u$ se tiene que $dw=\frac{1}{1+x^2}dx$, luego (11) queda

$$\int_0^x \frac{1}{1+u^2}\tan^{-1} u du = \int_0^{\tan^{-1} x} w dw = \frac{1}{2}w^2\Big|_0^{\tan^{-1} x} = \frac{1}{2}\left(\tan^{-1} x\right)^2$$

Con lo cual se tiene que

$$\int_0^x\int_0^u \frac{1}{1+u^2}\frac{1}{1+v^2}dvdu = \frac{1}{2}\left(\tan^{-1} x\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\int_0^x \frac{1}{1+u^2}du\right)^2.$$

de donde se cumple la igualdad.

Ejemplo 2. Utilice la Ec.(1) con $n=2$ y $n=3$, para comprobar el siguiente resultado

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}. \qquad (12)$$

Solución:

Este ejemplo lo haremos usando $n=2$ y $n=3$ en la fórmula (1) del teorema.

Para $n=2$:

$$\int_0^R e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\int_0^R e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right) dx = \frac{1}{2!} \left(\int_0^R e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^2.$$

Tener presente que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2 \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ (la función es par)

Entonces

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^R e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2 \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2! \left(4 \lim_{R\to\infty} \iint_{C_R} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} dA \right)} \qquad (13)$$

donde C_R es la región dada en coordenadas polares

$$C_R = \left\{ (r,\theta) / 0 \le r \le R,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} \right\}$$

Luego en la Ec. (13) se tiene:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^R e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{8 \left(\lim_{R\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^R e^{-\frac{1}{2} r^2} r dr d\theta \right)}$$

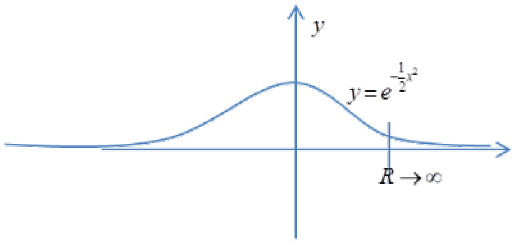
O bien,

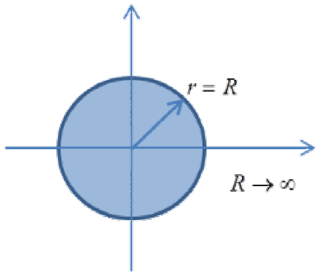
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 2\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{8\left(\lim_{R\to\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\right)\left(\int_0^R e^{-\frac{1}{2}r^2}rdr\right)\right)}$$

$$= \sqrt{8\left(\lim_{R\to\infty}\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(-e^{-\frac{1}{2}r^2}\right)\Big|_0^R\right)}$$

$$= \sqrt{2\pi\left(\lim_{R\to\infty}\left(1-e^{-\frac{1}{2}R^2}\right)\right)}, \qquad \left(\lim_{R\to\infty} e^{-\frac{1}{2}R^2}=0\right)$$

$$= \sqrt{2\pi}$$





Para $n=3$:

$$\int_0^R\int_0^R\int_0^R e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)}dzdydx = \frac{1}{3!}\left(\int_0^R e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)^3.$$

Tener presente que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = 2\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$ (la función es par)

Entonces

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 2\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt[3]{3!\left(8\lim_{R\to\infty}\iiint_{E_R} e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)}dV\right)} \tag{14}$$

donde E_R es la región dada en coordenadas esféricas

$$E_R = \left\{(\rho,\phi,\theta)/\,0\le\rho\le R,\ 0\le\phi\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$$

Luego en la Ec.(14) se tiene:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt[3]{48\left(\lim_{R\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^R e^{-\frac{1}{2}\rho^2}\rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta\right)}$$

O bien,

$$2\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = \sqrt[3]{8\left(\lim_{R\to\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi d\phi\right)\left(\int_0^{R} e^{-\frac{1}{2}\rho^2}\rho^2 d\rho\right)\right)}$$

$$= \sqrt[3]{8\left(\lim_{R\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(-\cos\phi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}\rho e^{-\frac{1}{2}\rho^2}+\frac{1}{2}\int_0^{R} e^{-\frac{1}{2}\rho^2}d\rho\right)\Bigg|_0^{R}\right)}$$

$$= \sqrt[3]{8\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos(0)\right)\lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{R}e^{-\frac{1}{2}R^2}+\frac{1}{2}\int_0^{R} e^{-\frac{1}{2}\rho^2}d\rho\right)}$$

$$= \sqrt[3]{4\pi\left(\frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2}d\rho\right)} \quad \text{pues} \quad \left(\lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{2}\mathrm{R}e^{-\frac{1}{2}R^2}\right)=0\right)$$

Elevando al cubo a ambos miembros, se tiene:

$$8\left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx\right)^3 = 2\pi\left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2}d\rho\right)$$

$$\Rightarrow \left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx\right)^2 = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Pero $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = 2\lim_{R\to\infty}\int_0^{R} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2\pi}$

Luego el resultado pedido

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = \sqrt{2\pi}.$$

Este es un resultado fundamental en probabilidad y estadística.

Ejemplo 3. Partiendo de la definición de función gamma $\Gamma(a) = \int_0^{\infty} e^{-x}x^{a-1}dx$ encontrar $[\Gamma(a)]^2$.

Solución

$$[\Gamma(a)]^2 = \left(\int_0^{\infty} e^{-x}x^{a-1}dx\right)\left(\int_0^{\infty} e^{-x}x^{a-1}dx\right) = \left(\int_0^{\infty} e^{-x}x^{a-1}dx\right)\left(\int_0^{\infty} e^{-y}y^{a-1}dy\right)$$

$$= \iint_{R^2} e^{-x-y}x^{a-1}y^{a-1}dA = \iint_{R^2} e^{-(x+y)}(xy)^{a-1}dA$$

Hacemos el siguiente cambio de coordenadas:

$$u = x+y, \quad v = xy \tag{15}$$

Estas ecuaciones definen una transformación T^{-1} del plano uv en el plano xy. Pasamos a las nuevas coordenadas:

$$x = u(1-v), \quad y = uv \tag{16}$$

La aplicación (E3.2) transforma el primer cuadrante del plano x, y en la semi-banda $0 \le u < \infty,\ 0 \le v \le 1$ del plano u, v y viceversa. Se tiene

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} 1-v & v \\ -u & u \end{vmatrix} = u.$$

$$\begin{aligned}(\Gamma(a))^2 &= 2!\iint_{R^2} e^{-(x+y)}(xy)^{a-1}\,dA = 2!\frac{1}{2}\int_0^\infty \int_0^1 e^{-u}u^{a-1}(1-v)^{a-1}v^{a-1}u\,dv\,du \\ &= \int_0^\infty e^{-u}u^{2a-1}du\int_0^1 (1-v)^{a-1}v^{a-1}dv \\ &= \Gamma(2a)\mathrm{B}(a,a)\end{aligned}$$

[1] Función gama de Euler $\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx$

Función beta $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$

Propiedad Si f es de orden exponencial en $[0,\infty)$, entonces

$$\ell\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{1}{s}\ell\{f(t)\} \tag{TL.1}$$

En general,

$$\ell\left\{\int_0^t\int_0^{t_n}\cdots\int_0^{t_3}\int_0^{t_2} f(t_1)dt_1dt_2\ldots dt_{n-1}dt_n\right\} = \frac{1}{s^n}\ell\{f(t)\} \tag{TL.2}$$

Dem. Usaremos la siguiente propiedad:

(transformada de una convolución)

$$\ell\{f(t)*g(t)\} = \ell\{f(t)\}\ell\{g(t)\}$$

donde $f*g$ denota la convolución de las funciones f y g y viene dada por la integral

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(t-\nu)g(\nu)d\nu$$

Aplicando Transformadas a ambos miembros de la ecuación (1) y usando la linealidad de la transformada de Laplace, obtenemos

$$\ell\Bigg\{\underbrace{\int_0^t\int_0^{t_n}\cdots\int_0^{t_3}\int_0^{t_2} f(t_1)dt_1dt_2\ldots dt_{n-1}dt_n}_{n-veces}\Bigg\}=\ell\left\{\frac{1}{n!}\int_0^t (t-u)^n f(u)du\right\}$$

$$=\frac{1}{n!}\ell\left\{\int_0^t (t-u)^n f(u)du\right\}$$

$$=\frac{1}{n!}\ell\{t^n * f(t)\}$$

$$=\frac{1}{n!}\ell\{t^n\}\ell\{f(t)\}$$

$$=\frac{1}{n!}\frac{n!}{s^{n+1}}\ell\{f(t)\}$$

$$=\frac{1}{s^{n+1}}\ell\{f(t)\}$$

Como $\int_0^t f(\nu)d\nu=\int_0^t 1.f(\nu)d\nu=1*f(t)$ luego se sigue

$$\ell\left\{\int_0^t f(u)du\right\}=\ell\{1*f(t)\}=\frac{1}{s}\ell\{f(t)\}$$

Utilicemos la propiedad anterior para resolver el siguiente problema de valor inicial

Ejemplo. Resolver el PVI.

$$y''(t)-3y'(t)+2y(t)=0,\qquad y(0)=3,\quad y'(0)=4$$

Solución:

Despejando e integrando dos veces, usando las condiciones iniciales, se tiene:

$$y(t)=3-5t+\int_0^t y(u)du-2\int_0^t\int_0^u y(\nu)d\nu du$$

Transformada de Laplace a ambos miembro de la ecuación para obtener:

$$\ell\{y(t)\} = \ell\{3\} - 5\ell\{t\} + \ell\left\{\int_0^t y(u)du\right\} - 2\ell\left\{\int_0^t \int_0^u y(v)dvdu\right\}$$
$$= \frac{3}{s} - \frac{5}{s^2} + \frac{1}{s}\ell\{f(t)\} - \frac{2}{s^2}\ell\{f(t)\}$$

Luego, reuniendo términos semejantes:

$$\left(1 - \frac{3}{s} + \frac{2}{s^2}\right)\ell\{y(t)\} = \frac{3}{s} - \frac{5}{s^2} \quad \Rightarrow \quad \ell\{y(t)\} = \frac{3s-5}{(s-2)(s-1)}$$

Al usar fracciones parciales se obtiene:

$$\ell\{y(t)\} = \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s-1}$$

Con lo cual, la solución viene dada por tanto:

$$y(t) = e^{2t} + et$$

Ejemplo 1. Resolver el PVI:

$$y''(x) = \sin 2x; \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

(**primera forma**)

Reemplazando en la fórmula (2), con $n = 2,\ x_0 = 0$, tenemos:

$$y(x) = \frac{1}{1!}\int_0^x (x-s)^1 \sin(2s)ds + \sum_{k=1}^{2} \frac{c_{2-k}}{(2-k)!} x^{2-k}$$

O bien,

$$y(x) = \int_0^x (x-s)\sin(2s)ds + \frac{c_1}{1!}x + c_0$$

Reemplazando los valores de $c_0 = 0,\ c_1 = 1$ en la ecuación anterior

$$y(x) = \int_0^x (x-s)\sin(2s)ds + x$$

Haciendo integración por partes en el primer término del segundo miembro de la ecuación, tenemos

$$u = x - s \quad , \quad dv = \sin(2s)ds$$

luego

$$du = -ds \quad , \quad v = -\frac{1}{2}\cos(2s)$$

Luego aplicando la fórmula de integración por partes

$$y(x) = -\frac{1}{2}(x-s)\cos(2s)\Big|_0^x - \frac{1}{2}\int_0^x \cos(2s)ds + x$$

O bien, se tiene finalmente la solución:

$$y(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)$$

(**segunda forma**)

Despejando e integrando dos veces, usando las condiciones iniciales, se tiene:

$$y(t) = \int_0^t \int_0^u \sin(2v)dvdu + t$$

Transformada de Laplace a ambos miembro de la ecuación para obtener:

$$\begin{aligned}\ell\{y(t)\} &= \ell\left\{\int_0^t \int_0^u \sin 2(v)dvdu\right\} + \frac{1}{s^2} \\ &= \frac{1}{s^2}\ell\{\sin(2t)\} + \frac{1}{s^2} \\ &= \frac{1}{s^2}\frac{2}{s^2+4} + \frac{1}{s^2}\end{aligned}$$

Luego, transformada inversa a ambos miembros de la ecuación, se tiene

$$y(t) = t * \sin(2t) + t \qquad (a)$$

Pero

$$t * \sin(2t) = \int_0^t (t-v)\sin(2v)dv = -\frac{1}{2}(t-v)\cos(2v) - \frac{1}{4}\sin(2v)\Big|_0^t = -\frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{t}{2}$$

Reemplazando en (a) obtenemos finalmente la solución:

$$y(t) = -\frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{3}{2}t$$

Ejemplo. Demuestre la fórmula:

$$\ell\{y^{(n)}(t)\} = s^n \ell\{y(t)\} - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \ldots - sy^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0)$$

Solución:

Como

$$y(x)=\int_0^t\int_0^{t_n}\cdots\int_0^{t_3}\int_0^{t_2}y^{(n)}(t_1)dt_1dt_2\ldots dt_{n-1}dt_n-\sum_{k=1}^{n}\frac{y^{(n-k)}(0)}{(n-k)!}t^{n-k}\ ,\quad y^{(0)}(0)=y(0) \qquad (3)$$

usando la transformada de la place y usando la fórmula T, se tiene

$$\ell\{y(t)\}=\ell\left\{\int_0^t\int_0^{t_n}\cdots\int_0^{t_3}\int_0^{t_2}y^{(n)}(t_1)dt_1dt_2\ldots dt_{n-1}dt_n\right\}-\sum_{k=1}^{n}\frac{y^{(n-k)}(0)}{(n-k)!}\ell\{t^{n-k}\},$$

O bien,

$$\ell\{y(t)\}=\frac{1}{s^n}\ell\{y^{(n)}(t)\}-\sum_{k=1}^{n}\frac{y^{(n-k)}(0)}{(n-k)!}\frac{(n-k)!}{s^{n-k+1}}\ ,$$

O despejando $\ell\{y^{(n)}(t)\}$ se tiene

$$\begin{aligned}\ell\{y^{(n)}(t)\}&=s^n\ell\{y(t)\}-s^n\sum_{k=1}^{n}\frac{y^{(n-k)}(0)}{s^{n-k+1}}\ ,\\ &=s^n\ell\{y(t)\}-\sum_{k=1}^{n}y^{(n-k)}(0)s^{k-1}\ ,\end{aligned}$$

Que es lo que se quería probar.

$$\ell\{y^{(n)}(t)\}=s^n\ell\{y(t)\}-s^{n-1}y(0)-s^{n-2}y'(0)-\ldots-sy^{(n-2)}(0)-y^{(n-1)}(0)$$

Conclusiones

Al resolver un problema de valor inicial se encontró la solución general en forma cerrada más…….

Bibliografía

[1] Chilov, G. E. Analyse Mathématique, Fonctions de plusieurs variables réelles, Éditions Mir, moscou, 1975.

[2] García J. O,Villegas G. ,J. Castaño B., J, Sánchez C., J. Ecuaciones Diferenciales. Fondo Editorial Universidad EAFIT, 2010.