# EXTENSIONES TRASCENDENTES DE UN CUERPO

### 2.1. EXTENSIONES TRASCENDENTES. BASE DE TRASCENDENCIA:

**Intentamos precisar aquí el concepto de extensión trascendente de un cuerpo y el de base de trascendencia, con una elaborada prueba para la unicidad del cardinal de las bases de trascendencia de la misma extensión L/K.**

**Definición 2.1:**

Sea L/K una extensión de L sobre K y S un subconjunto de L. Se dice que L es transcendente, o algebraicamente independiente, sobre K, si todos los elementos de S son trascendentes sobre K, es decir, si siempre que se tenga una relación de la forma

$$0=\sum a_i.M_i(S)=\sum a_i\prod_{x\in S}x^{i(x)}$$

con coeficientes $a_i \in$ K y casi todo $a_i$ = 0, debe ser necesariamente todo $a_i$ = 0.

Se dice que L es extensión trascendente sobre K si en L existe un subconjunto S algebraicamente independiente sobre K.

Sea L una extensión trascendente sobre K, y sea $F_{KL}$ la familia de subconjuntos de L que son trascendentes sobre K. Es claro que $F_{KL}$ es no vacía pues, por hipótesis, L es transcendente sobre K. Además ($F_{KL}$, $\subseteq$) es conjunto ordenado y $\cup$-inductivo. Aplicando aquí el Lema de Zorn, $F_{KL}$ tiene elementos maximales.

**Definición 2.2:**

Un subconjunto S $\subseteq$ L algebraicamente independiente sobre K y maximal en ($F_{KL}$, $\subseteq$), se denomina *base de trascendencia de L sobre K,* y su cardinal (del que más adelante se probará su unicidad) se llama *grado de trascendencia*, o *dimensión*, de L sobre K.

**Proposición 2.1:**

Si es S una base de trascendencia de L sobre K, entonces L es algebraico sobre K(S).

En efecto:

$\forall x\in K(S),$ *x es algebraico sobre K(S).*

Si $\forall x\in L-K(S),\ \sum_{i=1}^{n}a_i.x^i=0,\ a_i=0\cdots\Rightarrow a_i=0,\ \forall a_i\Rightarrow$ x es trascendente sobre K$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ S no es un conjunto algebraicamente independiente maximal sobre K (pues se tiene que $S'=S\cup\{x\}$ también es algebraicamente independiente sobre K y contiene estrictamente a S) $\Rightarrow$ contradicción.

Entonces, $\forall x \in L - K(S)$, es x algebraico sobre K(S) y $\left( \sum_{i=1}^{n} a_i . x^i = 0 \Rightarrow a_i \neq 0 \right)$.

En definitiva, $\forall x \in L$, x es algebraico sobre K(S) $\Rightarrow$ L es extensión algebraica de K(S).

**Proposición 2.2:**

Sea L/K una extensión trascendente. Entonces dos bases cualesquiera de trascendencia de L sobre K tienen el mismo cardinal. Si T es un conjunto de generadores de L sobre K (es decir, L = K(T)) y si S es un subconjunto de T algebraicamente independiente sobre K, existe una base de trascendencia B de L sobre K tal que S $\subseteq$ B $\subseteq$ T.

Demostración:

1. La primera parte: Veamos la igualdad del cardinal de las bases de transcendencia. Nos ocuparemos primero del caso finito y luego del infinito.

   a) El caso finito:

Sean X y W dos bases de transcendencia de la extensión L sobre K:

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \quad y \quad W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$$

Por ser X base de transcendencia, sus m elementos son el número máximo de elementos trascendentes sobre K; entonces, si consideramos el conjunto

$$X \cup \{w_1\} = \{w_1, x_1, x_2, \ldots, x_m\}$$

existirá un polinomio no idénticamente nulo, $f_1$, con coeficientes en K, tal que

$$f_1(w_1, x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$$

y $w_1$ está forzosamente en la expresión de $f_1$ junto, evidentemente, con algún otro $x_i$, por ejemplo, $x_1$.

Consideremos el conjunto $K(w_1, x_2, \ldots, x_m) = H_1$. Se tiene que x1 es algebraico sobre H1, pues existe el polinomio f1 anterior.

Por construcción, es claro que $K(x_1, x_2, \ldots, x_m) \subseteq H_1(x_1)$, por lo que L, que es algebraico sobre $K(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ por la proposición 1, también será algebraico sobre $H_1(x_1)$. A su vez, $H_1(x_1)$ es extensión algebraica simple de $H_1$, luego, en definitiva, L es algebraico sobre $H_1$.

Se ha encontrado, pues, que el cuerpo L es extensión algebraica de la adjunción $K(w_1, x_2, \ldots, x_m) = H_1$. Reiterando el proceso anterior, puede suponerse que se ha encontrado que L es algebraico sobre la adjunción

$$K(w_1, w_2, \ldots, w_r, x_{r+1}, \ldots, x_m) = H_r \text{ con } r<n$$

Entonces, para $w_{r+1}$ existe un polinomio $f_{r+1}$, no idénticamente nulo, con coeficientes en K, tal que

$$f_{r+1}(w_{r+1}, w_1, w_2, ..., w_r; x_{r+1}, ..., x_m) = 0$$

y $w_{r+1}$ está forzosamente en la expresión de $f_{r+1}$, junto con los elementos $w_1$, $w_2$, ..., $w_r$, los cuales, por ser algebraicamente independientes sobre K implican que algún $x_j$ (j=r+1, r+2, ..., n) está también en la expresión de $f_{r+1}$, sea por ejemplo el elemento $x_{r+1}$.

En tal caso, será $x_{r+1}$ algebraico sobre la adjunción

$$H_{r+1} = K(w_{r+1}, w_1, w_2, ..., w_r; x_{r+2}, ..., x_m)$$

Y también será L extensión algebraica de $H_{r+1}$.

Si n>m, se puede continuar el proceso y sustituir todas las $x_i$ por las $w_i$ hasta encontrar que L es extensión algebraica de la adjunción K($w_1$, $w_2$, ..., $w_m$), y en tal caso será $w_{m+1}$ algebraico sobre K($w_1$, $w_2$, ..., $w_n$) y, en particular, W={$w_1$, $w_2$, ..., $w_n$} es conjunto algebraicamente dependiente sobre K, lo cual es contradictorio con que W es una base de trascendencia de la extensión L sobre K.

Luego, ~ (n>m), o sea, *no es n mayor que m*.

Repitiendo el procedimiento, sustituyendo ahora las elementos de W por los de X, se concluye en que si m > n, entonces no puede ser X una base de trascendencia.

Luego, también se cumple que ~ (m>n), o sea, *no es m mayor que n*.

Y, de ambas negaciones, n = m. Esto es, card(X) = card(W).

b) El caso infinito:

La segunda parte: consideremos ahora el caso en el que alguna de las dos bases de transcendencia, X y W, es infinita. Sea infinita, por ejemplo, W. Demostraremos que, entonces, será necesariamente card(X) ≥ card(W). Y por simetría en el razonamiento sería también card(W) ≥ card(X). De lo cual, y en virtud del Teorema de Schröeder-Berstein:

$$\left.\begin{array}{l} card(X) \geq card(W) \\ card(W) \geq card(X) \end{array}\right\} \Rightarrow card(X) = card(W)$$

Aplicando el proceso descrito en a) se tiene que X es necesariamente infinita, pues de ser finita X={$x_1$, $x_2$, ...,$x_m$}, se llegaría a la conclusión de que L es algebráico sobre K($w_1$, $w_2$, ..., $w_m$) con lo cual card(W)=m, contra la hipótesis de que es infinita. Así, pues, si una de ambas bases es infinita también lo es la otra.

$\forall x \in X$, existe un polinomio no idénticamente nulo, f, con coeficientes en K tal que f(x, $w_1$, $w_2$, ..., $w_r$) = 0. Sea $W_x$ = {$w_1$, $w_2$, ..., $w_r$ } ⊆ W la familia finita de elementos de W que interviene con x en el polinomio f. Consideremos el conjunto unión C = U{$w_x$/x∈X}. Ciertamente, C ⊆ W y probaremos que C = W.

Si $\exists w \in X / w \notin C$, sea W' = W - {w} ⇒ L es algebraico sobre K(W) y satisface al polinomio no idénticamente nulo f, con coeficientes en K (por ser W algebraicamente independiente sobre K) pertenece a K(W) y satisface al polinomio f y en el que interviene necesariamente junto con w algún otro wi de W. Luego, no es W algebraicamente independiente sobre K, lo que es contradictorio con la hipótesis de partida. Luego, ha de cer C = W.

Sea $A = \{w_x \ / \ x \in X\}$ la familia de partes finitas de W de las que dependen los elementos de X; en A ha de haber infinitos elementos distintos pues de haber un número finito, como cada parte $W_x$ es finita, resultaría que C = W no sería infinita.

La aplicación f: X $\rightarrow$ A definida por la condición:

$$\forall x \in X, \quad f(x) = W_x$$

es suprayectiva (aunque en general no inyectiva, pues puede que $W_x = W_y$, $x \neq y$), de lo cual se deduce de nuevo que es X infinita y que card(X) $\geq$ card(A).

De teoría de conjuntos sabemos que si A es infinito, entonces card(AxA) = card(A).

También sabemos que W puede ser dotado de un buen orden (por axioma de Zermelo). Considerando la sucesión numerable infinita $\{w_1, w_2, \ldots\}$ que siempre existe, puede construirse la aplicación

$$H:W \rightarrow AxA$$

definida por:

$$\forall w \in W_x, \quad h(w) = (W_x, W_y)$$

Al menos existe una aplicación h, y, por axioma de elección, del conjunto de las que cumplen tal propiedad puede ser elegida una. En cuanto a $W_y$ puede seleccionarse del modo siguiente:

Si es $W_x = \{w_1 \leq w_2 \leq \ldots \leq w_i \leq \ldots \leq w_n\}$ y se tiene que $w_x = w_i$ , haremos entonces $w_y = w_i = \{w_1, w_2, \ldots, w_i\}$ con $w_i$ i-esimo elemento de la anterior sucesión numerable.

La aplicación h es inyectiva, por lo que:

$$\text{Card}(A) = \text{card}(AxA) \geq \text{card}(W)$$

y de ser también Card(X) $\geq$ card(A) se extrae, finalmente, Card(X) $\geq$ card(W)

con lo cual se completa la demostración.

2. Pasamos a probar la segunda parte de la proposición:

Para demostrar que existe B/S $\subseteq$ B $\subseteq$ T, consideremos la familia F de partes de K tal que una parte cualquiera H de esta familia sea algebraicamente independiente sobre K y se cumpla S $\subseteq$ H $\subseteq$ T. Esta familia no es vacía, pues al menos S $\in$ F. El conjunto ordenado (F, $\subseteq$) es trivialmente U-inductivo y, por el lema de Zorn, admite al menos un elemento maximal B, por hipótesis algebraicamente independiente sobre K, y tal que S $\subseteq$ B $\subseteq$ T, y, por la proposición 1, $\forall x \in T$, x es elemento algebraico sobre K(B). Veamos que B es una base de trascendencia:

Puesto que T es sistema de generadores de K, $\forall s \in K$, tal que $s \notin B$ será:

$$s = \sum a_i \prod_{x \in T} x^{i(x)},\ \text{con casi todo } a_i = 0$$

Considerando el conjunto $X = \{x \in T \,/\, x \text{ interviene en la expres. anterior}\}$ se tiene que X es un conjunto finito y A = K(B)(X) es una extensión finita de K(B) ya que cada x $\in$ X es algebraico sobre K(B), por lo que A es una extensión algebraica de K(B). Al ser s algebraico sobre A, será también algebraico sobre K(B), por lo cual B' = B $\cup$ {s} es algebraicamente dependiente sobre K, lo cual implica que es B familia algebraicamente independiente maximal en K, o base de trascendencia.

## 2.2. EL TEOREMA DE LOS CEROS DE HILBERT:

**Dada una extensión L sobre K estudiamos en este apartado en qué condiciones ciertos elementos del cuerpo L son o no trascendentes sobre K. Es preciso considerar los elementos generadores del cuerpo K y también los ideales del anillo K[$x_1$, $x_2$, ..., $x_n$].**

**Se definen los conceptos de cuerpo algebraicamente cerrado y de clausura algebraica de un cuerpo hasta obtener el Teorema de Hilbert, que establece que si un polinomio se anula para todo cero de un cierto ideal, una determinada potencia del mismo pertenece a dicho ideal.**

### Definición 2.3:

Dado un cuerpo conmutativo, K, y un ideal, $\alpha$, del anillo A=K[$x_1$, $x_2$, ..., $x_n$] de los polinomios, se llama cero de este ideal sobre una extensión L/K a todo punto

$$(e_1, e_2, \ldots, e_n) \in L^n$$

en el que todos los polinomios del ideal $\alpha$ toman valor cero.

Al ser K cuerpo, el anillo A=K[$x_1$, $x_2$, ..., $x_n$] es noetheriano, es decir, con sus ideales engendrados por bases finitas. Por tanto, el ideal $\alpha$ tendrá una base finita.

$$a = (f_1, f_2, \ldots, f_r), \quad con \quad f_i \in A$$

para que $(e_1, e_2, \ldots, e_n) \in L^n$ sea un cero de de $\alpha$ es condición necesaria y suficiente que los r polinomios $f_1$, $f_2$, ..., $f_r$ tomen en este punto el valor cero.

### Proposición 2.3:

Si un dominio de integridad L = K[$a_1$, $a_2$, ..., $a_n$] sobre K es un cuerpo, los generadores $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ son algebraicos sobre K.

En efecto:

usamos inducción completa:

a) es cierta la proposición para n = 1, ya que si $L_1$ = K[$a_1$] es cuerpo ha de ser $a_1$ algebraico sobre K, pues de lo contrario sería trascendente y se tendría:

por una parte $K[a_1] \approx K[x] / m = K[x] \Rightarrow K[x] \approx K[a_1]$

por otra $K(a1) = \{h_1(a_1) / h_2(a_2) : h_1(x), h_2(x) \in K[x]\} \Rightarrow K(a_1) \approx K[a_1]$.

y siendo $K(x) \neq K[x] \Rightarrow K(a_1) \neq K[a_1]$, es decir, $K[a_1]$ es isomorfo al anillo $K[x]$ y es distinto al mínimo cuerpo que contiene a x y a $a_1 \Rightarrow K[a_1]$ no es cuerpo $\Rightarrow$ contradicción.

Luego, $a_1$ es elemento algebraico sobre K.

b) Sea cierta la proposición para n - 1, o sea, si $L_{n-1} = K[a_1, a_2, ..., a_{n-1}]$ es cuerpo, entonces, $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ son algebraicos sobre K. Probemos que en tal caso la proposición también es cierta para n, esto es, también si $L_n = K[a_1, a_2, ..., a_n]$ es cuerpo los elementos $a_1, a_2, ..., a_n$ son algebraicos sobre K.

Puesto que L es cuerpo, $K(a_n) \subseteq L \Rightarrow K(a_n)[a_1, a_2, ..., a_{n-1}] \subseteq K[a_1, a_2, ..., a_n] = L$

Además, $K[a_n] \subseteq K(a_n) \Rightarrow K[a_n][a_1, a_2, ..., a_{n-1}] = L \subseteq K(a_n)[a_1, a_2, ..., a_{n-1}]$

de ambas inclusiones: $L = K[a_n][a_1, a_2, ..., a_{n-1}]$

Llamaremos K al cuerpo adjunción $K(a_n)$, o sea, haremos $K' = K(a_n)$, con lo cual expresaremos $L = K'[a_1, a_2, ..., a_{n-1}]$.

Se tiene, pues, que L es dominio de integridad y es cuerpo y además, por hipótesis recurrente en la inducción, son $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ elementos algebraicos sobre K'. Si probamos que $a_n$ es también algebraicos sobre K quedará probado que todos los elementos $a_1, a_2, ..., a_n$ son algebraicos sobre el cuerpo K.

Al ser los $a_i$ ($a_i$ = 1, 2, ..., n-1) algebraicos sobre K' satisfarán respectivas ecuaciones $f_i(x) = 0$, con coeficientes en K', coeficientes que serán, pues, de la forma $h_1(a_n) / h_2(a_n)$ donde $h_1$, $h_2$ son polinomios de K[x]. Multiplicando cada $f_i(x)$ por el m.c.m. de los polinomios denominadores obtendríamos un nuevo polinomio, que también llamaremos $f_i(x)$, y es tal que sus coeficientes, que ahora están en $K[a_n]$, son primos entre sí, considerados como polinomios del anillo K[x].

Sea $c_i(x)$ el polinomio de K[x] correspondiente al coeficiente director de $f_i(x)$ (i = 1, 2, ..., n-1), y sea $p(x) = c_1(x). ... .c_{n-1}(x)$. Es claro que al ser $c_i(an) \neq 0$, i=1,2, ..., n-1, se tendrá $p(a_n) \neq 0$.

Llamaremos $b_i = p(a_n).a_i$ (i = 1, 2, ..., n-1). Multiplicando cada $f_i(x)$ por $p(a_n)^{n_i} / c_i(a_n)$, con $n_i$ = grado de $f_i(x)$, resulta el polinomio:

$$p(a_n)^{n_i} / c_i(a_n) . f_i(x) = p(a_n)^{n_i} x^{n_i} + p(a_n)^{n_i - 1} x^{n_i - 1} + \ldots + c_{oi}(a_n) = 0$$

haciendo la sustitución $X = p(a_n).x$, será:

$$X^{n_i} + X^{n_i - 1} + \ldots + c_{0i}(a_n) = 0$$

ecuación que queda satisfecha por los $b_i = p(a_n).a_i$. Es decir, los $b_1, b_2, ..., b_{n-1}$ son elementos enteros algebraicos sobre $K[a_n]$.

Además, para todo elemento $f(a_1, a_2, ..., a_n) \in L$, si r es el grado de f respecto a los $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$, tenemos que

$$(p(a_n))^r . f(a_1, a_2, ..., a_n) = g(b_1, b_2, ..., b_{n-1}, a_n)$$

donde $g(b_1, b_2, ..., b_{n-1}, a_n)$ tiene ahora sus coeficientes en K[$a_n$]. Como el conjunto de los enteros algebraicos sobre K[$a_n$] que están en L es un superanillo de K[$a_n$], esto implica que $g(b_1, b_2, ..., b_{n-1}, a_n)$ es entero algebraico sobre K[$a_n$].

Todo elemento $\boldsymbol{j}(a_n) \in K(a_n)$ verifica, según esto, que

$$(p(a_n))^r . \boldsymbol{j}(a_n) = g(b_1, b_2, ..., b_{n-1}, a_n),$$

donde g, que pertenece también a K($a_n$) es entero algebraico sobre K[$a_1$].

Si $a_n$ fuese trascendente sobre K entonces $K(a_n) \approx K(x)$ y el elemento $g = {}^{g_1}\!/_{g_2}$ donde $g_1$ y $g_2$ son dos polinomios en $a_n$ primos entre sí. Como g es algebraico sobre K[$a_n$] se verificaría una ecuación

$$\left({}^{g_1}\!/_{g_2}\right)^n + s_1\left({}^{g_1}\!/_{g_2}\right)^{n-1} + ... + s_n = 0, \quad \text{donde los } s_i \in K[a_n]$$

Multiplicando por $g_2{}^n$ resultará (ya que trabajamos en estructuras isomorfas a K(x) y K[x]) que $g_2$ divide a $g_1$, lo cual implica que $g_2$ es una unidad y a su vez se tiene que $\Rightarrow g_2 \in K, \, g \in K[a_n]$. Entonces, tenemos que

$$\forall \boldsymbol{j}(a_n) \in K(a_n), \;\; \boldsymbol{j}(a_n) = \frac{g(a_n)}{(p(a_n))^r}$$

pero esto no es posible, pues tomando por ejemplo:

$$\boldsymbol{j}(a_n) = \frac{e}{p(a_n) + e}$$

nunca será

$$\frac{e}{p(a_n) + e} = \frac{g(a_n)}{(p(a_n))^r}$$

pues ello significaría que

$$p(x)^r = g(x).(p(x) + e)$$

Lo cual no es posible en K[x].

De esto se deduce, por tanto, que suponer a $a_n$ trascendente sobre K lleva a una contradicción.

Luego, es $a_n$ algebraico sobre K, con lo cual se tiene que todos los $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ son algebraicos sobre K y la proposición queda probada.

**Definición 2.4:**

Un cuerpo K es algebraicamente cerrado si todo polinomio K[x] tiene sus ceros en K.

Se llama clausura algebraica de un cuerpo K, abreviadamente $\overline{K}$, a una extensión algebraica de K, que sea algebraicamente cerrada.

**Proposición 2.4:**

Dado un cuerpo K, todo ideal $\alpha$ del anillo A=K[$x_1$, $x_2$, ..., $x_n$] tiene al menos un cero en V, extensión algebraicamente cerrada de K.

En efecto:

Todo ideal $\alpha$ distinto de (e) = A, está contenido en un ideal maximal m. Por tanto nos limitaremos a probar la proposición para m. Puesto que $\alpha \subseteq$ m, todo cero de $\alpha$ es también cero de m.

Si es m maximal $\Rightarrow$ m maximal y m con elemento unidad $\Rightarrow$ A/m cuerpo.

Sea $a_i \in A/m$ la clase que contiene al polinomio g($x_1$, $x_2$, ..., $x_n$). En virtud del homomorfismo A $\rightarrow$ A/m, el polinomio g($x_1$, $x_2$, ..., $x_n$) está en la clase g($a_1$, $a_2$, ..., $a_n$), por lo cual

$$A/m = K[x_1, x_2,..., x_n]$$

es decir, A/m es cuerpo y dominio íntegro, luego, por la proposición anterior, los elementos $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ son algebraicos sobre K.

Pueden, entonces, ser tomados los ai como elementos de la clausura algebraica, $\overline{K}$, del cuerpo K $(\overline{K} \subseteq V)$, es decir, como elementos de un cuerpo algebraicamente cerrado que es extensión algebraica de K. Esto implica que

$$\forall f(x_1, x_2,..., x_n) \in m, \quad f(a_1, a_2,..., a_n) = 0$$

Puesto que m es el núcleo del homomorfismo A $\rightarrow$ A/m.

En consecuencia, ($a_1$, $a_2$, ..., $a_n$) es un cero de m.

**Corolario a la proposición 2.4 (Teorema de los ceros de Hilbert):**

Si un polinomio $f \in K[x_1,...,x_n]$ se anula para todo cero del ideal $\alpha$ sobre una extensión algebraicamente cerrada V de K, existe un exponente p tal que

$$f^p \in \boldsymbol{a} = (f_1, f_2, ..., f_r)$$

En efecto:

Sea el anillo $D = K[x_1, x_2,..., x_n, u]$ donde $u$ es una indeterminada más. Se tiene que el ideal $\boldsymbol{b} = (f_1, f_2,..., f_r, e - u.f)$ no admite ningún cero en V. Tal ideal es, según proposición 2.4., el ideal unidad (e) = D y por consiguiente existirán polinomios $h_1, h_2,..., h_r, h_{r+1} \in D$ tales que

$$e = h_1 . f_1 + h_2 . f_2 + ... + h_r . f_r + h_{r+1}(e - u.f)$$

dando a *u* el valor:

$$u = \frac{e}{f(x_1,...,x_n)} \Rightarrow e - u.f = 0$$

con lo cual será

$$e = h_1 . f_1 + h_2 . f_2 + ... + h_r . f_r$$

multiplicando ahora por $f^p$:

$$f^p = f^p . h_1 . f_1 + ... + f^p . h_r . f_r$$

o sea:

$$f^p = q_1 . f_1 + ... + q_r . f_r$$

con los $q_i(x_1, x_2,..., x_n) \in A = K[x_1, x_2,..., x_n]$

Luego, finalmente:

$$f^p \in a = (f_1, f_2, ..., f_r)$$

## 2.3. EL TEOREMA DE LA NORMALIZACIÓN DE NOETHER:

**Establecemos aquí la definición de entero sobre un anillo de polinomios y el teorema de Noether, que define la condición para que un dominio íntegro sea entero sobre un cierto dominio de polinomios.**

**Definición 2.5:**

Un elemento x se dice que es entero sobre K[$x_1$, ..., $x_n$] si se verifica una ecuación de la forma

$$x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0 = 0$$

Donde $c_i \in K[x_1, \ldots, x_n]$, $(i = 0, 1, \ldots, ´n - 1)$

Se dirá que el conjunto A es entero sobre $K[x_1, \ldots, x_n]$ si $\forall x \in A$, x es entero sobre $K[x_1, \ldots, x_n]$.

**Proposición 2.5 (Teorema de la Normalización de Noether):**

Sea $K[x] = K[x_1, \ldots, x_n]$ un dominio de integridad de generación finita sobre un cuerpo K, y sea r el grado de trascendencia de K(x) sobre K. Existen elementos $y_1$, ..., $y_r$ en $K[x]$ tales que $K[x]$ es un anillo entero sobre $K[y] = K[y_1, \ldots, y_r]$.

En efecto:

Si los $x_1$, ..., $x_n$ son ya trascendentes sobre K la proposición queda probada, pues son los mismos $x_1$, ..., $x_r$ y los elementos $y_1$, ..., $y_r$ propuestos.

Si todos los $x_1$, ..., $x_n$ no son trascendentes sobre K, existirá una relación de la forma

$$\sum a_j . x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n} = 0, \quad a_j \in K, \quad a_j \neq 0$$

extendida a un número finito de n-plas distintas de enteros ($j_1$, ..., $j_n$).

Sean los enteros positivos $m_1, \ldots, m_n \in Z^+$, y hagamos

$$y_2 = x_2 - x_1^{m_2}$$
$$y_3 = x_3 - x_1^{m_3}$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$y_n = x_n - x_1^{m_n}$$

si sustituimos $x_i = y_i + x_1^{m_i}$ $(i = 2, \ldots, n)$ en la relación anterior, se tiene:

$$\sum a_j x_1^{j_1}\left(y_2 + x_1^{m_1}\right)^{j_2}\left(y_3 + x_1^{m_3}\right)^{j_3}\ldots\left(y_n + x_1^{m_n}\right)^{j_n} = 0,\ a_j \in K,\ a_j \neq 0$$

o sea:

$$\sum a_j x_1^{j_1 + m_2 j_2 + \ldots + m_n j_n} + f(x_1, y_2, \ldots, y_n) = 0,\ a_j \in K,\ a_j \neq 0$$

si llamamos, con notación vectorial:

$$(j) = (j_1, \ldots, j_n),\quad (m) = (1, m_2, \ldots, m_n)$$

sería:

$$j_1 + j_2 m_2 + \ldots + j_n m_n = (j)(m)$$

con lo cual expresaremos:

$$\sum a_j x_1^{(j)(m)} + f(x_1, y_2, \ldots, y_n) = 0,\ a_j \in K,\ a_j \neq 0$$

donde es f un polinomio en el cual no aparecen monomios de la forma $cx_1^s$, $c \in K$, y es tal que su grado respecto de $x_1$ es menor que (j)(m), para alguno de los j.

Eligiendo ahora un entero d tal que

$$(m) = (1, d, d^2, \ldots, d^n)$$

si d es suficientemente grande, como es finito el número de polinomios de la forma

$$p(x) = (j_1 - j_1') + (j_2 - j_2')x + \ldots + (j_n - j_n')x^{n-1} \text{ tales que } a_j \in K, a_j \neq 0$$

resultará que (j).(m) ≠ 0, y todos distintos para las j tales que $a_j \neq 0$

Esto implica que x1 verificará una ecuación de la forma

$$x_1^s + c_{s-1} x_1^{s-1} + \ldots + c_0 = 0$$

donde los $c_i \in K[y_1, y_2, \ldots, y_n]$. Es decir, que x1 es entero sobre $K[y_{21}, \ldots, y_n]$.

Puesto que cada $x_i\ (i = 1,2,\ldots,n)$ es entero sobre $K[x_1, y_2, \ldots, y_n]$ ya que $x_i = y_i + x_1^{m_i}$, esto implica que $K[x]$ es un anillo entero sobre $K[y_2, \ldots, y_n]$.

Cabe ahora proceder por inducción, utilizando la transitividad de las extensiones enteras para disminuir el número de elementos $y_i$ hasta llegar a un conjunto de ellos que sean algebraicamente independientes.

## 2.3. NOTA BIBLIOGRÁFICA:


1. **Artin, E**. Galois Theory.
2. **Artin, E**. Geometric Algebra
3. **Birkhoff-Mc Lane**. Algebra moderna.
4. **Birkhoff,G., Bartee, T.C.,** Modern Applied Algebra, Mc Graw-Hill, 1970.
5. **Bourbak**i. Algebre, Ch. II - 3ra. Ed.
6. B**ourbaki**. Algebre, Ch. VII - 2da. Ed.
7. **Bourbaki**, N. Algèbre.
8. **Burton, D.M**., Introduction to Modern Abstract Algebra, Addison-Wesley, 1967.
9. **Caton, G. y Grossman, S. J**., Linear Algebra.,., Ed. Wordsworth Publ. Co. 1980.
10. **Childs, L.**, A Concrete Introduction to Higher Algebra, Springer-Verlag, 1979.
11. **Cignoli, R. O**., Apuntes de la materia Lógica (Computadores): Algebras de Boole. Cálculo proposicional.
12. **Fraleigh, J**. A First Course in Abstract Algebra.
13. **Fraleigh, J.B**., A First Course in Abstract Algebra, Addison-Wesley, 1967.
14. **Friedberg, S, Insel, A, Spence, L**., Linear Algebra, Prentice Hall (1979).
15. **Gamtmacher, F. R.,** The Theory of Mathematics., Vol. I y II., Ed. Chelsea, 1974.
16. **Gentile, E.**, Estructuras algebraicas I. (Public. OEA).
17. **Gentile, E**., Notas de Algebra (EUDEBA).
18. **Gentile, E**., Notas de Algebra II, Editorial Docencia.
19. **Godement, R**., Cours d'algèbre.
20. **Herstein, I. N.,** Algebra Moderna.
21. **Herstein, I. N**., Topics in Algebra.
22. **Hoffman, K y R. Kunze**, Algebra lineal, Prentice Hall.
23. **Hoffman, K, y R. Kunzc,** Linear Algebra, Prentice Hall, 1971.
24. **Hungerford, T.W.,** Álgebra.
25. **Jacobson, N.,** Lecture in Abstract Algebra, Princeton, N.J. Van Nostrand, 1951-1964.
26. **Jacobson, N.** Basic Algebra I.
27. **Kaplansky, I.** Linear Algebra and Geometry
28. **Lang, Serge,** Algebra lineal, Addison Wesley.
29. **Larotonda, A.,** Algebra lineal y Geometría. Eudeba.
30. **Lipschutz, S.,** Algebra lineal, Serie Schaum.
31. **Rotman, J.,** The Theory of Groups.
32. **Strang G.,,** Algebra Lineal con aplicaciones., Ed. Fondo Educativo Interamericano, 1981.
33. **Van der Waerden, B.**L. Moderne Algebra.
34. **Vargas, J.A.** Algebra Abstracta.
35. **Zariski, O. y Samuel, P**. Commutative Algebra I y II.