ALGUNAS APLICACIONES BÁSICAS DE LA INTEGRAL DE RIEMANN

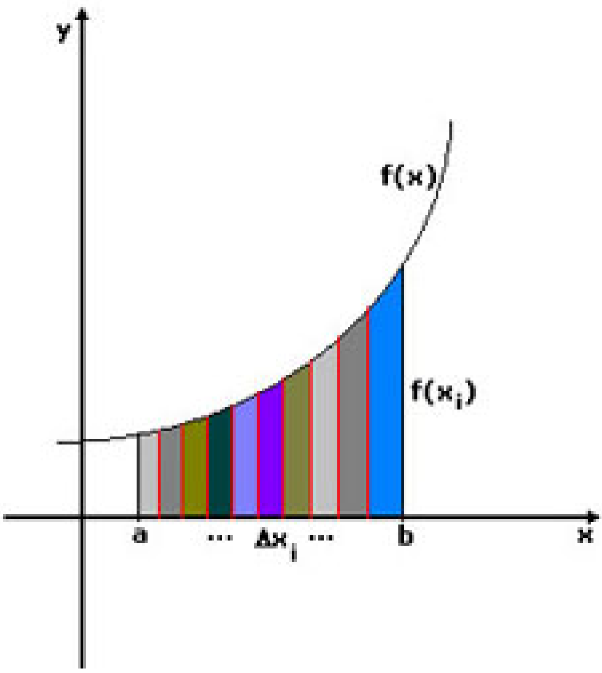
(ÁREAS, VOLÚMENES DE REVOLUCIÓN, LONGITUDES DE ARCO)

Carmen SÁNCHEZ DÍEZ

AREAS PLANAS:

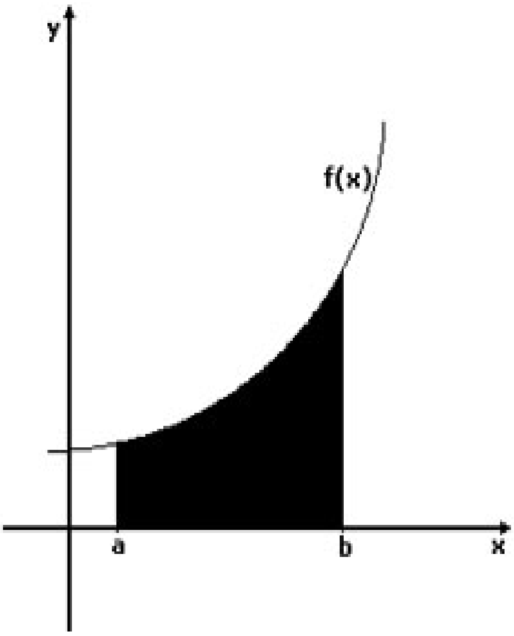
El concepto de integral definida en el sentido de Riemann está indisolublemente unido al cálculo de un área plana delimitada por segmentos cualesquiera (no necesariamente rectilíneos).

El área S barrida por una curva continua sobre un intervalo cerrado [a, b] puede considerarse igual a la suma de las áreas de los rectángulos de base infinitesimal que pueden ser construidos en dicho intervalo cubriendo el área S:



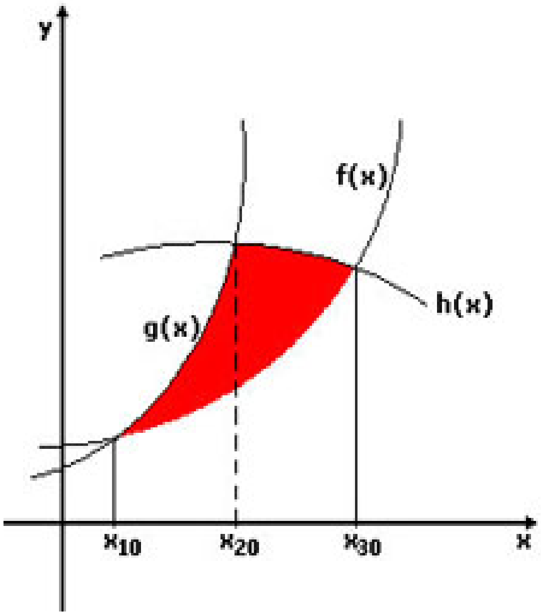
$$S = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i).\Delta x_i = \int_a^b f(x).dx$$

Área Barrida sobre un intervalo en el eje de abcisas:



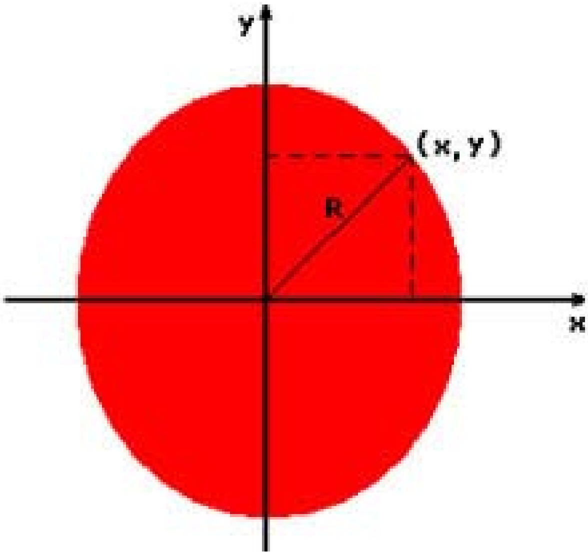
$$S = \int_a^b f(x).dx$$

Un área cualquiera se obtiene siempre como suma o resta de áreas barridas sobre un intervalo en el eje de abcisas:



$$S = \int_{x_{10}}^{x_{20}} g(x).dx + \int_{x_{20}}^{x_{30}} h(x).dx - \int_{x_{10}}^{x_{30}} f(x).dx$$

EL ÁREA DEL CIRCULO:



La ecuación de la circunferencia centrada en el origen con radio R: $x^2 + y^2 = R^2$

De donde, la curva semicircunferencia será: $\begin{cases} y = +\sqrt{R^2 - x^2} & (\sup er) \\ y = -\sqrt{R^2 - x^2} & (\inf er) \end{cases}$

La cuarta parte del círculo que ocupa el primer cuadrante del plano (superior derecha) está dado por la integral:

$$S_{1/4} = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}.dx$$

por lo que el área total del círculo será cuatro veces dicha área:

$$S_{circ} = 4.\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}.dx$$

podemos resolver la integral mediante el cambio de variables:

$$x = R.sen\, t \rightarrow dx = R.\cos t.dt$$

con lo cual quedará:

$$S_{circ} = 4.\int_0^1 \sqrt{R^2 - R^2.sen^2 t}.R.\cos t.dt = 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - sen^2 t}.\cos t.dt = 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} .\cos^2 t.dt =$$

$$= 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}.dt = 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}.dt + 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2t)}{2}dt = 2R^2.t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (\frac{4R^2}{4}sen(2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.R^2.\frac{\pi}{2} + 0 = \pi R^2$$

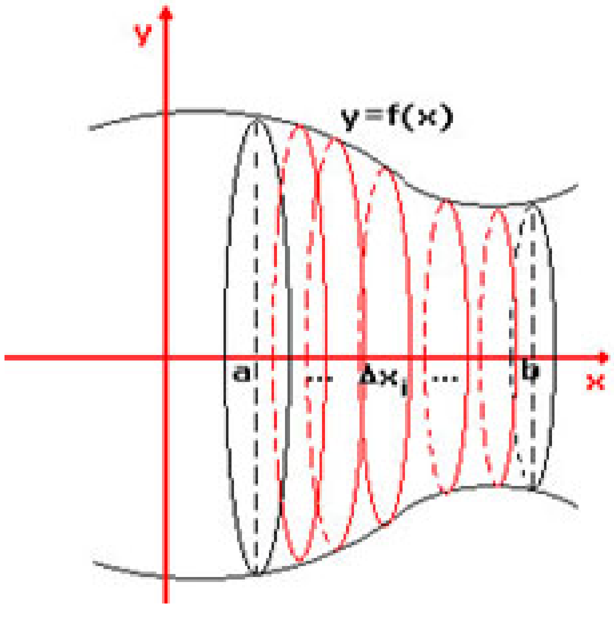
$$\boxed{S_{circ} = \pi R^2}$$

VOLÚMENES DE REVOLUCIÓN:

Entendiendo por volumen de revolución el cuerpo tridimensional engendrado por un área plana que da vueltas alrededor de un eje (eje de simetría del volumen), se tienen los volúmenes más conocidos:

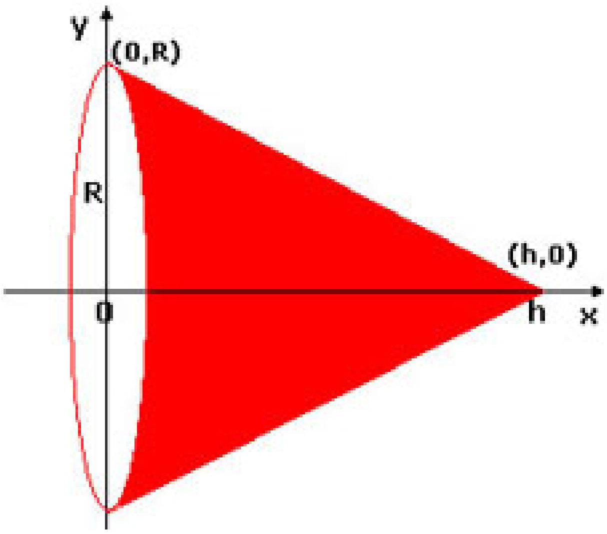
- Cono de revolución: lo engendra el área plana que define un triángulo rectángulo cuando gira alrededor de uno de sus catetos.
- Cilindro de revolución: lo engendra el área plana que define un rectángulo cuando gira alrededor de uno de sus lados.
- Esfera: la engendra un semicírculo cuando gira alrededor del diámetro.

El volumen V de revolución engendrado por el área que define una curva continua f(x) sobre un intervalo dado del eje de abcisas puede considerarse igual a la suma de los infinitos cilindros de altura infinitesimal que pueden ser construidos por cortes perpendiculares al eje de simetría del volumen V (el volumen del cilindro infinitesimal: superficie de la base –circulo de radio $f(x_i)$- por la altura Δx_i, o sea, está dado por $\Pi . f(x_i)^2 . \Delta x_i$.



$$V = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} \pi . f(x_i)^2 . \Delta x_i = \pi . \int_a^b f(x)^2 . dx$$

EL VOLUMEN DEL CONO:



La curva que barre el área del triángulo sobre el intervalo del eje de abcisas es la hipotenusa del triángulo rectángulo. Si el cono se coloca en la posición de la figura, es la recta que pasa por los puntos (0,R) y (h,0), siendo R el radio del cono y h su altura.

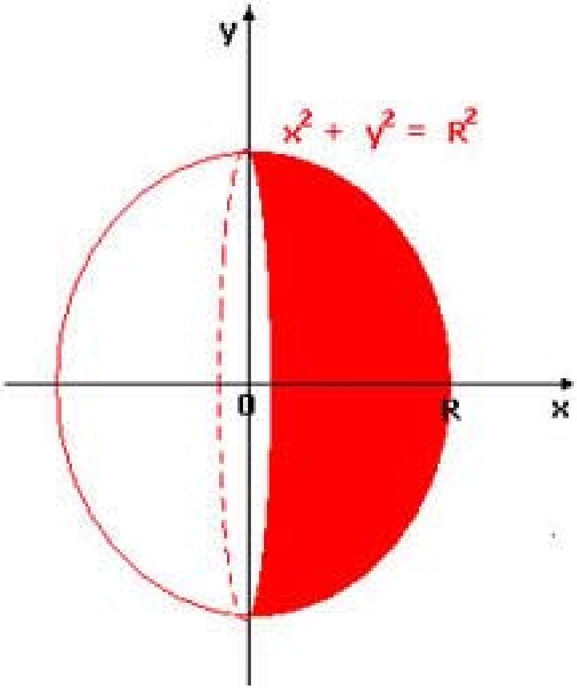
Por consiguiente, la ecuación de la curva es $y = -\frac{R}{h}x$

Y el volumen viene dado por la integral

$$V_{cono} = \pi \int_0^h \left(-\frac{R}{h}x\right)^2 .dx = \frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h x^2 .dx = \frac{\pi R^2}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^2\right]_0^h = \frac{\pi R^2}{h^2}.\frac{1}{3}h^2 = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

$$\boxed{V_{cono} = \frac{1}{3}\pi R^2 h}$$

EL VOLUMEN DE LA ESFERA:



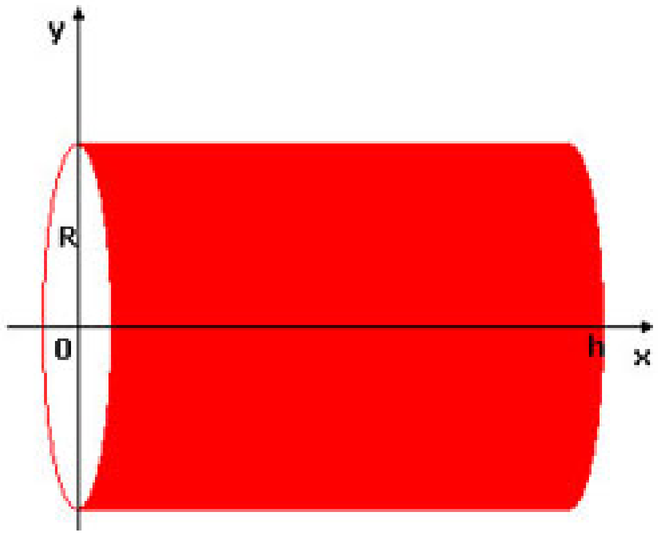
Considerando a la esfera centrada en el origen de coordenadas, el volumen se obtiene de inmediato resolviendo la correspondiente integral. Si integramos entre los límites 0 y R, resulta el volumen de la semiesfera, por lo que, multiplicando por 2 se obtiene el volumen de la esfera completa:

$$V_{esfer} = 2\pi\int_0^R y^2.dx = 2\pi\int_0^R (R^2 - x^2).dx = 2\pi R^2\int_0^R dx - 2\pi\int_0^R x^2.dx = 2\pi R^2.x\Big|_0^R - 2\pi.\frac{1}{3}x^3\Big|_0^R =$$

$$= 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\boxed{V_{esfer} = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

EL VOLUMEN DEL CILINDRO:



Un cilindro de radio R y altura h es engendrado por el área de un rectángulo de lados R y h cuando ésta rota alrededor del eje que contiene al lado h.

Considerado el rectángulo en la posición de la figura, la función que barre el área es ahora la recta horizontal y = R, por lo que el volumen resulta de inmediato:

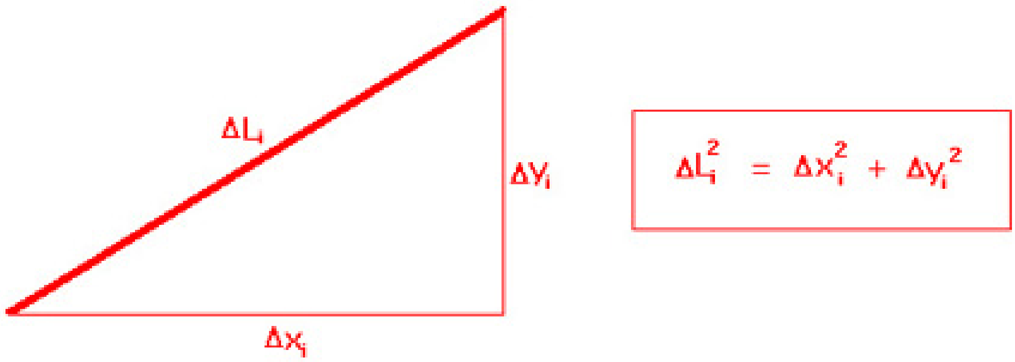
$$V_{cilin} = \pi \int_0^h y^2 .dx = \pi R^2 \int_0^h .dx = \pi R^2 .x\Big|_0^h = \pi R^2 h$$

$$\boxed{V_{cilin} = \pi R^2 h}$$

LONGITUDES DE ARCO DE CURVA:

La longitud infinitesimal de un arco de curva, dL, puede calcularse mediante el teorema de Pitágoras con expresión de magnitudes infinitesimales. La longitud de un arco cualquiera para una curva continua e integrable Riemann, se obtendría como la suma infinita de tales longitudes infinitesimales de arco.

El elemento infinitesimal de arco, ΔL_i, se obtiene de los elementos infinitesimales de longitud según la dirección de ambos ejes coordenados mediante el teorema de Pitágoras:



Se tiene, en definitiva:

$$\Delta L_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}.\Delta x_i \rightarrow \frac{\Delta L_i}{\Delta x_i} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}$$

En el límite, para cada $\Delta x_i \rightarrow 0$, se tiene:

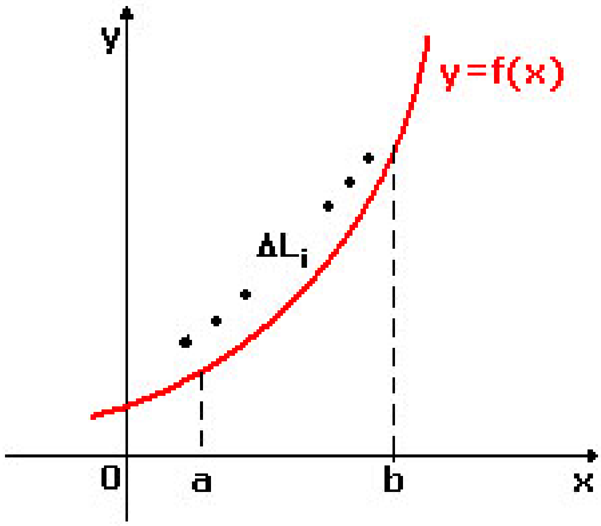
$$\frac{dl}{dx} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} = \sqrt{1+\left(\lim \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

o sea, es:

$$dL = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.dx$$

de lo cual, al integrar entre dos valores, x_1 y x_2, de la variable x:

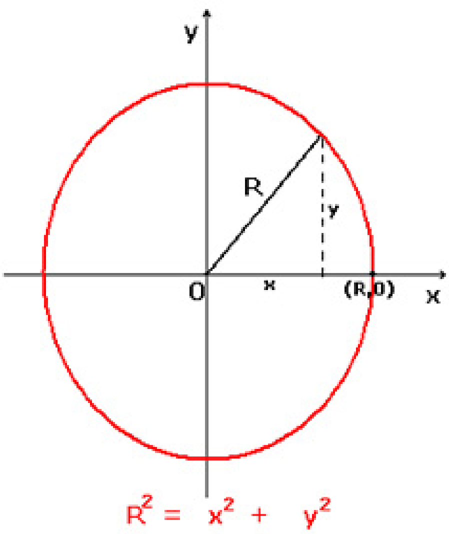
$$L\Big|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}.dx$$



$$L\Big|_a^b = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,.dx$$

LA LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA:

Podemos determinar la longitud de una circunferencia mediante la aplicación de la anterior integral, sin más que considerar una circunferencia cualquiera con centro en el origen de coordenadas y determinando la longitud del arco comprendido en el primero de los cuatro cuadrantes del plano (cuarta parte de la circunferencia). Multiplicando por 4 el resultado de la integral, esto nos dará la longitud de toda la circunferencia.



$$L = 4.\int_0^R \sqrt{1+y'^2}\,.dx$$

Se tiene:

$$x^2 + y^2 = R^2 \to 2x + 2y.y' = 0 \to y' = -\frac{x}{y} \to y'^2 = \frac{x^2}{y^2} \to \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{y^2}} = \frac{R}{y}$$

o sea:

$$L = 4.\int_0^R \sqrt{1 + y'^2}.dx = 4.\int_0^R \frac{R}{y}.dx = 4.\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}.dx = 4.\int_0^R \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}}.dx = 4R.\int_0^R \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}}.d\left(\frac{x}{R}\right)$$

Haciendo el cambio de variables t=x/R:

$$L = 4R.\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = 4R.arcsent\Big|_0^1 = 4R.(arcsen1 - arcsen0) = 4R.\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 2\pi R$$

$$\boxed{L = 2\pi R}$$

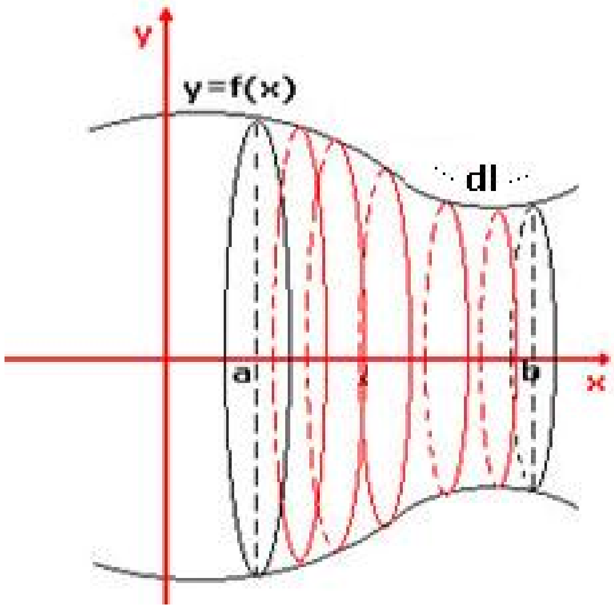
SUPERFICIES LATERALES DE REVOLUCIÓN

Del mismo modo que hemos determinado la manera de calcular el volumen de un cuerpo de revolución considerando sucesivos cortes trasversales perpendiculares al eje de simetría del volumen escribiendo el volumen del cilindro infinitesimal que definen dos cortes sucesivos y efectuando una suma infinita, también podemos determinar el área lateral de todo el cuerpo de revolución considerando la superficie lateral del cilindro infinitesimal que definen dichos dos cortes sucesivos y realizando una suma infinita. Quedaría así:

Superficie lateral del cilindro elemental (longitud de la circunferencia de la base por la generatriz, *dl*, infinitesimal del cilindro): $dS_L = 2\pi . f(x).dl$

Y siendo $dl = \sqrt{1+(f'(x))^2}.dx$, se tendrá:

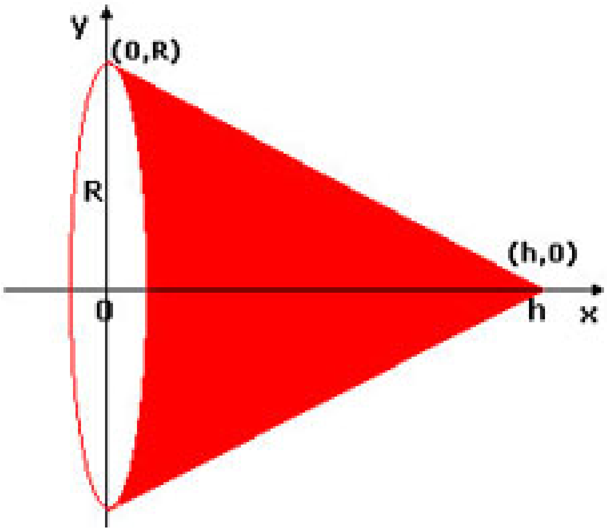
$$dS_L = 2\pi . f(x).\sqrt{1+(f'(x))^2}.dx$$



Se tiene, en definitiva:

$$S_L = 2\pi \int_a^b f(x).\sqrt{1+(f'(x))^2}.dx$$

SUPERFICIE LATERAL DE UN CONO DE REVOLUCIÓN:



Se tiene que es $y=-\frac{R}{h}x+R \rightarrow y'=-\frac{R}{h} \rightarrow y'^2=\frac{R^2}{h^2} \rightarrow \sqrt{1+y'^2}=\frac{\sqrt{R^2+h^2}}{h}=\frac{g}{h}$

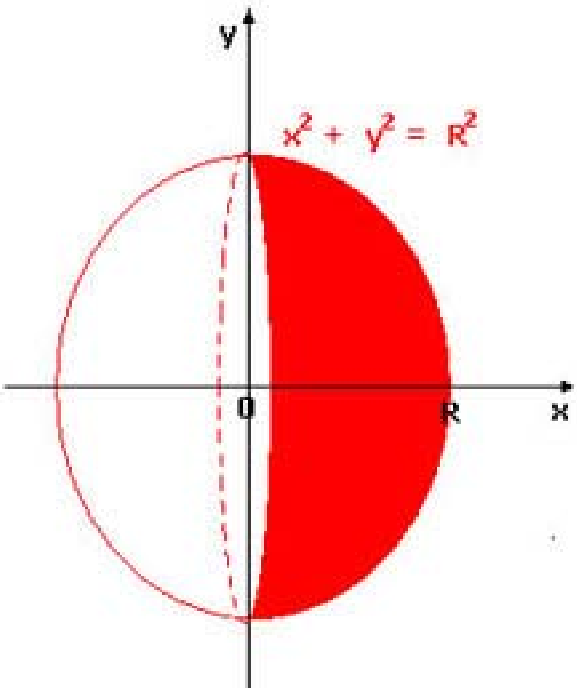
($g=\sqrt{R^2+h^2}$: generatriz del cono)

Por tanto, la superficie lateral será:

$$S_L=2\pi\int_0^h\left(-\frac{R}{h}x+R\right).\frac{g}{h}.dx=-\frac{2\pi Rg}{h^2}.\frac{1}{2}x^2\Big|_0^h+\frac{2\pi Rg}{h}x\Big|_0^h=-\pi Rg+2\pi Rg=\pi Rg$$

$$\boxed{S_L=\pi Rg}$$

SUPERFICIE DE LA ESFERA:



Podemos calcular la superficie lateral de una semiesfera y multiplicarla por 2. Quedaría así:

$$S = 2.2\pi\int_0^R y\sqrt{1+y'^2}.dx$$

y siendo: $2yy' + 2x = 0 \rightarrow y' = -\frac{x}{y} \rightarrow 1 + y'^2 = \frac{x^2+y^2}{y_2} \rightarrow \sqrt{1+y'^2} = \frac{R}{y}$

se tiene: $S = 4\pi\int_0^R y.\frac{R}{y}.dx = 4\pi R.x\Big|_0^R = 4\pi R^2$

$$\boxed{S = 4\pi R^2}$$

Carmen SÁNCHEZ DÍEZ
titakrmen@hotmail.com